TFY4102 Fysikk Eksamen 6. desember 2018 – 9 sider

FORMLER: **Fete** symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighetsområde og de ulike symbolenes betydning antas forøvrig å være kjent. Symbolbruk og betegnelser som i forelesningene.

MEKANIKK

- Newtons andre lov: $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt \qquad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dot{\boldsymbol{r}}$
- Konstant akselerasjon: $v = v_0 + at \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
- Konstant vinkelakselerasjon: $\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$
- Arbeid: $dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$ Effekt: $P = \frac{dW}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$
- Konservativ kraft og potensiell energi: $U(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}_0}^{\boldsymbol{r}} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r})$
- Friksjon, statisk: $f \leq \mu_s N$ kinetisk: $f = \mu_k N$
- Luftmotstand (liten v): $\boldsymbol{f} = -k\boldsymbol{v}$ Luftmotstand (stor v): $\boldsymbol{f} = -Dv^2\hat{v}$
- Tyngdepunkt: $\boldsymbol{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i \boldsymbol{r_i} m_i \rightarrow \frac{1}{M}\int \boldsymbol{r} \cdot dm$
- Sirkelbevegelse: $v = r\omega$ Sentripetalakselerasjon: $a = v^2/r$ Baneakselerasjon: $a = dv/dt = r\, d\omega/dt$
- Dreiemoment: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ Statisk likevekt: $\Sigma \boldsymbol{F}_i = 0 \quad \Sigma \boldsymbol{\tau}_i = 0$
- Dreieimpuls: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ N2 rotasjon: $\boldsymbol{\tau} = d\boldsymbol{L}/dt$
- Stivt legeme, refleksjonssymmetri mhp rotasjonsaksen: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_b + \boldsymbol{L}_s = \boldsymbol{R}_{CM} \times M\boldsymbol{V} + I_0\boldsymbol{\omega}$
- Kinetisk energi, stivt legeme: $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$
- Treghetsmoment: $I = \sum_i m_i r_i^2 \rightarrow \int r^2 dm$

  Kompakt sylinder (skive): $I_0 = \frac{1}{2}MR^2$ Kompakt kule: $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$ Kuleskall: $I_0 = \frac{2}{3}MR^2$

  Tynn stang: $I_0 = \frac{1}{12}ML^2$
- Stivt legeme, rotasjon om fast akse: $K = \frac{1}{2}I\omega^2$
- N2 rotasjon, akse med fast orientering: $\tau = I\frac{d\omega}{dt}$

- Steiners sats (parallellakseteoremet): $I = I_0 + Md^2$
- Gravitasjon: $\boldsymbol{F} = -\dfrac{GMm}{r^2}\hat{r}$ $\quad U(r) = -\dfrac{GMm}{r}$ $\quad \boldsymbol{g} = \boldsymbol{F}/m$
- Enkel harmonisk oscillator: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ $\qquad T = 2\pi/\omega_0$ $\qquad f = 1/T = \omega_0/2\pi$

  Masse i fjær: $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ Matematisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{g/L}$

  Fysisk pendel: $\omega_0 = \sqrt{mgd/I}$ Torsjonspendel: $\omega_0 = \sqrt{\kappa/I_0}$
- Fri, dempet svingning, langsom bevegelse i fluid: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$

  $\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \omega_0^2 = k/m \qquad \gamma = b/2m$

  Underkritisk demping $(\gamma < \omega_0)$ $\qquad x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \phi) \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

  Overkritisk demping $(\gamma > \omega_0)$ $\qquad x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t} \qquad \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

  Kritisk demping $(\gamma = \omega_0)$ $\qquad x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$
- Tvungen svingning, harmonisk ytre kraft: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t$

  (partikulær-)løsning: $x(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \phi(\omega))$

  amplitude: $A(\omega) = \dfrac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$

  halvverdibredde: $\Delta\omega \simeq 2\gamma$ $\qquad$ Q-faktor: $Q = \omega_0/\Delta\omega$

ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Elektrostatikk

- Coulombs lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

- Elektrisk felt og potensial:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q_0 \qquad \boldsymbol{E} = -\nabla V \qquad \Delta V = \Delta U/q_0 \qquad \Delta V = V_B - V_A = -\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

- Elektrisk potensial fra punktladning:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- Elektrisk dipolmoment; for punktladninger $\pm q$ i innbyrdes avstand $\boldsymbol{d}$: $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$
- Elektrisk dipol i ytre elektrisk felt: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}_0$, $U = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_0$
- Lineær respons:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0/\varepsilon_r \qquad \varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$$

- Kapasitans:

$$C = q/V$$

Seriekobling, parallellkobling:

$$C = (\sum_j C_j^{-1})^{-1} \qquad C = \sum_j C_j$$

- Parallellplatekondensator (ideell; feltstyrke $\sigma/2\varepsilon$ fra ett stort og jevnt ladet plan):

$$E = \sigma/\varepsilon \quad , \quad C = \varepsilon A/d$$

- Energitetthet i elektrisk felt:

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

Elektrisk strøm

- Strømstyrke, strømtetthet:

$$I = dQ/dt \quad , \quad j = I/A$$

- Ohms lov:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E} \quad , \quad V = RI$$

- Drudemodellen:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e}$$

- Resistans R og konduktans G:

$$R = G^{-1} = l/\sigma A = \rho l/A, \quad \sigma = \text{konduktivitet}, \quad \rho = \text{resistivitet}$$

$$R(T) = R_0\,(1 + \alpha(T - T_0))$$

Seriekobling, parallellkobling:

$$R = \sum_j R_j \quad , \quad R = (\sum_j R_j^{-1})^{-1}$$

- Elektrisk effekt:

$$P = VI$$

- Midlere effekt med vekselspenning:

$$P = V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} = \frac{1}{2} V_0 I_0$$

Magnetostatikk

- Magnetisk fluks:

$$\phi = \int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Magnetfelt fra strømførende leder (Biot–Savarts lov):

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{d\boldsymbol{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

- Lang rett leder:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

- På aksen til sirkulær strømsløyfe:

$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

- Magnetisk dipolmoment; for plan strømsløyfe: $\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A} = IA\hat{n}$
- Magnetisk dipol i ytre magnetfelt: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B}_0$, $U = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}_0$
- Lineær respons:

$$\boldsymbol{B} = \mu_r \boldsymbol{B}_0 \qquad \mu = \mu_r \mu_0$$

- Lorentzkraften:

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

- Magnetisk kraft på strømførende leder; generelt:

$$\boldsymbol{F} = \int_L d\boldsymbol{F} = I \int_L d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}$$

- Magnetisk kraft på rett strømførende leder:

$$\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$$

- Energitetthet i magnetfelt:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Elektrodynamikk og elektromagnetisk induksjon

- Faradays induksjonslov:

$$\Delta V = -\frac{d\phi}{dt}$$

- Selvinduktans:

$$L = \frac{\phi}{I}$$

- Gjensidig induktans:

$$M = \frac{\phi_2}{I_1} = \frac{\phi_1}{I_2}$$

- Transformator:

$$V_2/V_1 = N_2/N_1$$

- Spole (ideell):
$$B = \mu(N/l)I \quad , \quad L = \mu N^2 A/l$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:
$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Kretser

- Spenning over motstand, kapasitans, induktans:
$$RI \qquad Q/C \qquad L\,dI/dt$$

- Tidskonstanter, RC-krets og RL-krets:
$$\tau = RC \qquad \tau = L/R$$

- Opplading av kondensator i RC-krets:
$$Q(t) = Q_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

- Oppbygging av strøm i RL-krets:
$$I(t) = I_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

TERMISK FYSIKK

- Utvidelseskoeffisienter, trykk-koeffisient, kompressibilitet:
$$\alpha = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_p \qquad \beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 3\alpha \qquad \gamma = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad \kappa = -\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{1}{B}$$

- Første hovedsetning (Termodynamikkens første lov):
$$dQ = dU + dW$$

- Varmekapasitet C, pr masseenhet c, pr mol c_m:
$$C = \frac{dQ}{dT} \quad , \quad c = C/M \quad , \quad c_m = C/n$$

- C_p og C_V:
$$C_p = (dQ/dT)_p \quad , \quad C_V = (dQ/dT)_V$$
For ideell gass: $C_p - C_V = nR$. Atomær gass: $C_V = \frac{3}{2}nR$. Toatomig gass: $C_V = \frac{5}{2}nR$

- Den termodynamiske identitet:
$$TdS = dU + pdV$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_BT = nRT$$

$$\langle K_{\text{trans}} \rangle = \frac{3pV}{2N} = \frac{3}{2}k_BT$$

$$U = U(T) = N\langle K \rangle$$

  Atomær gass: $U = \frac{3}{2}Nk_BT$. Toatomig gass: $U = \frac{5}{2}Nk_BT$

- van der Waals tilstandsligning:

$$p = \frac{nRT}{V - nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

- Maxwells hastighetsfordeling:

  for hastighetskomponentene:

$$g(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{1/2} e^{-mv_x^2/2k_BT}$$

  for hastigheten:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} e^{-mv^2/2k_BT}$$

  for hastighetens absoluttverdi:

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_BT}\right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2k_BT}$$

- Middelverdi (f eks en potens av v_x):

$$\langle v_x^n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} v_x^n g(v_x) dv_x$$

- Standardavvik (f eks i v_x):

$$\Delta v_x = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle - \langle v_x \rangle^2}$$

- Gauss-integraler:

$$I_0(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

$$I_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{d}{d\alpha} I_0(\alpha) \quad \text{etc}$$

- Det klassiske ekvipartisjonsprinsippet:

  Hver frihetsgrad som inngår kvadratisk i energifunksjonen E bidrar med $k_BT/2$ til midlere energi pr partikkel.

- Adiabatisk prosess ($dQ = 0$) for ideell gass:

$$pV^\gamma = \text{konst} \qquad TV^{\gamma-1} = \text{konst} \qquad pT^{-\gamma/(\gamma-1)} = \text{konst} \qquad (\gamma = C_p/C_V)$$

- Virkningsgrad for varmekraftmaskin:

$$\eta = \left| \frac{W}{Q_2} \right|$$

- Virkningsgrad for Carnot-varmekraftmaskin (Carnot-prosess: $Q_2/T_2 + Q_1/T_1 = 0$):

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

- Kjøleskap og varmepumpe, effektfaktor:

$$\varepsilon_K = \left| \frac{Q_1}{W} \right| \quad , \quad \varepsilon_V = \left| \frac{Q_2}{W} \right|$$

- Entropi (dQ er reversibelt tilført varme):

$$dS = \frac{dQ}{T} \qquad \oint dS = 0$$

- Boltzmanns prinsipp:

$$S = k_B \ln \Omega$$

- Clapeyrons ligning:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T\Delta V}$$

- Damptrykk-kurven:

$$p_d(T) = p_d(T_0)\, \exp\left[\frac{l}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right]$$

(l = molar latent varme, T_0 = valgt referansetemperatur)

- Stefan-Boltzmanns lov (svart legeme: $e = 1$):

$$j(T) = e\,\sigma\, T^4 \qquad (e = \text{emissivitet}; \sigma = 2\pi^5 k_B^4/15h^3c^2 = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2K^4})$$

- Plancks fordelingslov:

$$j(T) = \int_0^\infty \frac{dj}{df}\, df \qquad \text{med} \qquad \frac{dj}{df} = \frac{2\pi h f^3/c^2}{\exp(hf/k_BT) - 1}$$

$$j(T) = \int_0^\infty \frac{dj}{d\lambda}\, d\lambda \qquad \text{med} \qquad \frac{dj}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2/\lambda^5}{\exp(hc/\lambda k_BT) - 1}$$

- Wiens forskyvningslov:

$$\text{Maksimal } dj/d\lambda \text{ for } \lambda T = 2.90 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$$

- Varmeovergang:

$$j = \alpha \Delta T$$

- Stasjonær varmeledning i en dimensjon (Fouriers lov; κ = varmeledningsevne, a = tykkelse):

$$j = \kappa \Delta T/a$$

- Varmemotstand R ($P = jA$ = effekt):

$$\Delta T = RP = \frac{a}{\kappa A} P \qquad \text{Seriekobling}: \; R = \sum_j R_j \qquad \text{Parallellkobling}: \; \frac{1}{R} = \sum_j \frac{1}{R_j}$$

- U–verdi (T_i: inne, T_u: ute):

$$j = U\ (T_i - T_u)$$

KONSTANTER, OMREGNINGSFAKTORER OG DEKADISKE PREFIKSER

- Fundamentale konstanter:

$$\begin{aligned}
G &= 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2} \quad (g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}) \\
m_e &= 9.11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \\
m_p = m_n &= 1.67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \\
u &= 1.66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} \\
e &= 1.60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \\
\varepsilon_0 &= 8.85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m} \\
\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} &= 9 \cdot 10^{9}\ \mathrm{Nm^2/C^2} \\
\mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m} \\
k_B &= 1.38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K} \\
N_A &= 6.02 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}} \\
h &= 6.63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js} \\
c &= 3.00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

- Omregningsfaktorer:

$$\begin{aligned}
1\ \mathrm{eV} &= 1.60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} \\
1\ \text{Å} &= 10^{-10}\ \mathrm{m}
\end{aligned}$$

- Dekadiske prefikser: p = piko = 10^{-12}, n = nano = 10^{-9}, μ = mikro = 10^{-6}, m = milli = 10^{-3}, c = centi = 10^{-2}, k = kilo = 10^{3}, M = mega = 10^{6}, G = giga = 10^{9}

- Geometri:
  Areal, sirkulær skive: πr^2. Kuleflateareal: $4\pi r^2$. Kulevolum: $4\pi r^3/3$.

MATEMATIKK

- Krumningsradius:

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

- $$\frac{d}{dx}\,e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$$

- $$\int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$$

MIDDELVERDI OG FEIL I MÅLINGER

- Gauss' feilforplantningslov: $(\Delta q)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial q}{\partial a_i}\,\Delta a_i\right)^2$
- Hvis størrelsen q er et produkt av potenser av a_i ($q = a_1^{N_1} \cdot a_2^{N_2} \cdot \ldots$):

$$\frac{\Delta q}{q} = \sqrt{\left(\frac{N_1 \Delta a_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{N_2 \Delta a_2}{a_2}\right)^2 + \ldots}$$

- Middelverdi (gjennomsnittsverdi): $\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$
- Standardavvik (feil i enkeltmåling): $\delta_x = \sqrt{\left(\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2\right)}$
- Standardfeil (feil i middelverdi): $\delta_{\overline{x}} = \delta_x/\sqrt{N}$