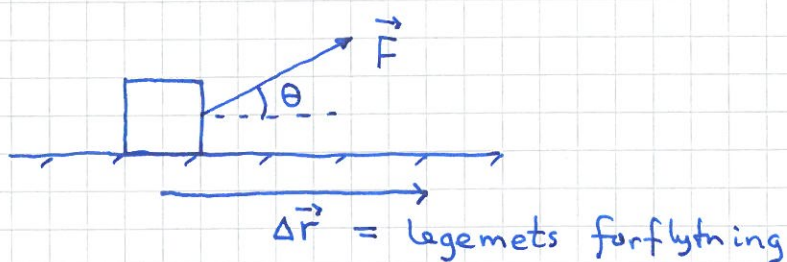


Arbeid og energi [YF 6,7; TM 6,7; LL 4; HS 3]

Arbeid [YF 6.1-6.3; TM 6.1-6.3; LL 4.1; HS 3.1]



$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = \text{arbeid utført av kraft } \vec{F} \text{ på legemet}$$

$$[W] = [F \cdot r] = \text{Nm} = \text{J (joule)}$$

Generelt:



Arbeid utført ved forflytning fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$:

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta \vec{r}_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Effekt [YF 6.4; TM 6.3; LL 4.1; HS 3.1]

effekt $\stackrel{\text{def}}{=}$ (energi) arbeid pr tidsenhet

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

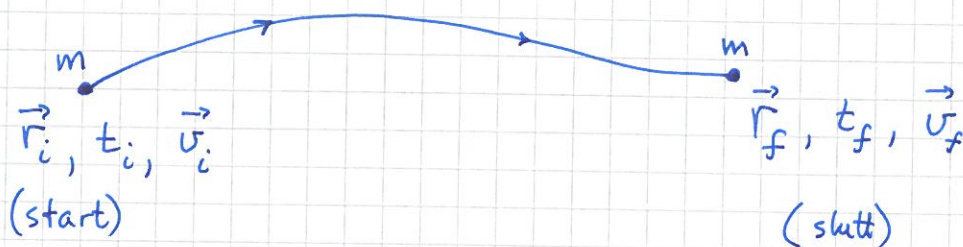
$$[P] = [W/t] = \text{J/s} = \text{W (watt)}$$

Eks: Om på 1000 W står på i 1 time. Energi forbruk = ?

$$\text{Løsn: } \Delta W = P \cdot \Delta t = 1 \text{ kW} \cdot 1 \text{ h} = \underline{\underline{1 \text{ kWh}}} = 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = \underline{\underline{3.6 \text{ MJ}}}$$

Kinetisk energi [YF 6.2; TM 6.1; LL 4.2; HS 3.1]

(19)



$$\begin{aligned} W &= \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_{t_i}^{t_f} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{v}}_{=v^2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \end{aligned}$$

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2 = \text{kinetisk energi}$$

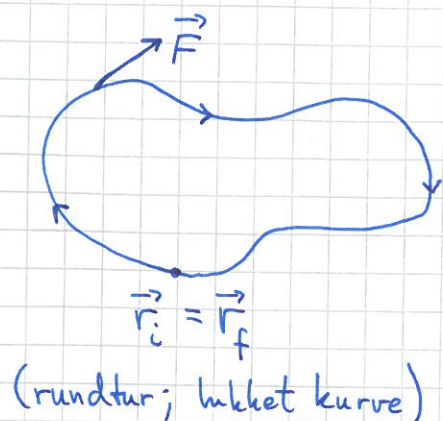
$$\Rightarrow \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

Arbeid W utført av (netto) ytre kraft $\vec{F}$ tilsvarende endringen ΔK i legemets kinetiske energi

Konservativ kraft. Potensiell energi. Energibevarelse.

[YF 7.1-7.4; TM 7.1-7.3; LL 4.3-4.5; HS 3.2.1]

Konservativt system = system uten tap av mekanisk energi (dvs uten dissipasjon) til andre energiformer (som varme)



Hvis $\vec{F}$ er konservativ, er $K_f = K_i$ (og $v_f = v_i$); dvs $W = \Delta K = 0$.

$$\text{Dermed: } \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f = \vec{r}_i} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Standard notasjon:

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

$\oint$: integral rundt lukket kurve

Potensiell energi:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(20)

Her er $\vec{F}$ en kons. kraft, og vi har vålt $U(\vec{r}_0) = 0$

Mekanisk energibevarelse:

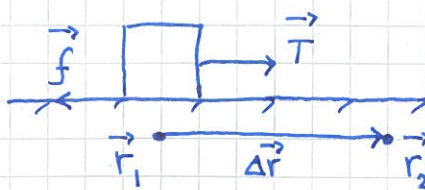


$$U_1 - U_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

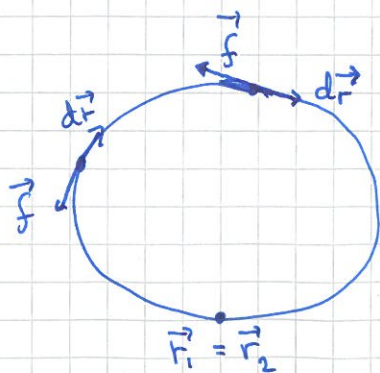
Dvs: Total mekanisk energi, $E = K + U$, er konstant for et konservativt system

Friksjonsarbeid:



$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{fordi } \vec{f} \text{ er rettet mot } d\vec{r}$$

$\Rightarrow$ friksjonsarbeidet W_f "går tapt" (som varme)

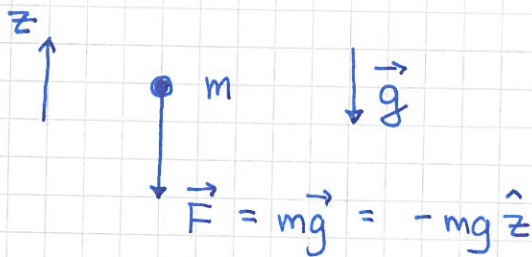


$$\Rightarrow \oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$$

$\Rightarrow$ friksjonskraft $\vec{f}$ er ikke konservativ

Eks: Tyngdefeltet

(21)

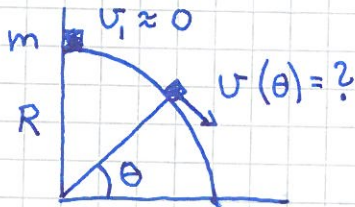


- Velg $U(0) = 0$ og bestem $U(z)$
- Anta $v(0) = 0$ og bestem $v(z)$ ($z < 0$)

Løsning: • $U(z) = - \int_0^z \underbrace{(-mg\hat{z})}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\hat{z} dz)}_{d\vec{r}} = \underline{mgz}$

• $E(0) = U(0) + K(0) = 0 = U(z) + K(z)$
 $= mgz + \frac{1}{2}mv(z)^2$
 $\Rightarrow v(z) = \underline{\sqrt{-2gz}}$ ($z < 0$)

Eks: Gli på kuleflate (uten friksjon)



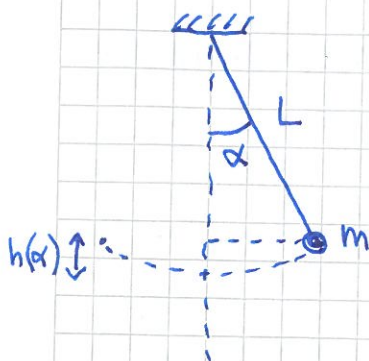
Løsn: E er bevart

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mgR \sin \theta = mgR$$

$$\Rightarrow v(\theta) = \underline{\sqrt{2gR(1 - \sin \theta)}}$$

[Spm: Fra der hvor normalkrafta N fra underlaget forsvinner ($N=0$) har vi et "skrått kast". Ved hvilken vinkel θ skjer dette?]

Eks: Matematisk pendel



Bestem $E(\alpha, \dot{\alpha})$.

Løsn: $U(\alpha) = mgh(\alpha) = mgL(1 - \cos \alpha)$ [Velgen $U(0)=0$]

$$K(\dot{\alpha}) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(L\dot{\alpha})^2$$

$$\Rightarrow E(\alpha, \dot{\alpha}) = \underline{\underline{\frac{1}{2}mL^2\dot{\alpha}^2 + mgL(1 - \cos \alpha)}}$$

Swingninger

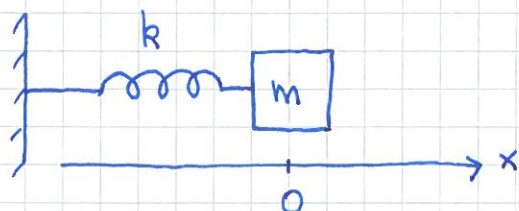
[YF 14; TM 14; LL 9; HS 6]

(22)

= oscillasjoner = periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: masse/fjær, pendel, gitarstreng, vibrerende atomer i krystall, ...

Harmonisk oscillator [YF 14.2; TM 14.1; LL 9.1-9.3; HS 6.1]



Likevekt ($F=0$) med m i $x=0$.

Strukket fjær ($x>0$):



Sammenpresset fjær ($x<0$):



$$\vec{F} = -k \times \hat{x}$$

Hooke's law

Ideell fjær: $F \sim |x|$

$$N2: -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\text{Innfør } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Ligning for
harm. osc. i
1D

Generell løsning:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{evt. } x(t) = B \cos \omega t + C \sin \omega t$$

2.ordens diff. lign. $\Rightarrow$ 2 integrasjonskonstanter,

[A og φ fastlegges via 2 initialbetingelser, φ f.eks. $x(0)=x_0$ og $\dot{x}(0)=v_0$]

[$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \Rightarrow$ sammenheng mellom A, φ og B, C]

A = amplitude = max utsving

ω = vinkelfrekvens = vinkelhastighet

$$[\omega] = s^{-1}$$

$T = 2\pi/\omega$ = periode = tid pr svingning

$$[T] = s$$

$f = T^{-1}$ = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet

$$[f] = Hz = s^{-1}$$

$\omega t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant

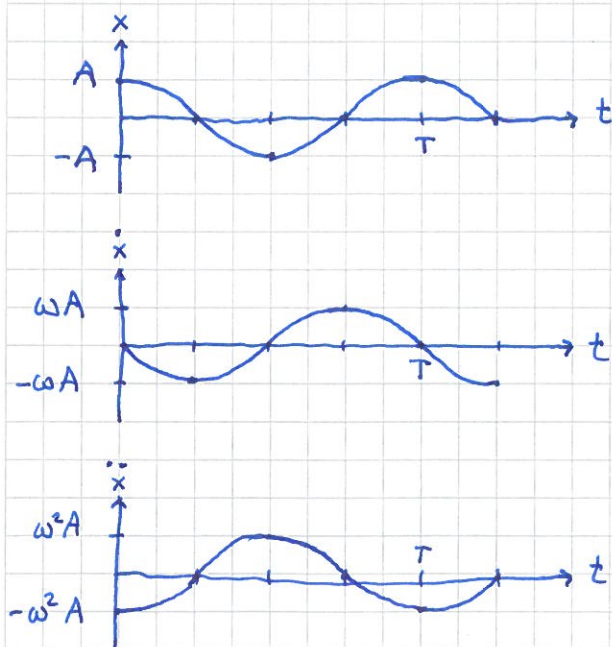
$$[\varphi] = 1$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

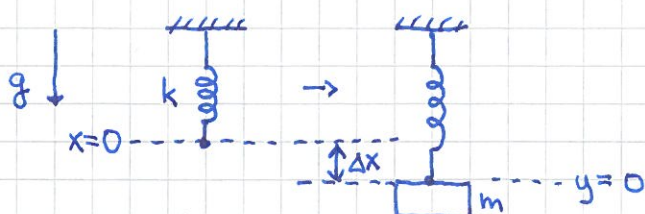
$$\Rightarrow \dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) = \omega A \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A \cos(\omega t + \varphi + \pi) = -\omega^2 x(t)$$

Anta f.eks. $\varphi = 0$ og $A > 0$:



Hvis vertikalt i tyngdefeltet (Øving 3 og Lab):



$\Rightarrow$ Harmonisk svingn. om $y=0$, med $\omega = \sqrt{k/m}$ som før.

Energi i harmonisk oscillator

(24)

[YF 14.3; TM 14.2; LL 9.4 & 9.8]

Massens kinetiske energi:

$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} m \underbrace{\omega^2}_{=k} A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

Potensiell energi i fjåra:

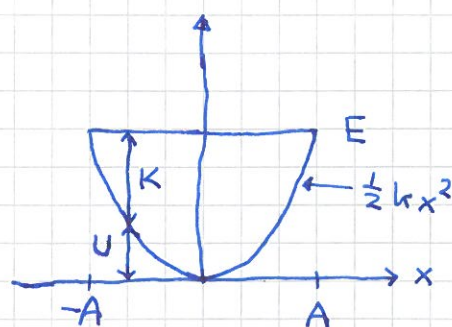
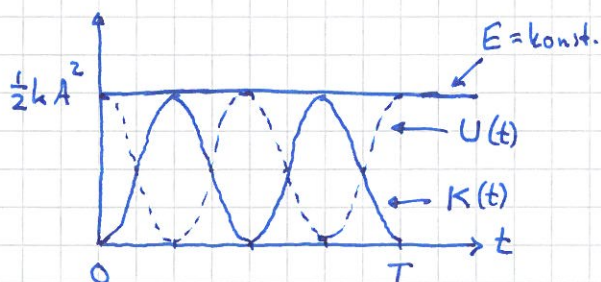
$$U = - \int_0^x F(x) \cdot dx = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} k x^2$$

$$\Rightarrow U(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Total energi: $E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \text{konstant}$

$\Rightarrow$ vi har konserverende system; E er bevart

Anta $\varphi = 0$:



Enkel harmonisk oscillator, oppsummering:

- F er proporsjonal med utsvinget fra likevekt
- U ————— " ————— kvadraket av utsvinget
- Bevegelsesligning: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
- "Utsving" kan være lengde, vinkel etc