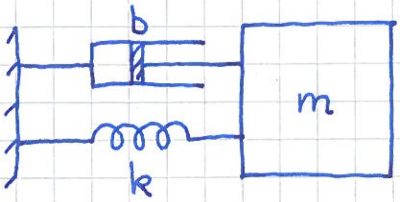
Fra sist:

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$; $\omega = \sqrt{k/m}$ } Enkel harmonisk oscillator
$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

Dempet svingning [YF 14.7 ; TM 14.4 ; LL 9.7 ; HS 6.2.1]

Friksjon $\Rightarrow$ fri svingninger dempes (og dør ut)

Antar $f = -b\dot{x}$ (som for langsom bevegelse i fluid; s. 14)



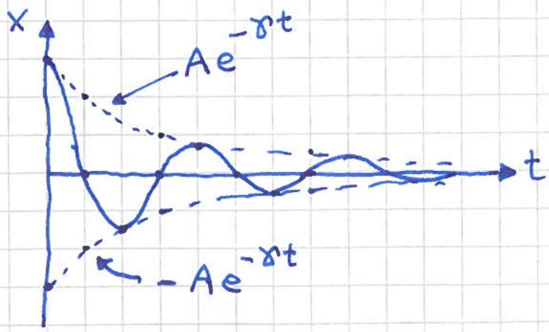
$$N2: \quad -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ ; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \ \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$[\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$$

Underkritisk demping, $\gamma < \omega_0$ (dvs $b < 2m\sqrt{k/m} = \sqrt{4k \cdot m}$)

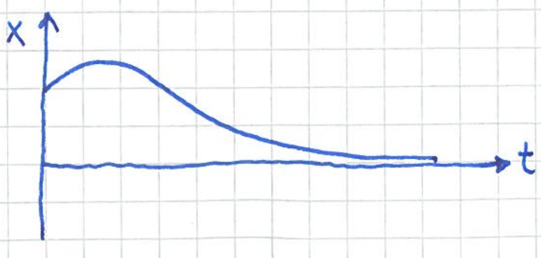
$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \ ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



- redusert frekvens pga demping ($\omega < \omega_0$)
- amplituden, $Ae^{-\gamma t}$, avtar eksponentielt med t
- A, φ fastlegges med 2 initialbetingelser

Overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$

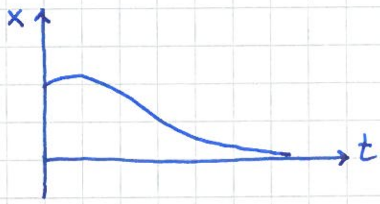
$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t} \ ; \quad \alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$



(dvs ingen svingninger)

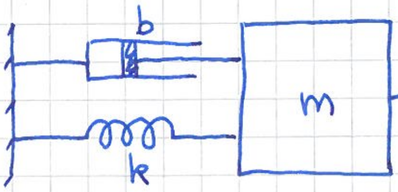
Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$



Eks: Støtdempere i bil dempes nær kritisk
$\Rightarrow$ mest behagelig på humpete vei

Tvungen svingning. Resonans [YF 14.8; TM 14.5; LL 9.9; HS 6.3]



$F_y(t) = F_0 \cos\omega t$ = ytre kraft, antas harmonisk

N2: $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos\omega t = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

[inhomogen 2. ordens diff. ligning]

Løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

der homogen løsn. x_h oppfyller $\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$

og partikulær løsn. x_p —"— $\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$

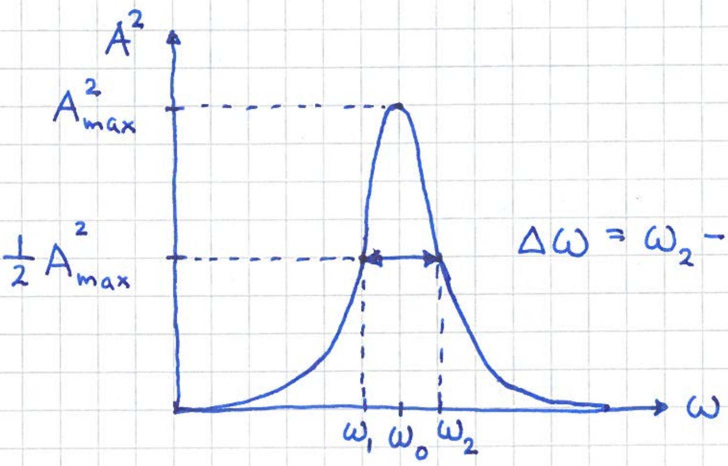
I starten (dvs: før $e^{-\gamma t}$ blir mye mindre enn 1) bidrar både x_h og x_p til et (som regel) komplekst <u>innsvingningsforløp</u> (jf Laboppg.).

Etter "lang tid", slik at $\gamma t \gg 1$ og $e^{-\gamma t} \approx 0$, vil $x_h(t) \to 0$, og $x(t) \approx x_p(t)$.

"Gjetter" $x_p(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi)$, verifiseres ved innsetting, og finner den <u>frekvensavhengige amplituden</u>

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\gamma = \frac{b}{m}$$

som viser at vi får <u>resonans</u>: Med svak demping (dvs liten γ) og ytre kraft med frekvens ω i nærheten av systemets <u>egenfrekvens</u> $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, så blir amplituden A <u>stor</u>:



$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ = halvverdibredden

$\Delta\omega$ refererer til oscillatorens energi, som er prop. med A^2 (se s. 24). Liten γ $\Rightarrow$ skarp resonans, med $\Delta\omega \approx 2\gamma$.

Resonanstoppens Q-faktor (Q for "quality"):

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \qquad (\gg 1 \text{ hvis } \gamma \ll \omega_0)$$

Frekvensavhengig fasekonstant:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right\}$$

Tilført effekt av $F_y(t) = F_0 \cos\omega t$ ved resonans, $\omega \approx \omega_0$:

$$P(t) = F_y(t) \cdot \dot{x}_p(t) = F_0 \cos\omega t \cdot \omega A(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \arctan 0 = 0, \quad \text{og} \quad A = A(\omega_0) = A_{max} = \frac{F_0}{b \cdot \omega_0}$$

$$\Rightarrow P(t) = \frac{F_0^2}{b} \cdot \cos^2 \omega_0 t \geq 0 \quad \text{hele tiden;}$$

dvs <u>maksimal</u> tilført effekt ved resonans!

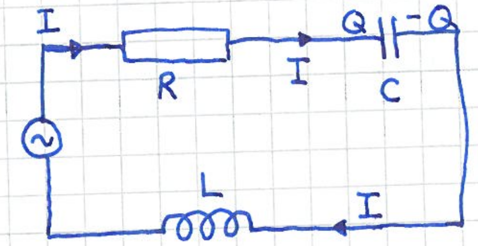
4104 12.09.1

4115 17.09.13

Elektrisk svingekrets

(Mer om dette mot slutten av kurset, men nevnes nå, da det kommer på laben.)

$V(t) = V_0 \cos \omega t$



$I = dQ/dt = \dot{Q}$

R : motstand

C : kondensator

L : spole

Spenning over motstand R : $V_R = R \cdot I = R \cdot \dot{Q}$ (Ohms lov)

—— " —— kapasitans C : $V_C = Q/C$

—— " —— induktans L : $V_L = L \cdot dI/dt = L \cdot \ddot{Q}$

Kirchhoffs spenningsregel $\Rightarrow$ $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C} Q = V_0 \cos \omega t$

Dvs nøyaktig samme diff.lign. for Q, ladningen på kondensatoren, som for x, massens utsving fra likevekt, i det mekaniske svingesystemet : $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$

Vi har dermed analoge ("tilsvarende") størrelser :

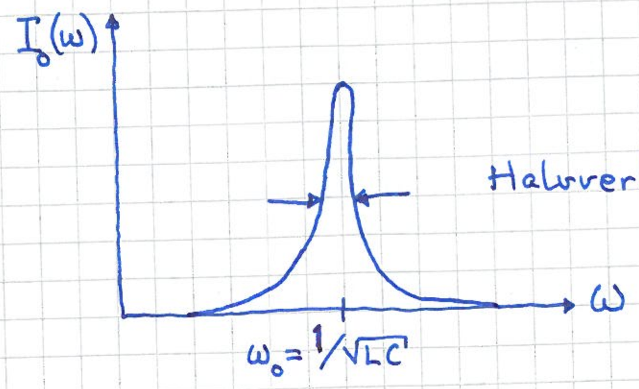
$m \leftrightarrow L$, $b \leftrightarrow R$, $k \leftrightarrow 1/C$, $x \leftrightarrow Q$, $\dot{x} \leftrightarrow I$

$\omega_0^{mek} = \sqrt{k/m} \longleftrightarrow \omega_0^{el} = \sqrt{1/LC}$ osv.

$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow I(t) = \dot{Q}(t) = \omega Q_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi)$

med $Q_0(\omega) = (V_0/L) / \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$; $2\gamma = R/L$

Resonans, dvs stor strømamplitude $I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$, når $\omega \approx \frac{1}{\sqrt{LC}}$:



Halvverdibredde $\Delta\omega \approx 2\gamma = R/L$

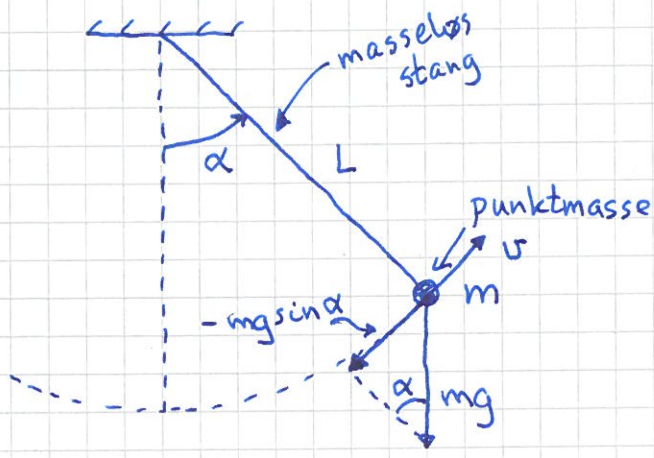
Eks (LAB): $L = 22\ \text{mH}$, $C = 0.15\ \mu\text{F}$, $R = 20\ \Omega$

$\Rightarrow f_0 = 2.77\ \text{kHz}$, $\Delta f \approx 0.29\ \text{kHz}$, $Q = f_0/\Delta f \approx 10$

Eksempel, inkl. numerisk løsningsmetode

(Øving 4, oppgave 1)

Matematisk pendel (se s. 21, samt øving 2, oppg. 4):



N2 ∥ sirkelbuen:

$$-mg\sin\alpha = m a_{\parallel}$$

$$a_{\parallel} = L\ddot{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0$$

Hvis små utsving, $|\alpha| \ll 1$: $\sin\alpha \approx \alpha$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\alpha = 0 \\ &\Rightarrow \quad \alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}\right\}$$

Enkel harmonisk oscillator med $\omega = \sqrt{g/L}$, dvs $T = 2\pi\sqrt{L/g}$

Hvis større utsving: $\ddot{\alpha} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0$ kan ikke løses analytisk; numerisk løsningsmetode er nødvendig.

Enkleste metode er såkalt "forward Euler":

Vi har (pr def.)

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{\dot{\alpha}(t+dt) - \dot{\alpha}(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \dot{\alpha}(t+dt) = \dot{\alpha}(t) + \ddot{\alpha}(t)\,dt$$

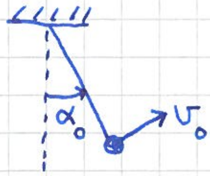
$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\alpha(t+dt) - \alpha(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \alpha(t+dt) = \alpha(t) + \dot{\alpha}(t)\,dt$$

La $dt \rightarrow$ endelig tidssteg Δt og "$= \;\rightarrow\; \approx$":

$$\alpha(t+\Delta t) \approx \alpha(t) + \dot{\alpha}(t)\,\Delta t$$

$$\dot{\alpha}(t+\Delta t) \approx \dot{\alpha}(t) + \ddot{\alpha}(t)\,\Delta t \overset{\text{her}}{=} \dot{\alpha}(t) - \Delta t \cdot \frac{g}{L} \cdot \sin\alpha(t)$$

Dermed, med initialbetingelser $\alpha(0)=\alpha_0$ og $v(0)=v_0$, dvs $\dot\alpha(0) = v_0/L$:



$\boxed{t=0}$

$$\alpha(\Delta t) \approx \alpha(0) + \dot\alpha(0)\,\Delta t = \alpha_0 + \frac{v_0}{L}\,\Delta t$$

$$\dot\alpha(\Delta t) \approx \dot\alpha(0) + \ddot\alpha(0)\,\Delta t = \frac{v_0}{L} - \Delta t \cdot \frac{g}{L} \cdot \sin\alpha_0$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha[(n+1)\cdot\Delta t] &\approx \alpha[n\cdot\Delta t] + \dot\alpha[n\cdot\Delta t]\cdot\Delta t \\ \dot\alpha[(n+1)\cdot\Delta t] &\approx \dot\alpha[n\cdot\Delta t] + \ddot\alpha[n\cdot\Delta t]\cdot\Delta t \end{aligned}\right\} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Kan nå blant annet:

- plotte $\alpha(t)$, $\dot\alpha(t)$ etc.
- regne ut $K(t)$, $U(t)$ og $E(t)$ og sjekke energibevarelse (se s. 21)
- sammenligne numerisk løsning med harm. osc. - tilnærmelsen
- inkludere friksjon, med $f = -bv$ evt $f = -Dv^2$ (se s. 14)
- inkludere ytre kraft $F_y(t)$

etc. etc.

Andre (og bedre) num. metoder for løsn. av ordinære diff. lign:

- Verlet
- Runge-Kutta

Verlet:

$$\dot\alpha(t) = \frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

$$\ddot\alpha(t) = \frac{\dot\alpha(t+\Delta t/2) - \dot\alpha(t-\Delta t/2)}{\Delta t}$$

$$= \frac{\dfrac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} - \dfrac{\alpha(t) - \alpha(t-\Delta t)}{\Delta t}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\alpha(t+\Delta t) - 2\alpha(t) + \alpha(t-\Delta t)}{\Delta t^2}$$

Impuls og impulsbevarelse [YF 8; TM 8; LL 5; HS 3.6, 3.7]

[Terminologi: impuls ≡ bevegelsesmengde]

[Engelsk: (linear) momentum]

N2 for legeme med (konstant) masse m:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

impuls = masse · hastighet

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \qquad [p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

Dermed: $\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ N2

som gir

Lov om impulsbevarelse:

> Hvis sum av ytre krefter på et legeme er null, er legemets impuls bevart: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$

Kollisjoner [YF 8.3+8.4; TM 8.3; LL 5.3; HS 3.7.1]

= (som regel kortvarige) støt mellom legemer

Elastisk støt: $\Delta K = 0$ (energien er bevart)

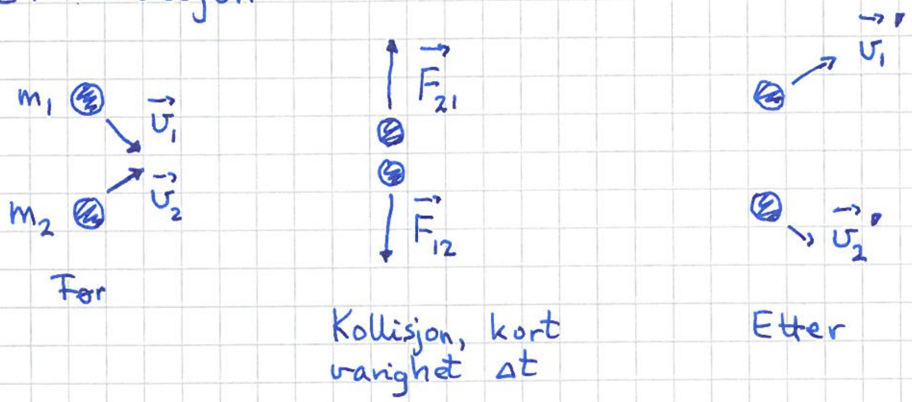
Uelastisk støt: $\Delta K < 0$ (—"— ikke bevart)

<u>Fullstendig</u> uelastisk støt: Legemene henger sammen og har <u>felles hastighet</u> etter kollisjonen. (Gir <u>maksimalt</u> energitap $|\Delta K|$.)

Tapt mekanisk energi ΔK → deformasjon, varme, lyd, ...

<u>Men</u>: Dersom $\vec{F}_{ytre} = 0$ (evt. neglisjerbar) under kollisjonen, er $\underline{\Delta\vec{p} = 0}$ for <u>alle typer</u> kollisjoner.

Har typisk <u>store</u> men <u>ukjente</u> indre krefter i en kollisjon:



N3 garanterer impulsbevarelse for systemet $m_1 + m_2$:

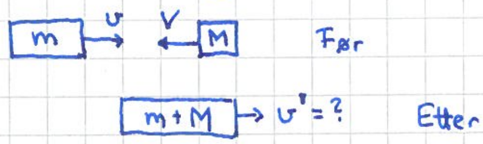
$$\vec{F}_{21} \overset{N3}{=} -\vec{F}_{12}$$

$$\overset{N2}{\Rightarrow} \quad \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \vec{P}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Eks: Fullstendig uelastisk støt.



Løsn: $P_{før} = mv - MV$

$= P_{etter} = (m+M)\,v'$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{v' = \frac{mv - MV}{m+M}}}$$

Eks: $\langle F \rangle$ på bordtennisball = ? $\quad \langle F \rangle / mg$ = ?

Løsning: $m = 2.7\,g$, $\quad v_i \sim 10$ m/s, $\quad v_f \sim 30$ m/s, $\quad \Delta t \sim 1$ ms

$$\Rightarrow \langle F \rangle \approx \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = \frac{2{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 40\ \text{m/s}}{10^{-3}\ \text{s}} = \underline{\underline{108\ N}}$$

$$\langle F \rangle / mg \approx \frac{\Delta v}{g\,\Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} \approx \frac{40 \cdot 10^{3}\ \text{m/s}^2}{10\ \text{m/s}^2} = \underline{\underline{4000}}$$

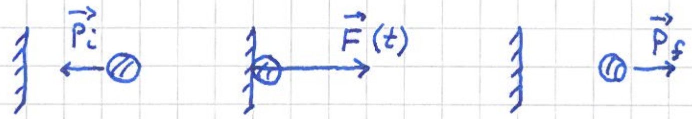
Dvs: Helt OK å neglisjere ytre kraft mg i støtet

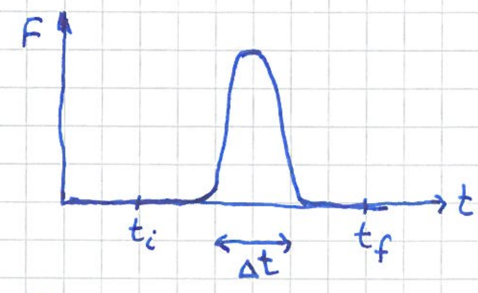
Kraftstøt [YF 8.1; TM 8.3; LL 5.2; HS 3.7.1]

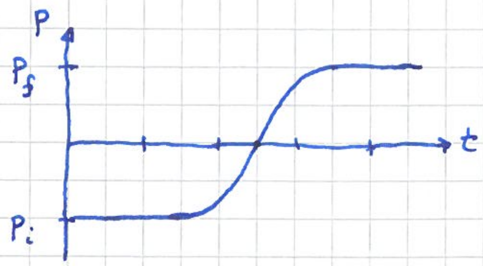
(Eng: impulse) ("kraftimpuls")

= impulsendring i støt

Ball mot vegg:







Ballens impulsendring i kollisjonen:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt = \text{kraftstøtet (\underline{fra} veggen \underline{på} ballen)}$$

[Hva blir veggens impulsendring i denne kollisjonen?]