Sentralt støt [YF 8.2–8.4; TM 8.3; LL 5.3; HS 3.7.1]

Før: $\underset{m}{\bullet} \longrightarrow v \qquad V \longleftarrow \underset{M}{\bullet}$ (i)

$(- \longleftrightarrow +)$

Etter: $v' \longleftarrow \underset{m}{\bullet} \quad \underset{M}{\bullet} \longrightarrow V'$ (f)

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mv + MV}_{p_i} = \underbrace{mv' + MV'}_{p_f}$$ (alle typer støt)

(a) Elastisk støt, $\Delta K = 0$:

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2}_{K_i} = \underbrace{\tfrac{1}{2}mv'^2 + \tfrac{1}{2}MV'^2}_{K_f}$$

Omskriving:

$$m(v+v')(v-v') = M(V'+V)(V'-V) \quad (1) \quad (\Delta K = 0)$$

$$m(v-v') = M(V'-V) \quad (2) \quad (\Delta p = 0)$$

Triks: Ta (1)/(2)

$$\Rightarrow \quad v + v' = V + V'$$

dvs $v' - V' = -(v - V)$ (3) (relativhastigheten skifter fortegn)

Finner v' og V' fra (2) og (3):

$$v' = \frac{M}{m+M}\left\{2V + v\cdot\frac{m-M}{M}\right\}$$

$$V' = \frac{m}{M+m}\left\{2v + V\cdot\frac{M-m}{m}\right\}$$

(merk ombytte $m \to M$, $v \to V$ etc. når $v' \to V'$)

(b) Fullstendig uelastisk støt:

$$v' = V' = \frac{mv + MV}{m+M}$$ (fra $\Delta p = 0$)

(c) Delvis uelastisk støt: Har kun 1 ligning ($\Delta p = 0$) for 2 ukjente (v', V'). Trenger en ekstra opplysning for å bestemme både v' og V'.

Eks: Elastisk kollisjon med vegg

Før: $m \longrightarrow$ | $V=0$, $M \gg m$ $(M \to \infty)$

Etter: $v' = ?$ $\longleftarrow m$ | $V' = ?$

Sjekk: Er $\Delta p = 0$? Er $\Delta K = 0$?

Løsning:

$$v' = \frac{M}{m+M}\left\{0 + v \cdot \frac{m-M}{M}\right\} \approx \frac{M}{M} \cdot v \cdot \left(\frac{-M}{M}\right) = \underline{\underline{-v}} \qquad \text{(som ventet)}$$

$$V' = \frac{m}{M+m}\left\{2v + 0\right\} \approx \frac{m}{M} \cdot 2v \approx \underline{\underline{0}} \qquad (\text{ -- " -- })$$

Er $\Delta p = 0$?

$$p' = mv' = -mv, \qquad P' = MV' \approx M \cdot \frac{m}{M} \cdot 2v = 2mv$$

$$p = mv, \qquad P = MV = 0$$

$$\Rightarrow \quad p' + P' = p + P = mv \qquad \text{ok!}$$

Er $\Delta K = 0$?

$$K'_m = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m v^2, \qquad K'_M = \frac{1}{2} M V'^2 \approx \frac{1}{2} M \cdot \left(\frac{m}{M} \cdot 2v\right)^2$$

$$= 2 \cdot \frac{m^2}{M} \cdot v^2 \approx 0$$

$$K_m = \frac{1}{2} m v^2, \qquad K_M = \frac{1}{2} M V^2 = 0$$

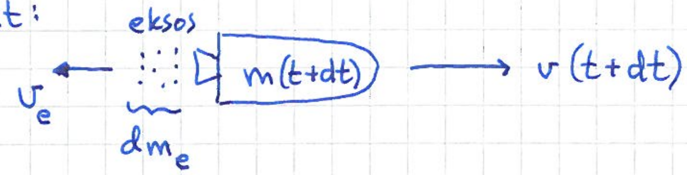
$$\Rightarrow \quad K'_m + K'_M = K_m + K_M = \frac{1}{2} m v^2 \qquad \text{ok!}$$

Rakettprinsipp [YF 8.6; TM 8.5; LL 5.4; HS 3.7.2]

Ved tid t:

$$p(t) = m(t)\,v(t)$$

Ved tid $t+dt$:



$$p(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)+dm} \cdot \underbrace{v(t+dt)}_{v(t)+dv} + \underbrace{dm_e}_{-dm} \cdot \underbrace{v_e(t)}_{v(t)+u}$$

der u = eksosens hastighet relativt raketten

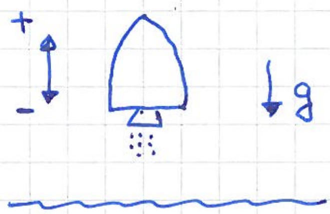
$$= \underbrace{m(t)v(t)}_{=p(t)} + m(t)\,dv + \underbrace{dm \cdot v(t) - dm \cdot v(t)}_{=0} - u\,dm$$

"Outer space": $F_{ytre} = 0 \overset{N2}{\Rightarrow} p(t+dt) = p(t) \Rightarrow m(t)\,dv = u\,dm$

$$\Rightarrow m(t) \cdot \frac{dv}{dt} = u \cdot \frac{dm}{dt} = u\dot{m} \qquad (u<0,\ \dot{m}<0)$$

$$\Rightarrow \text{Skyvkraft}: \quad F_{skyv} = u\dot{m} > 0$$

I tyngdefeltet: $F_{ytre} = -m(t)g$



$\Rightarrow$ Totalkraft på (rest-)raketten:

$$F_{skyv} + F_{ytre}$$

$$\overset{N2}{\Rightarrow} \quad u\dot{m} - mg = ma$$

Øving 5: Saturn V, trinn 1. [TM Ex. 8.19; litt andre tall]

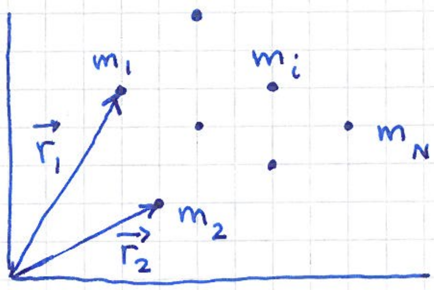
[HS 3.7.2; — " —]

Så langt i kurset: Punktmasser (eller: form og størrelse på legemet uten praktisk betydning)

Nå: Partikkelsystemer; for det meste stive legemer.
Rotasjonsdynamikk blir et aktuelt tema!

Men aller først:

Massesenter, tyngdepunkt [YF 8.5; TM 5.5; LL 5.6+5.8; HS 3.5]



System med N partikler, masser $m_1, m_2, \dots, m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

Massesenteret (CM = center of mass):

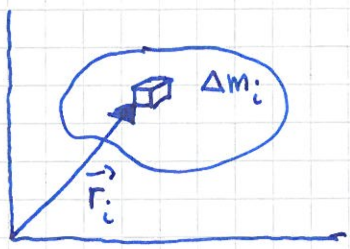
$$\vec{R}_{CM} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$$

Total masse: $M = \sum_i m_i$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i}$$

(Med konstant g over hele systemet er tyngdepunktet samme sted som massesenteret.)

Med kontinuerlig massefordeling: [YF oppg 8.115 + 8.116; TM 5.5; LL 6.1; HS 3.5]



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} \frac{\int dm \cdot \vec{r}}{\int dm}$$

$M = \int dm$ = total masse

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm}$$

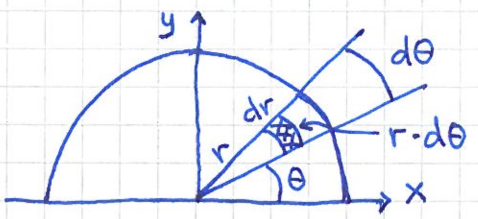
Her går integralet "over legemet" (der massen er!)

Masseelementet:

$$dm = \begin{cases} \rho \cdot dV \,; & \rho = \text{masse pr volumenhet}\,; \; dV = \text{volumelement} \quad (3D) \\ \sigma \cdot dA \,; & \sigma = \text{—"— flate —"—}\,; \; dA = \text{flate —"—} \quad (2D) \\ \lambda \cdot d\ell \,; & \lambda = \text{—"— lengde —"—}\,; \; d\ell = \text{linje —"—} \quad (1D) \end{cases}$$

Et hensiktsmessig <u>koordinatsystem</u> velges ut fra legemets form og eventuell symmetri.

Eks: Halvsirkulær tynn skive, radius R, masse σ pr flateenhet



$$dm = \sigma \cdot dA = \sigma \cdot r\,d\theta \cdot dr$$

$$M = \sigma \cdot \tfrac{1}{2}\pi R^2$$

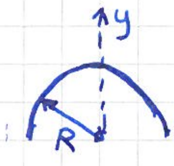
$$\vec{r} = \hat{x}\,x + \hat{y}\,y = \hat{x}\,r\cos\theta + \hat{y}\,r\sin\theta$$

<u>Ser</u> at $X_{CM} = 0 \Rightarrow \vec{R}_{CM} = Y_{CM}\,\hat{y}$

med $Y_{CM} = \dfrac{1}{M}\displaystyle\int y \cdot dm = \dfrac{2}{\sigma \pi R^2} \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} r\sin\theta \cdot \sigma \cdot r\,d\theta \cdot dr$

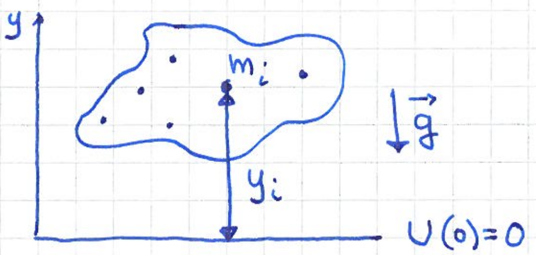
$$= \frac{2}{\pi R^2} \underbrace{\left(\int_0^R r^2\,dr\right)}_{=\frac{1}{3}R^3} \cdot \underbrace{\left(\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta\right)}_{=\left.(-\cos\theta)\right|_0^\pi = 1+1=2} = \underline{\underline{\frac{4}{3\pi}R \approx 0.42\,R}}$$

Oppg, 1D: Vis at $Y_{CM} = \dfrac{2}{\pi}R$ for halvsirkel



Oppg, 3D: Vis at $Y_{CM} = \dfrac{3}{8}R$ for halvkule

Potensiell energi for partikkelsystem i tyngdefeltet



$$U = \sum_i U_i = \sum_i m_i g\, y_i \underset{g=\text{konst.}}{\overset{\text{anta}}{=}} g \sum_i m_i y_i = \underline{g M Y_{CM}}$$

Dvs: Som om hele massen $M = \sum_i m_i$ var samlet i høyden $Y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i$, og da f.eks. i massesenteret $\vec{R}_{CM}$.

Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5; TM 5.5; LL 5.8; HS 3.5]

Ser på system med N masser, $m_1, m_2, \cdots, m_N$.

N2 for m_i: $m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ $\quad (i = 1, 2, \cdots, N)$

der $\vec{F}_{i,ytre}$ = ytre kraft på m_i

$\vec{F}_{ji}$ = ("indre") kraft fra m_j på m_i

$\Rightarrow \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$ = total indre kraft på m_i

Ta $\sum_i$ av ligningen ovenfor: $\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_{i,ytre} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2}\left(M \cdot \vec{R}_{CM}\right) = M \cdot \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre}$ = netto ytre kraft på systemet

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \underbrace{\vec{F}_{31} + \vec{F}_{13}}_{=0} + \cdots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0 \quad \text{(pga N3)}$$

Dermed: $\boxed{M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$

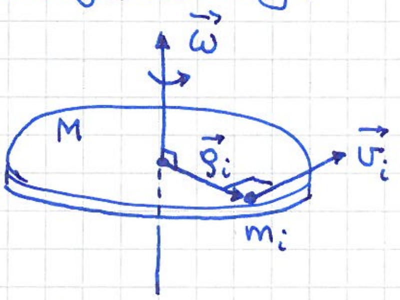
Dvs: $\vec{R}_{CM}$ beveger seg som om hele M var samlet i $\vec{R}_{CM}$ og ble utsatt for summen av alle ytre krefter som virker på systemet. I tillegg kommer <u>rotasjon om CM</u>.
[+ evt. vibrasjoner, som ikke er tema her]

Rotasjon

[YF 9+10; TM 9+10; LL 5.5+5.9+6; HS 4+5]

Først: Rask gjennomgang av ren rotasjon om fast akse.
Dernest: Grundigere og mer generell gjennomgang.

Rotasjonsenergi



$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\rho_i \omega)^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2$$

s.8: $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$; $v_i = \rho_i \omega$

Treghetsmoment

$I \overset{\text{def}}{=} \sum_i m_i \rho_i^2$ = legemets treghetsmoment (om gitt akse)

Dermed:

$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ [Translasjonsanalogi: $K_{trans} = \frac{1}{2} M V^2$]

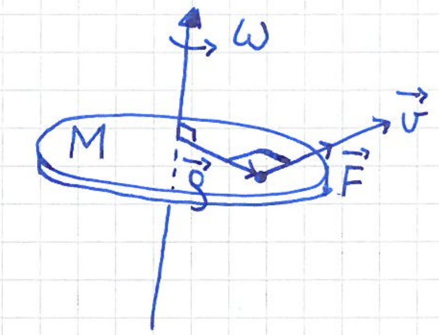
Hvis kontinuerlig massefordeling:

$m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} dm$, og $\sum_i \rightarrow \int\limits_{\text{(over legemet)}}$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int \rho^2 \, dm}$$

(der ρ = avstand fra rot.aksen til masseelementet dm)

Dreiemoment (evt: Kraftmoment; eng: Torque)



antar her $\vec{F} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{\rho}$

$\tau \overset{def}{=} F \cdot \rho$ = F's dreiemoment om rot.aksen

N2 for rotasjon om fast akse

Ser på tilført effekt:

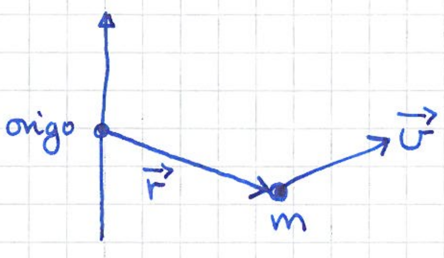
$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v = F \cdot \rho \cdot \omega = \tau \cdot \omega$$

Dessuten:

$$P = \frac{dK_{rot}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right) \underset{I = \text{konst.}}{\overset{\text{anta}}{=}} I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I \dot{\omega}} \qquad [\text{Transl. analogi: } F = M\dot{V} \quad (\text{N2})]$$

Dreieimpuls (evt: spinn)



$\vec{L} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$

= m's dreieimpuls (relativt origo)

Dreiemoment som vektor

$\vec{\tau} \overset{def}{=} \vec{r} \times \vec{F}$ = $\vec{F}$'s dreiemoment (relativt origo)

Dreieimpulsbevarelse

Hva gir <u>endring</u> i $\vec{L}$? La oss se på $\dot{\vec{L}}$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{v}) = m\left\{\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}}_{=\vec{v}\times\vec{v}=0} + \underbrace{\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\vec{r}\times\vec{F}/m \ (N2!)}\right\} = \vec{\tau}$$

N2 for rotasjon, inkl. bevaring av $\vec{L}$:

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \ ; \quad \text{dvs } \vec{L} = \text{konst. hvis } \vec{\tau} = 0}$$

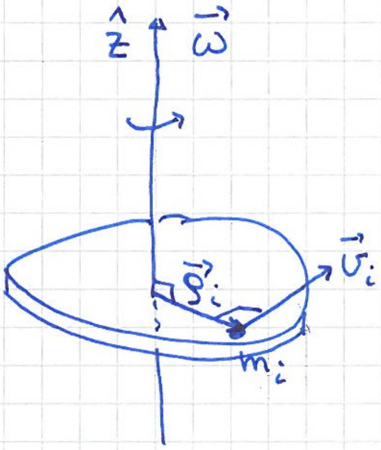
[Transl.analogi: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$; dvs $\vec{p}$ = konst. hvis $\vec{F} = 0$]

$$\boxed{\text{For isolert system: } E,\ \vec{p} \text{ og } \vec{L} \text{ er bevart.}}$$

Hva er $\vec{L}$ for ren rotasjon om fast akse?

Svar: $\vec{L} = I\vec{\omega}$.

Bevis:



$$\vec{L} = \sum_i \vec{\rho}_i \times m_i\vec{v}_i$$

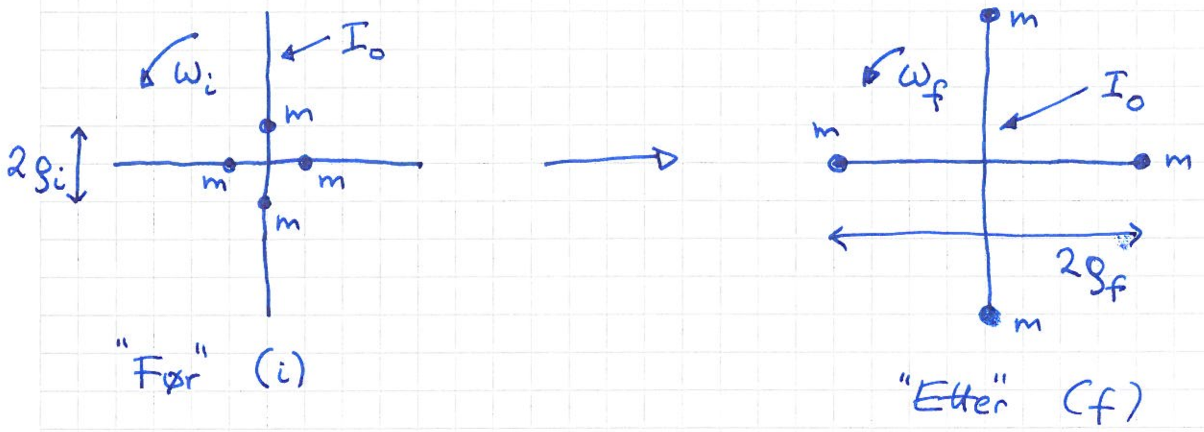
$$\vec{\rho}_i \times \vec{v}_i = \rho_i v_i \hat{z} = \rho_i^2 \omega \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \underbrace{\left(\sum_i m_i \rho_i^2\right)}_{=I} \cdot \underbrace{\omega\hat{z}}_{=\vec{\omega}}$$

$$= I\vec{\omega} \qquad \text{qed}$$

[Translasjonsanalogi: $\vec{p} = M\vec{V}$]

Relevans for LAB-oppg. om rotasjon:



$I_i = I_0 + 4m\rho_i^2$ $\qquad\qquad$ $I_f = I_0 + 4m\rho_f^2 > I_i$

Intet ytre dreiemoment fra (i) til (f)

$\Rightarrow \quad L_i = L_f$ $\qquad$ (dreieimpulsbevarelse!)

$\Rightarrow \quad I_i\omega_i = I_f\omega_f \quad \Rightarrow \quad \omega_f = \omega_i \cdot \frac{I_i}{I_f} < \omega_i$

Hva med energibevarelse?

$K_i = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$

$K_f = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2} I_f \cdot \left(\omega_i \frac{I_i}{I_f}\right)^2 = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 \cdot \frac{I_i}{I_f}$

$\quad = K_i \cdot \frac{I_i}{I_f} < K_i$

Hmm...!? Hvor ble det av $|\Delta K| = |K_f - K_i|$?