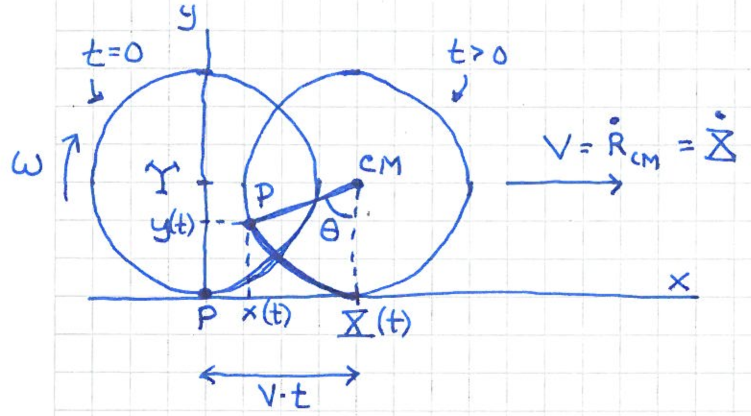
Rulling [YF 10.3 ; TM 9.6 ; LL 6.7 ; HS 4.5.3 og 5.4.3]

Ren rulling:



Sammenhenger:

$\theta = \omega t$ (hvis ω=konst.)

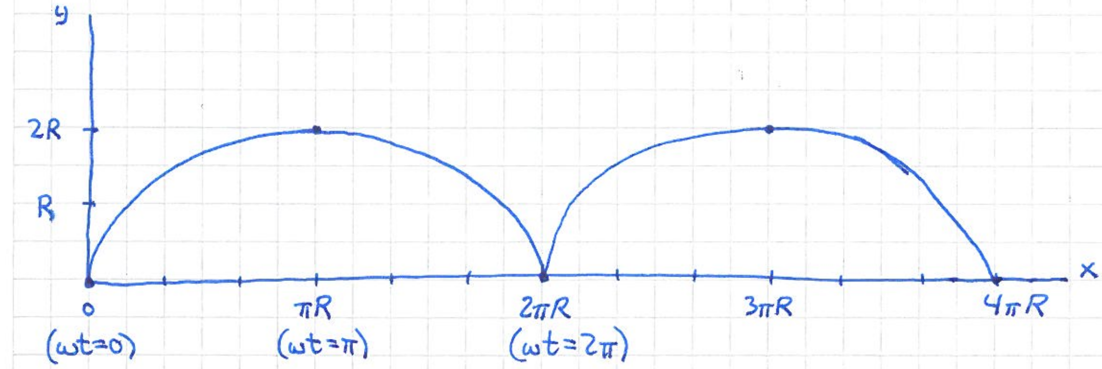
$$\begin{cases} X = Vt = R\theta \; (= R\omega t) \\ V = \dot{X} = R\omega \quad \left(\text{hvis } \omega = \text{konst.}\right) \\ A = \ddot{X} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\alpha \end{cases}$$

→ rullebetingelser

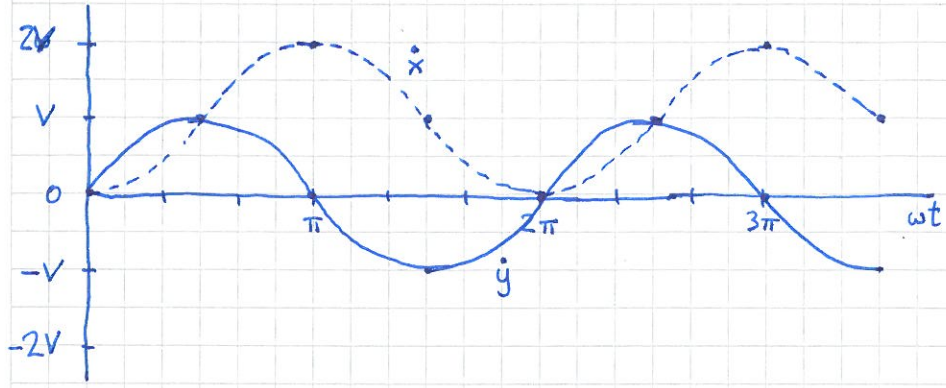
Ser fra fig. at banen til P (= punkt på periferien) blir en sykloide:

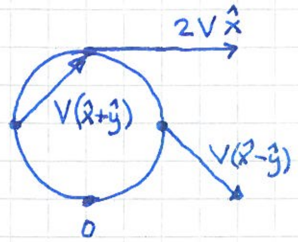
$x(t) = X(t) - R\sin\theta = Vt - R\sin\omega t$; $\quad y(t) = R - R\cos\theta = R - R\cos\omega t$

[der vi nå antar ω = konst.]



P's hastighet: $\dot{x} = V - \omega R\cos\omega t = V(1-\cos\omega t)$
$\quad\quad\quad\quad\;\; \dot{y} = \omega R\sin\omega t = V\sin\omega t$
$\Rightarrow \vec{v}(\theta) = \hat{x}\,V(1-\cos\theta) + \hat{y}\,V\sin\theta$





⇒ Ingen relativ bevegelse i kontaktpunktet ved ren rulling.

Kin. energi ved ren rulling:

$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 \qquad (s.46)$$

$I_0 = c \cdot MR^2$ (med $c=1$ for ring, $\frac{2}{5}$ for massiv kule osv)

$\omega = V/R$ (rullebetingelse)

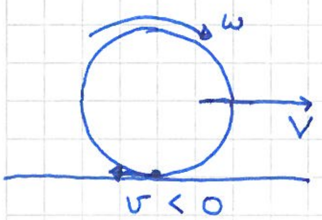
$$\Rightarrow \quad K = (1+c)\cdot\frac{1}{2}MV^2$$

Sluring

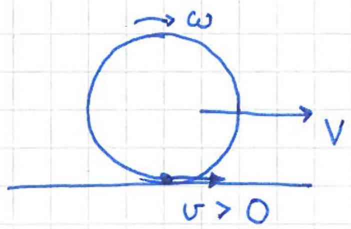
$\omega \neq V/R \Rightarrow$ kontaktpunktet får hastighet $v = V - \omega R \neq 0$ relativt underlaget

$\Rightarrow$ legemet roterer og glir samtidig

Hvis $\omega > V/R$:



Hvis $\omega < V/R$:



Friksjonens rolle

Hvis sluring: Friksjonskraft $f = \mu_k N$ rettet mot $\vec{v}$.

Effekttap: $P_f = \vec{f}\cdot\vec{v} < 0$

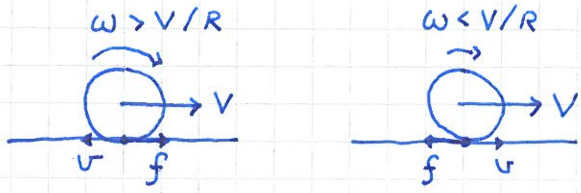
($\Rightarrow$ redusert mekanisk energi)

Hvis ren rulling: $P_f = \vec{f}\cdot\vec{v} = 0$

Null effekttap

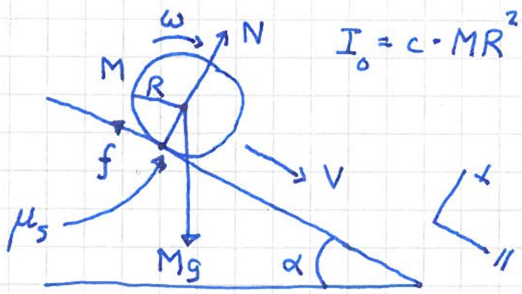
Statisk friksjon: $f \leq \mu_s \cdot N$

Sluring:



Ren rulling: Retningen på den statiske friksjonskraften bestemmes ved å besvare spørsmålet "Hva ville kontaktpunktets relativhastighet $\vec{v}$ ha vært hvis det ikke var friksjon?"

Eks: Rulling på skråplan



$I_0 = c \cdot MR^2$

- $\dot{V} = ?$
- $\mu_s^{min} = ?$

for ren rulling

- ren rulling $\Rightarrow$ $\omega = V/R$, med klokka
- V og ω øker $\Rightarrow$ dreiemoment τ om CM i fråd med dette $\Rightarrow$ friksjonskraft f oppover

N2: $\sum F_{\parallel} = M\dot{V}$, $\sum \tau = I_0 \dot{\omega}$, $\sum F_{\perp} = 0$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$Mg \sin\alpha - f = M\dot{V} \qquad f \cdot R = I_0 \dot{\omega} \qquad N = Mg\cos\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$f = \left(cMR^2 \cdot \frac{\dot{V}}{R}\right)/R = cM\dot{V}$$

$$\Downarrow$$

$$Mg\sin\alpha - cM\dot{V} = M\dot{V}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\underline{\dot{V} = g\,\frac{\sin\alpha}{1+c}}}$$

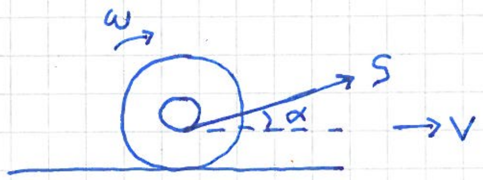
$$f \leq f_{max} = \mu_s \cdot N$$

$$\Rightarrow \quad c M g \frac{\sin\alpha}{1+c} \leq \mu_s M g \cos\alpha$$

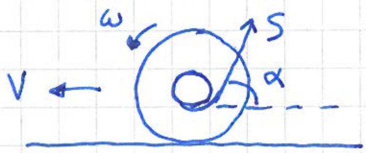
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu_s^{min} = \frac{c}{1+c} \tan\alpha}} \qquad \text{(for å ha ren rulling)}$$

	c	$\dot{v}$	μ_s^{min}
Ring og hul sylinder	1	$\frac{1}{2} g \sin\alpha$	$\frac{1}{2} \tan\alpha$
Skive og kompakt sylinder	$1/2$	$\frac{2}{3} g \sin\alpha$	$\frac{1}{3} \tan\alpha$
Kompakt ball	$2/5$	$\frac{5}{7} g \sin\alpha$	$\frac{2}{7} \tan\alpha$

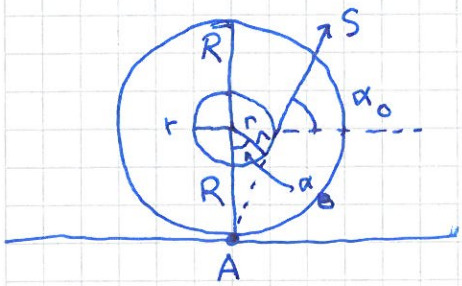
Eks: Snelle



liten $\alpha \Rightarrow$ ruller mot høyre



stor $\alpha \Rightarrow$ mot venstre



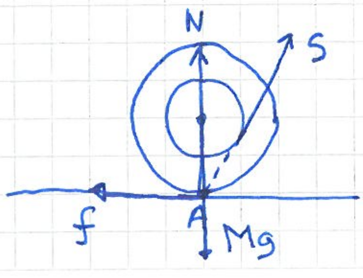
snelle i ro

når $\alpha = \alpha_0$ gitt ved

$\underline{\underline{\cos\alpha_0 = r/R}}$ (ses fra figur!)

Da går alle krefter gjennom kontaktpunktet A (f, N, mg og S)

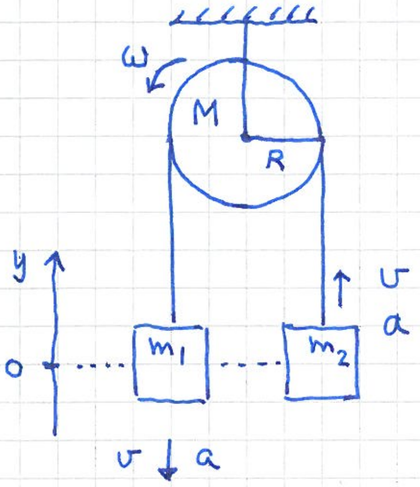
$$\Rightarrow \sum \tau_A = 0$$



Eks: Atwoods maskin

Løses på øving med N2 trans. + rot. (evt kun N2 rot.)

Løses her med energibevarelse



- $m_1 > m_2$
- snora glir ikke på skiva $\Rightarrow \omega R = v$
- $I_0 = \frac{1}{2} M R^2$ = skivas tregh.mom.
- Anta $U(y=0) = 0$; lodd i ro ved start
- Bestem loddenes akselerasjon a

Løsning:

Total energi, $E = U_i + K_i = 0$ ("initial")

E er bevart

$\Rightarrow \quad U_f + K_f = 0$ ("final")

$$\Rightarrow \quad m_2 g y - m_1 g y + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \underbrace{\frac{1}{2} I_0 \omega^2}_{= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \cdot \left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{1}{4} M v^2} = 0$$

(der $y > 0$ er posisjon til m_2)

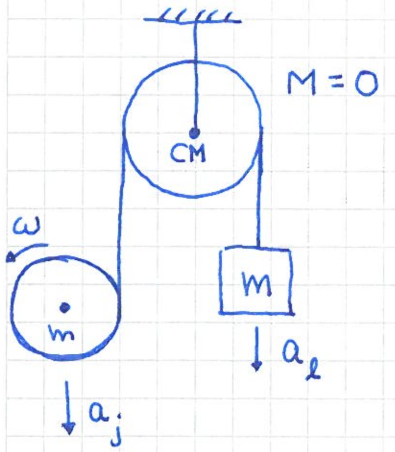
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} v^2 = y \cdot \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + M/2}$$

Tar $\frac{d}{dt}$ på begge sider:

$$\frac{1}{2} \cdot 2 v \cdot \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{= a} = \underbrace{\frac{dy}{dt}}_{= v} \cdot \frac{g(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + M/2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = g \cdot \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + M/2}}$$

Eks: Atwood med ideell trinse og lodd + jojo, $m_1 = m_2 = m$.



Er $a_j = a_\ell$?

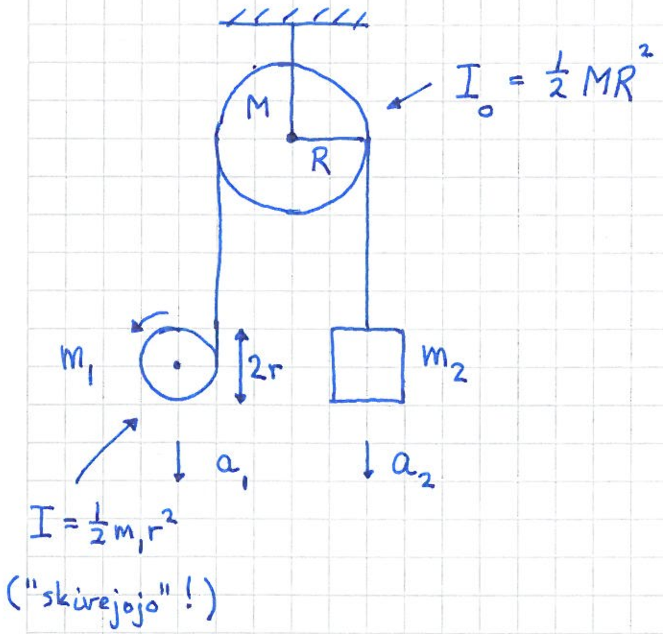
Ja:

Må ha likt snordrag på begge sider. Ellers ville trinsa ha vært utsatt for et netto dreiemoment mhp CM. Men med M = 0 ville trinsa da ha fått uendelig vinkelakselerasjon, umulig!

Med likt snordrag og lik tyngde på begge sider blir akselerasjonen den samme:

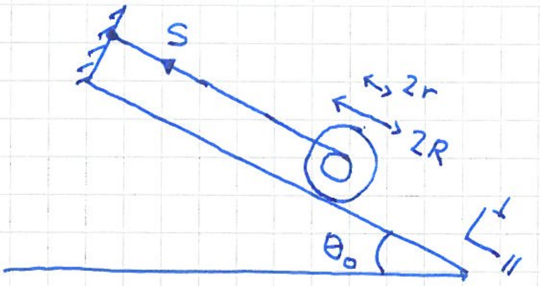
$m \cdot a_j = mg - S$; $m \cdot a_\ell = mg - S$ $\Rightarrow a_j = a_\ell = g - S/m$

Utfordring: Atwood med lodd + jojo (generelt)



Bestem a_1 og a_2!

Eks: Sluresnelle (demo + øving)



θ_0 = max vinkel før snella glir (slurer) nedover skråplanet

Bestem θ_0. Hva er snordraget S da?

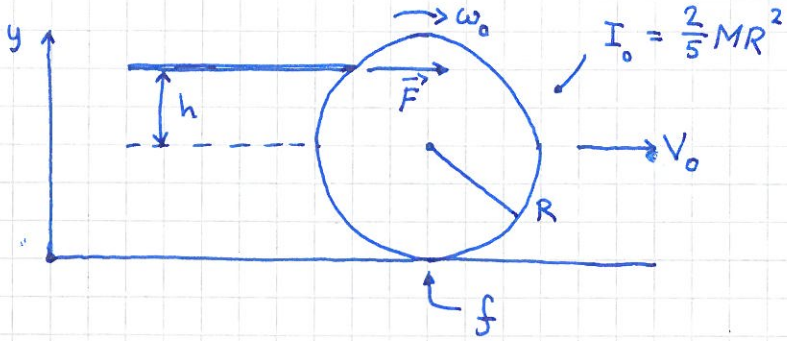
Tips: Bruk $\sum F_{\parallel} = 0$ samt $\sum \tau = 0$ (med snellas CM som ref.punkt)

Ved $\theta = \theta_0$ er $f = f_{max} = \mu_s \cdot N$

Ekstraoppg: Bestem snellas akselerasjon når $\theta > \theta_0$.

Tips: $\sum F_{\parallel} = M \cdot a$, $\sum \tau = I \dot{\omega}$, $v = \omega r$ (siden det vikles av snorlengde $2\pi r$ på tiden $T = 2\pi/\omega$, dvs $v = 2\pi r/T = \omega r$)

Eks: Snooker (øving)



Kortvarig støt, $\Delta t \gtrsim 0$:

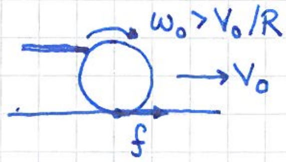
$F \cdot \Delta t = \Delta p = MV_0$

$\tau \cdot \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$

$\tau = F \cdot h$

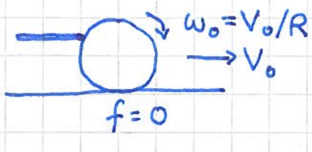
$F \gg f$

Hvis $h > h_0$:



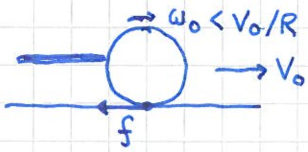
(sluring)

Hvis $h = h_0$:



(ren rulling) ($h_0 = ?$)

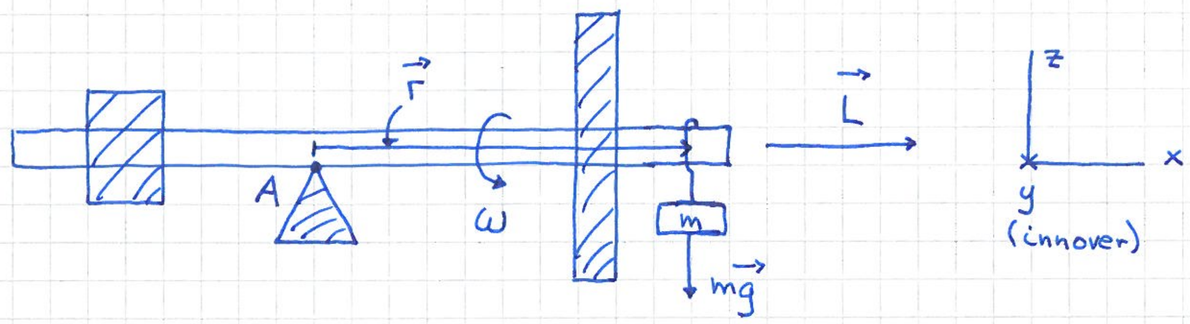
Hvis $h < h_0$:



(sluring)

Presesjon

Gyroskop (kvalitativt):



Uten lodd: Dynamisk likevekt med roterende skive

$$\vec{\omega} = \omega\hat{x}, \quad \vec{L}_A = L_A\hat{x}, \quad L_A = I_{skive} \cdot \omega$$

Med lodd: Dreiemoment relativt A:

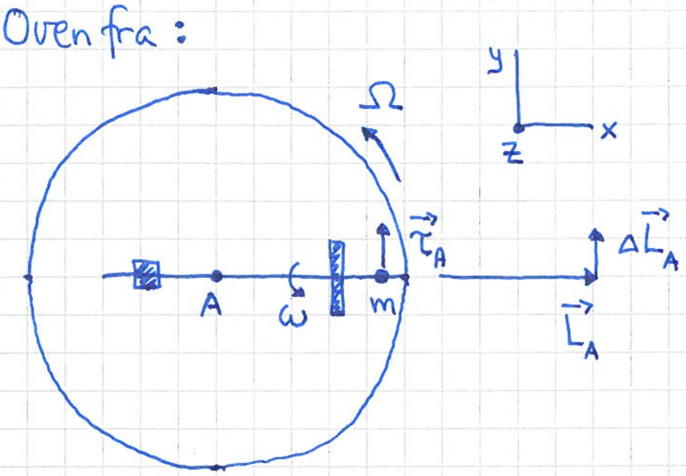
$$\vec{\tau}_A = \vec{r} \times m\vec{g} = rmg\ \hat{y}$$

$$N2,rot: \quad \vec{\tau}_A = \Delta\vec{L}_A / \Delta t$$

$\Rightarrow$ $\Delta\vec{L}_A$ peker i retning $\hat{y}$

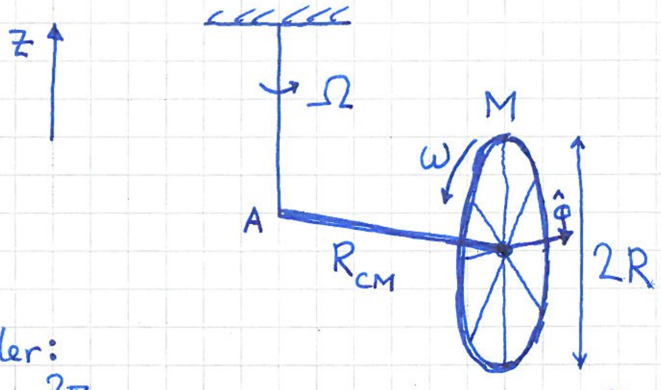
$\Rightarrow$ rotasjon mot klokka om z-aksen, presesjon, med vinkelhastighet $\Omega \ll \omega$

Ovenfra:



- større $m\vec{g}$ $\Rightarrow$ raskere presesjon (større Ω)
- større $\vec{r}$ (lengre arm) $\Rightarrow$ større Ω
- vipping opp og ned, "nutasjon"

Sykkelhjul (halvkvantitativt):



$I_o \approx MR^2$

Måler:

$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 4s$

Estimerer:

$M \approx 5$ kg

$R \approx \frac{3}{10}$ m

$R_{CM} \approx \frac{2}{10}$ m

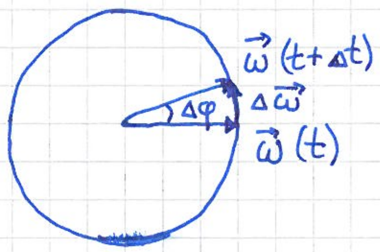
$T_\omega = 2\pi/\omega \approx \frac{1}{3}$ s

Finn estimat for T_Ω !

Løsning: $\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_o \vec{\omega}$

$\vec{L}_b = R_{CM} \cdot MV \hat{z} \approx$ konst.

$\Rightarrow \dot{\vec{L}}_A \simeq I_o \dot{\vec{\omega}} = \vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} \Rightarrow R_{CM} Mg \hat{\varphi}$



$\Delta\vec{\omega} = \omega \cdot \Delta\varphi \cdot \hat{\varphi}$

$\Rightarrow \dot{\vec{\omega}} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \omega \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \hat{\varphi} = \omega\Omega\hat{\varphi}$

$\Rightarrow R_{CM} Mg = I_o \omega\Omega \simeq MR^2 \omega\Omega$

$\Rightarrow \underline{\underline{\Omega = \frac{R_{CM}\, g}{R^2 \omega}}}$

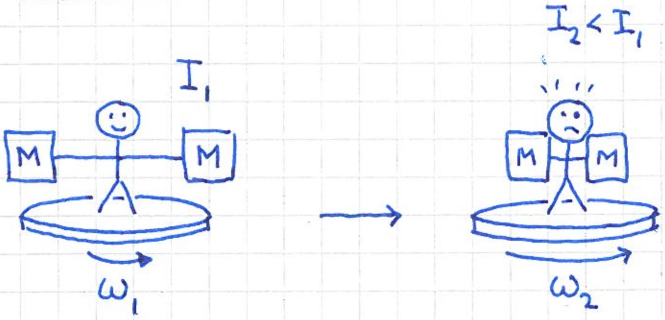
Dermed:

$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi R^2 \omega}{R_{CM}\, g} = \frac{(2\pi R)^2 / T_\omega}{R_{CM}\, g} \approx \frac{(6\pi/10)^2\ m^2 / (\frac{1}{3} s)}{\frac{2}{10} m \cdot 10\ ^m/_{s^2}}$

$= \frac{27\pi^2}{50}$ s $\approx \underline{5\ s}$, ikke verst !!

To raske demonstrasjoner av <u>dreieimpulsbevarelse</u> helt til slutt:

Piruett



$\tau_{ytre} = 0 \Rightarrow L = \text{konst.}$

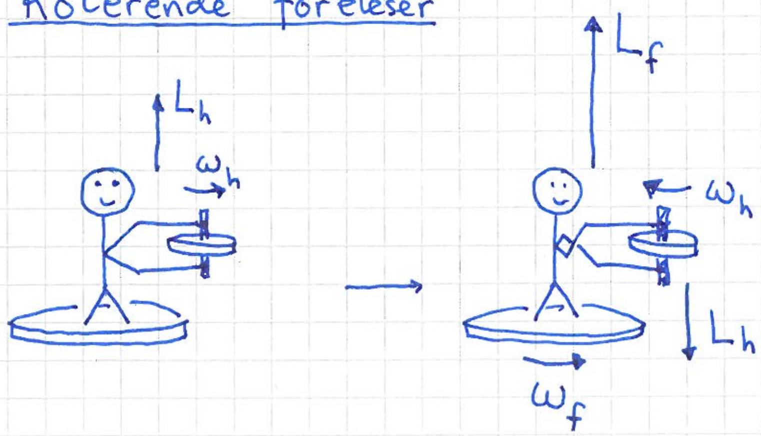
$\Rightarrow I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$

$\Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 > \omega_1$

[$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \cdot \frac{I_1}{I_2} = K_1 \cdot \frac{I_1}{I_2} > K_1$!

Henter energi fra armmusklene når bøkene trekkes inn, gir økt mekanisk energi.]

Roterende foreleser



h: hjul

f: foreleser

$\Delta \vec{L} = 0 \Rightarrow L_f \approx 2 L_h$

———— · ————

Slutten på del I av kurset.