

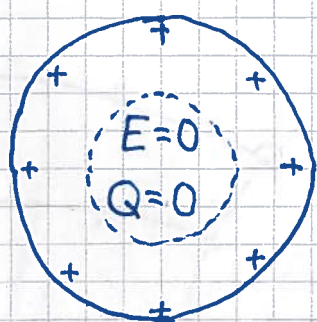
# Materialers elektriske egenskaper

## Ledere [YF 22.5 ; LHL 19.8]

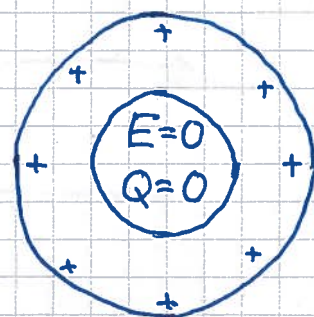
Metaller har frie elektroner (typisk 1-2 pr atom) som vil flytte seg hvis de utsettes for en nettokraft. Konsekvenser, i elektrostatisk likevekt :

- $\vec{E} = 0$  inni et metall  
[  $\vec{E} \neq 0$  gir kraft  $\vec{F} = -e\vec{E}$  på frie elektroner ; dvs ikke likevekt ]
- Netto ladning ligger på overflaten av et metall  
[ pga at  $F(r) \sim 1/r^2$  og Gauss' lov ; ikke pensum ]
- På overflaten :  $\vec{E} \perp$  overflaten  
[  $E_{||} \neq 0$  gir kraft  $F_{||} = -eE_{||}$  på frie elektroner ]  
 $E_{\perp} = \sigma / \epsilon_0$  ;  $\sigma$  = overflateladn. pr flateenhet

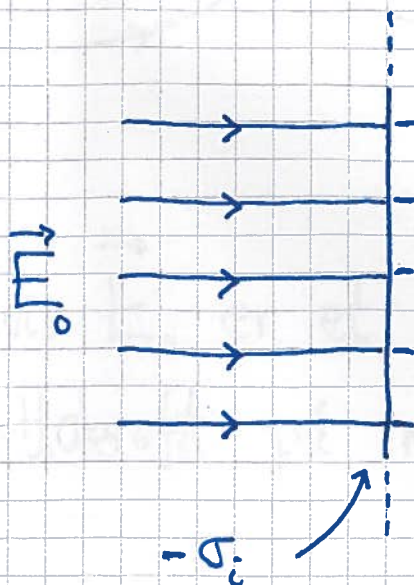
- Metallbit i likevekt er et ekvipotensial  
 $[dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$  ; inni er  $\vec{E} = 0$ , på overflaten er  $\vec{E} \perp d\vec{s}$ ]
- Metall med hulrom :  $E = 0$  i hulrommet, all nettoladning på ytre overflate  
 [ Bevis : Ingen ladningsmessig forskjell på kompakt metallbit og metallbit med hulrom ! ]



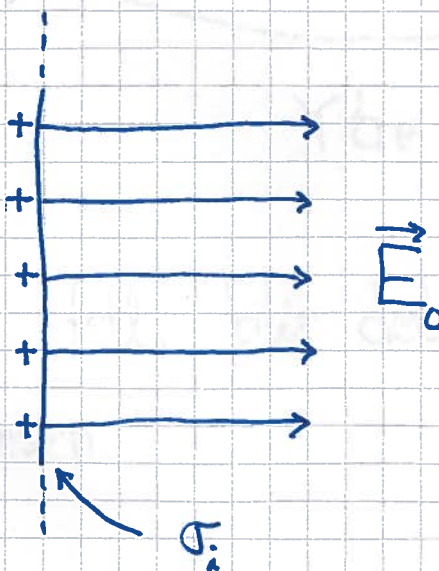
Fjerner nyutral bit inni



Eks: Metallskive i uniformt ytre felt  $\vec{E}_0$ .



$E = 0$





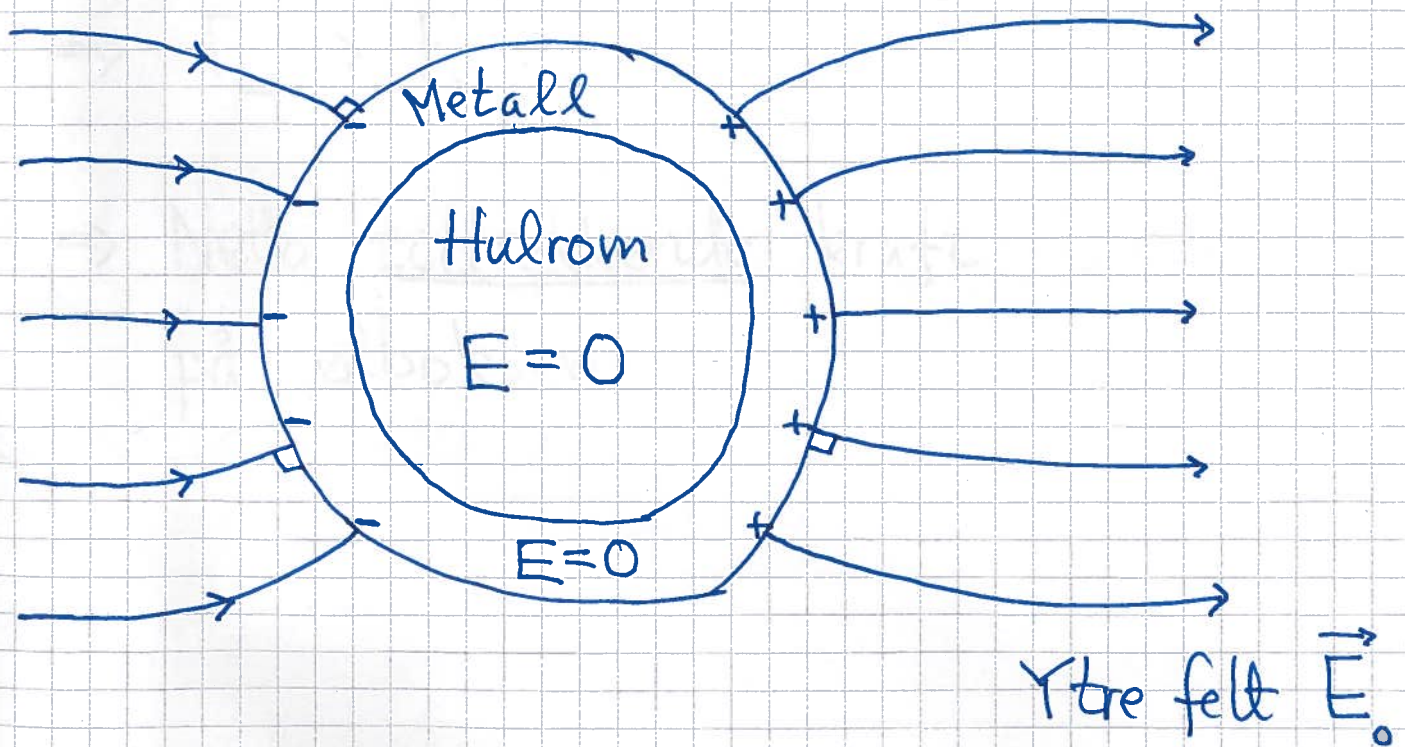
I likevekt er  $E=0$  inni metallet.

Oppnås med industert overflateledning  $\pm \sigma_i$ ,

med  $\sigma_i = \epsilon_0 E_0$ . Gir industert felt

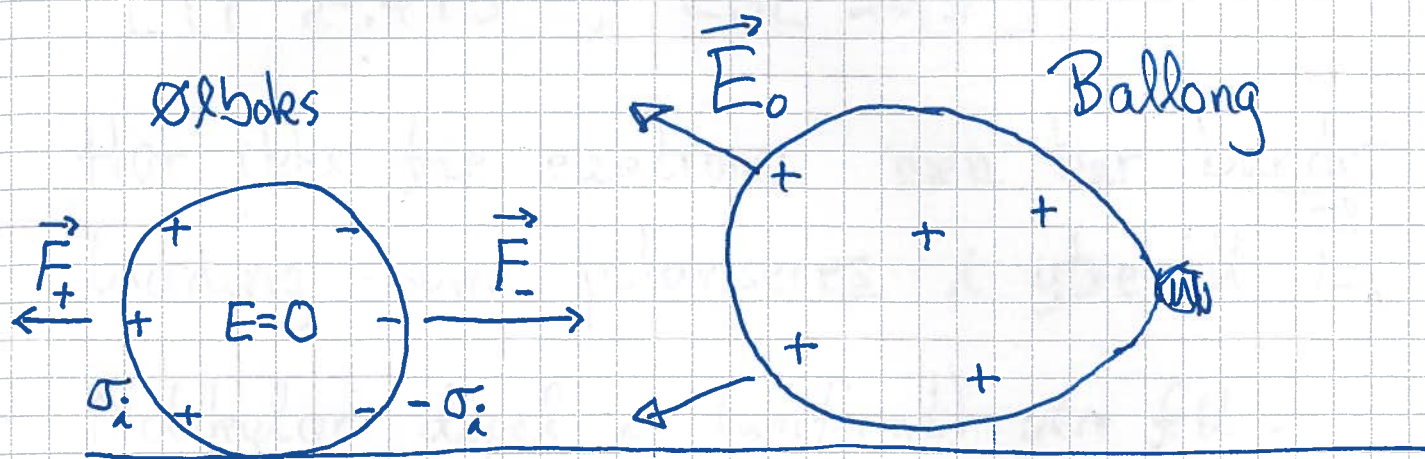
$\vec{E}_i = -\vec{E}_0$  og totalt felt  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$  inni metallet.

Eks: Faradaybur (elektrostatisk skjerming)



Hvis  $\vec{E}_0$  er et uniformt felt, blir det ingen nettokraft på metallboksen.

Eks: Metallboks i inhomogent felt



Kortest avstand mellom ballong og negativ induisert ladning

$$\Rightarrow F_- > F_+$$

$\Rightarrow$  Netto tiltrekkende kraft på ølboksen.

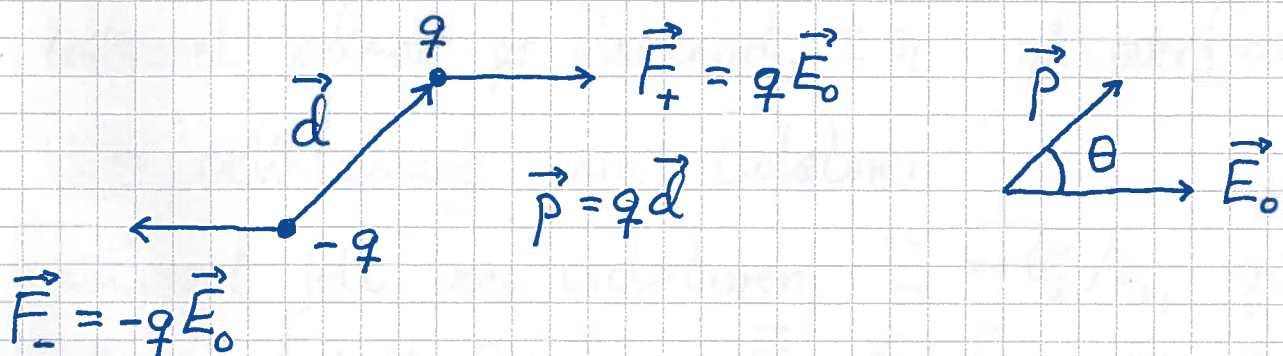


# Dielektrikum (isolator)

[YF 24.4+5 ; LHL 20.5]

Har ikke frie elektroner, men har bundet ladning som polariseres i ytre felt  $\vec{E}_0$ .

Molekylær dipol i (uniformt) ytre felt:



Dreiemoment på dipolen:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \dots \text{øving 9} \dots = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

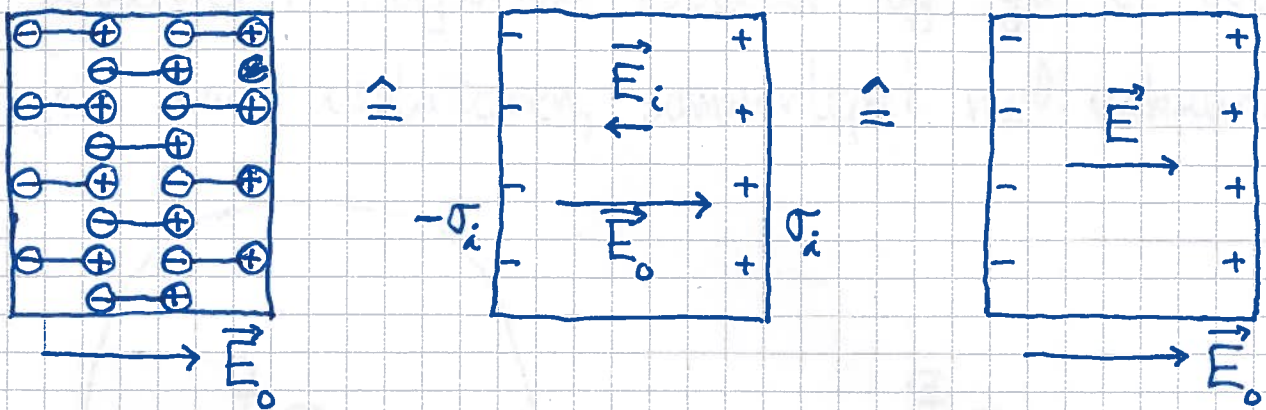
Dipolens pot. energi:

$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \dots = - \vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

(med valget  $U = 0$  for  $\theta = \pm \pi/2$ )

dvs: tendens til innretting av molekylære dipoler langs ytre felt  $\vec{E}_0$

# Netto makroskopisk effekt:



- induert ladning pr flateenhet,  $\pm \sigma_i$ , på overflaten
- null nettoladning inni isolatoren
- induert felt inni isolatoren,  $E_i = \sigma_i / \epsilon_0$ , gir svekket totalt felt inni,  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$ ,  $E = E_0 - E_i$
- vi antar lineær respons:  $E_i$  prop. med  $E_0$ , og dermed  $E$  prop. med  $E_0$ .
- isolatorens relative permittivitet  $\epsilon_r$ :  
 $\epsilon_r = E_0 / E$ , dvs  $E = E_0 / \epsilon_r$  ( $\epsilon_r \geq 1$ )

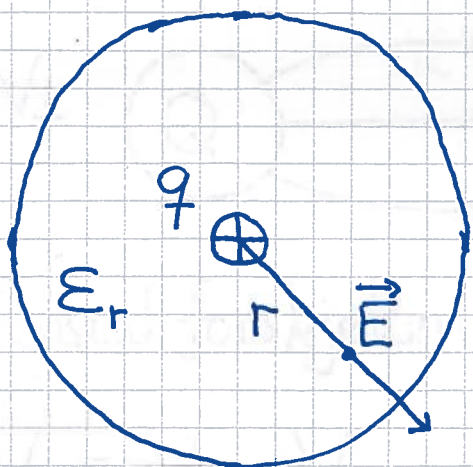
noen tallverdier:

| Stoff        | Vakuum | Tørr luft | Plast | Rent vann | Perfekt metall |
|--------------|--------|-----------|-------|-----------|----------------|
| $\epsilon_r$ | 1      | 1.00054   | 2 - 6 | 80        | $\infty$       |

- isolatorens permittivitet:  $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

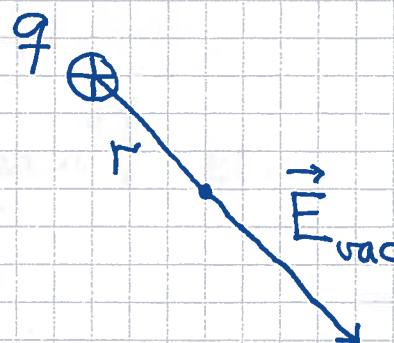


- en ladning  $q$  plassert inni en isolator  
polariserer omgivende isolator og gir et svekket felt inni isolatoren, sammenlignet med vakuum:



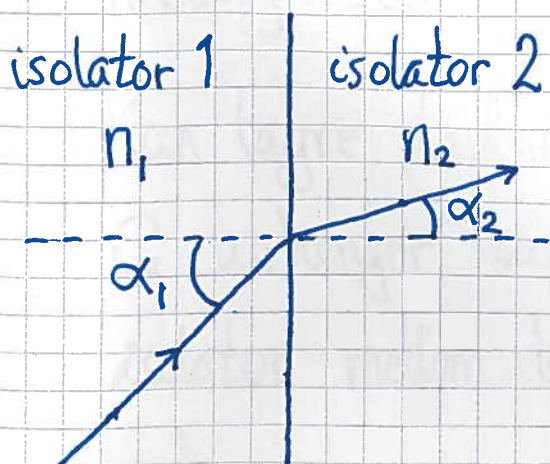
$$E(r) = q / 4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2$$

$$= q / 4\pi \epsilon r^2$$



$$E_{vac}(r) = q / 4\pi \epsilon_0 r^2$$

- lysfarten i en isolator :  $v = c / \sqrt{\epsilon_r} < c$   
( $c = 299792458 \text{ m/s} = \text{lysfarten i vakuum}$ )
- lysbrytning i grenseflate mellom to isolatorer:



$n = \sqrt{\epsilon_r} = \text{brytningsindeks}$

Snells lov:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

Rødt lys:  $n = 1.33$   
Blått lys:  $n = 1.35$  } i vann

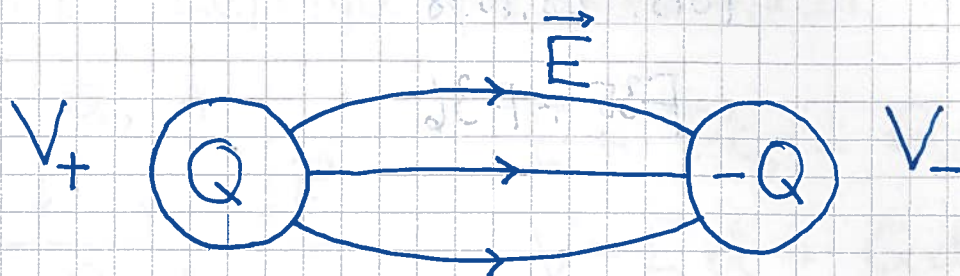
$\Rightarrow$  Regnbue m.m.



# Kondensator og kapasitans [YF 24; LHL 20]

(=capacitor)      (=capacitance)

Generelt: To ledere adskilt av isolator (f.eks. luft)



Potensialforskjellen ("spenningen") er

$$V = V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

og er prop. med  $Q$ , siden  $\vec{E}$  er prop. med  $Q$  (Goulombs lov).

Kondensatorens kapasitans:

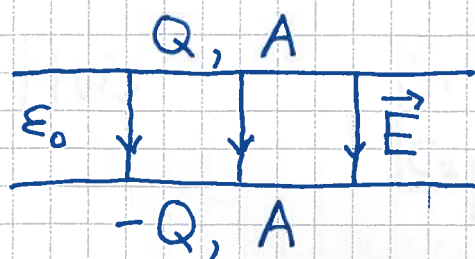
$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V$$

- Enhet:  $[C] = C/V = F$  (farad)
- Kretssymbol:
- Kan lagre ladning og energi
- $C$  avhenger av utforming/geometri og type isolator mellom lederne. Merk at  $C$  ikke avhenger av  $Q$  eller  $V$ .



- (129)
- Beregning av  $C$ : Anta ladning  $\pm Q$  på de to lederne og regn ut  $V$ . Da er  $C = Q/V$ .

Eks 1: Luftfylt platekondensator.



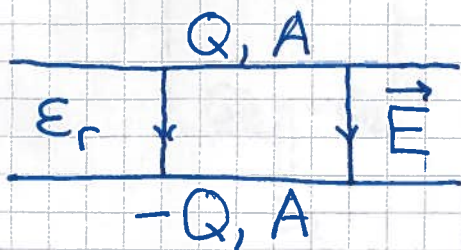
$$E = \sigma / \epsilon_0 = Q / A \epsilon_0$$

$$V = E d = Q d / A \epsilon_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C = \epsilon_0 A / d}}$$

Med  $d = 2.0 \text{ mm}$  og  $A = \pi \cdot (10 \text{ cm})^2$ :  $C \approx 0.14 \text{ nF}$

Eks 2: Platekond. fylt med dielektrikum



$$E = \sigma / \epsilon = Q / A \epsilon_r \epsilon_0$$

$$V = E d = Q d / A \epsilon_r \epsilon_0$$

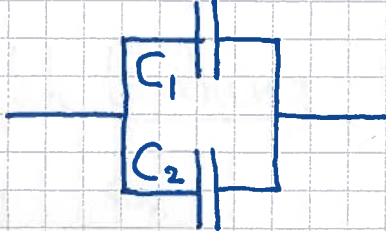
$$\Rightarrow \underline{\underline{C = \epsilon_r \epsilon_0 A / d}}$$

Dvs:  $C$  økes med faktor  $\epsilon_r$

Enhet for permittivitet:  $[\epsilon] = \text{F/m}$

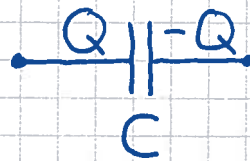
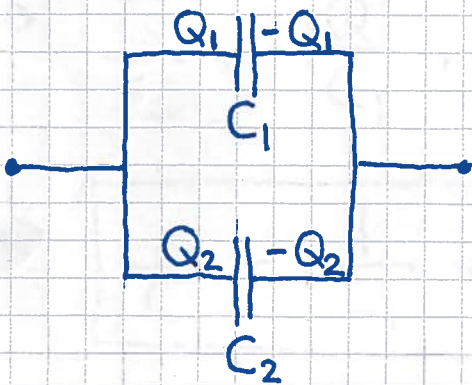
# Kobling av flere kapasitanser [YF 24.2; LHL 20.2]

## Parallellkobling:

Hvis  skal erstattes av

 og oppføre seg likt, hva er da  $C$ ?

Har lik spenning  $V$  over kond. 1 og 2:



$$V = Q_1/C_1 = Q_2/C_2 = Q/C \quad \text{og} \quad Q_1 + Q_2 = Q$$

$$\Rightarrow C_1 V + C_2 V = C V$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 + C_2 = C}$$

Med  $N$  kond. i parallell:

$$\boxed{C = \sum_{j=1}^N C_j}$$

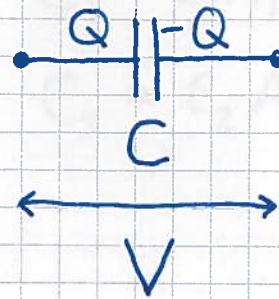
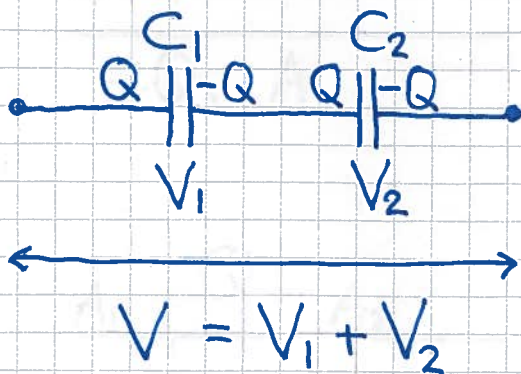


Seriekobling:

Hvis  $\text{---} \parallel_{C_1} \text{---} \parallel_{C_2} \text{---}$  skal erstattes av  $\text{---} \parallel_C \text{---}$ ,

hva er da  $C$ ?

Har her lik ladning  $\pm Q$  på nr 1 og 2:



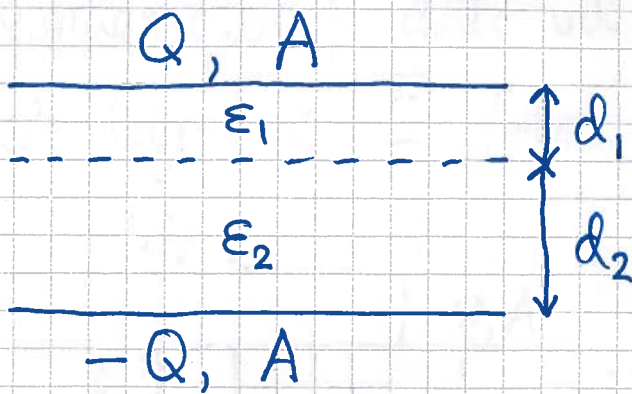
$$\Rightarrow \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Med  $N$  kond. i serie:

$$\boxed{C^{-1} = \sum_{j=1}^N C_j^{-1}}$$

Kondensator fylt med ulike dielektrika blir som  
parallell- eller seriekobling:

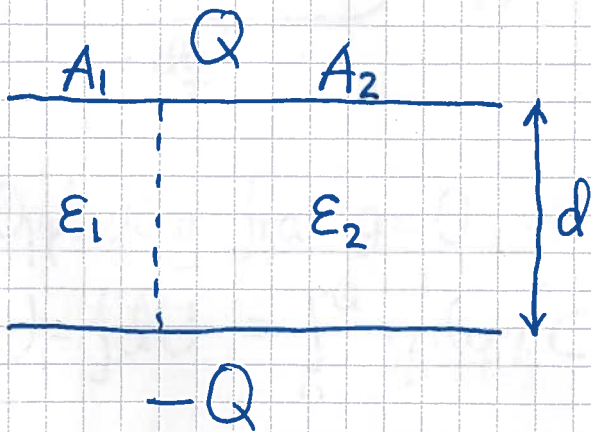


Seriekobling:

$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$$

$$C_1 = \epsilon_1 A / d_1$$

$$C_2 = \epsilon_2 A / d_2$$



Parallellkobling:

$$C = C_1 + C_2$$

$$C_1 = \epsilon_1 A_1 / d$$

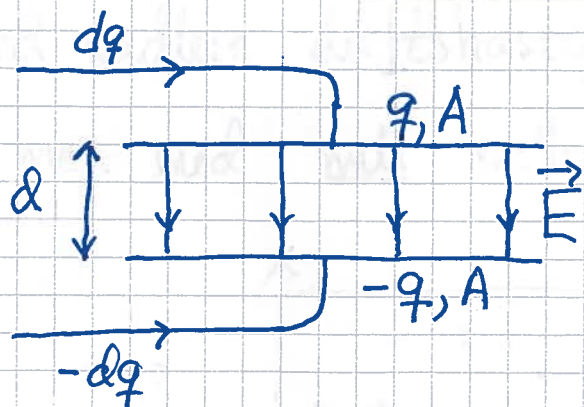
$$C_2 = \epsilon_2 A_2 / d$$



## Energi i $\vec{E}$ -felt [YF 24.3; LHL 20.4]

(133)

Vi beregner arbeidet  $W$  som skal til for å lade opp en kondensator; dette vil tilsvare potensiell energi  $U$  lagret i  $\vec{E}$ -feltet mellom platene.



Økt ladning, fra  $\pm q$  til  $\pm (q + dq)$  gir økt pot. energi:

$$dU = v(q) dq = \frac{q}{C} dq$$

$\Rightarrow$  Opplading fra  $q=0$  til  $q=Q$  gir pot. energi

$$U = \int dU = \int_0^Q q dq / C = Q^2 / 2C = \frac{1}{2} CV^2$$

som med  $C = \epsilon_0 A / d$  og  $V = Ed$  gir

$$U = \frac{1}{2} (\epsilon_0 A / d) \cdot (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$$

med  $A \cdot d =$  volumet mellom platene, dvs der  $E \neq 0$

$\Rightarrow$  Energien pr volumenhett i et elektrisk felt er

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

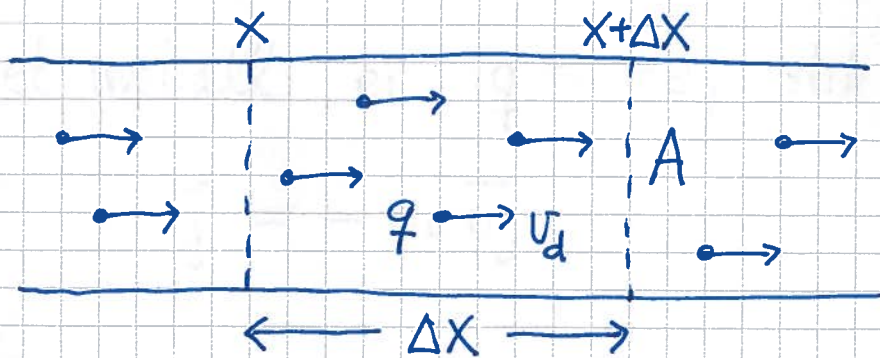
som gjelder generelt.



# Elektrisk strøm [YF 25,26; LHL 21,22] (134)

## Strøm og strømtetthet [YF 25.1; LHL 21.1]

Leder med  $n$  frie ladninger pr volumenhet, med midlere driftshastighet  $v_d$  langs lederen (men med null nettoladning) :



Strøm  $\stackrel{\text{def}}{=}$  ladning som passerer et tverrsnitt av lederen pr tidsenhet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dQ}{dt}$$

$$[I] = \text{C/s} = \text{A} \quad (\text{ampere})$$

$$\text{All fri ladning } \Delta Q = q \cdot \Delta N = q \cdot n \cdot \Delta V$$

$$\text{i volumet } \Delta V = A \cdot \Delta x \text{ passerer ved } x + \Delta x$$

$$\text{i løpet av tiden } \Delta t = \Delta x / v_d$$



$$\Rightarrow I = \frac{q n \Delta x A}{\Delta x / v_d} = n q v_d A$$

(135)

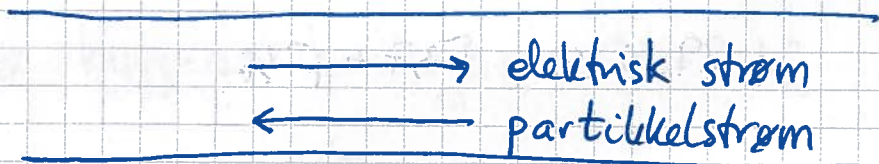
Strømtetthet  $\stackrel{\text{def}}{=}$  strøm pr flateenhet

$$j = I/A \quad ; \quad [j] = A/m^2$$

$$\Rightarrow j = n q v_d, \text{ dvs } \boxed{\vec{j} = n q \vec{v}_d}$$

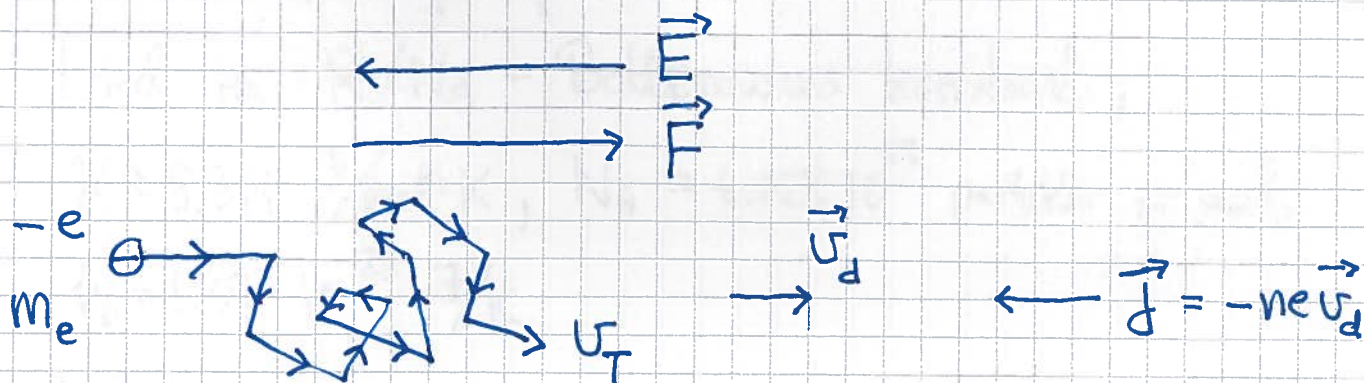
I et metall er  $q = -e$ , slik at

$$\vec{j} = -n e \vec{v}_d$$



Ohms lov [YF 25.2, 25.6 ; LHL 21.2, 21.4]

Ytre felt  $\vec{E}$  gir kraft  $\vec{F} = -e\vec{E}$ , som vil drive frie elektroner gjennom metallet :



Anta  $d$  = midlere avstand mellom kollisjoner (136)

$\tau = d/v_T$  = midlere tid mellom kollisjoner

$v_T$  = midlere elektronfart ved temperatur  $T$

$$\vec{v}_d \approx \vec{a} \cdot \tau \stackrel{N2}{=} - \frac{e\vec{E}}{m_e} \cdot \tau$$

= midlere driftshastighet

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}; \quad \sigma = ne^2\tau/m_e = \text{materialets} \\ \text{konduktivitet (elektrisk ledningsevne)}$$

Dette er Ohms lov (på mikroskopisk form), i følge Paul Drude, ca 1900.

Pga hyppige kollisjoner blir  $v_d$  svært mye mindre enn  $v_T$ .

Termodynamikkens ekvipartisjonsprinsipp sier at ved absolutt temperatur  $T$  bidrar hvert kvadratiske ledd i energifunksjonen med  $\frac{1}{2}k_B T$  pr partikkel.

[Med  $k_B = R/N_A$  = Boltzmanns konstant ;

$R \approx 8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$ ,  $N_A \approx 6.022 \cdot 10^{23}$  partikler pr mol,

$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$



For elektroner (i tre dimensjoner):

(137)

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{1}{2} m_e v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\Rightarrow v_T = \sqrt{3k_B T / m_e} \sim 10^5 \text{ m/s ved romtemperatur}$$

Estimerer  $v_d$  i kobber:

$$m(\text{Cu}) \approx 63 \text{ g/mol}; \quad \rho \approx 9 \text{ g/cm}^3$$

$$\Rightarrow n \approx 10^{29} \text{ frie elektroner pr m}^3 \text{ (1 pr Cu-atom)}$$

Anta  $d \approx 10^{-9} \text{ m} \approx$  avstand mellom Cu-atomene

$$\text{dvs } \tau \approx d / v_T \approx 10^{-9} \text{ m} / 10^5 \text{ m/s} \approx 10^{-14} \text{ s}$$

Med Cu-ledninger i typiske elektriske kretser

er  $E \sim 10^{-3} \text{ V/m}$  en realistisk verdi.

$$\text{Da er } v_d = e \tau E / m_e \approx 10^{-6} \text{ m/s,}$$

$$\text{dvs } v_d / v_T \sim 10^{-11} (!)$$

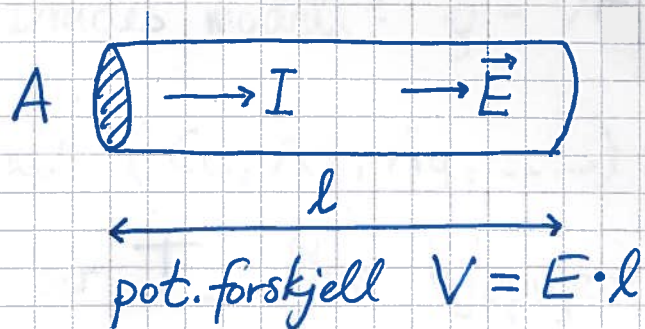
Med  $v_d = 10^{-6} \text{ m/s}$  vil et gitt elektron bruke

ca 100 timer på å komme seg gjennom en

Cu-ledning med lengde 36 cm.

For leder med lengde  $l$ , tverrsnitt  $A$ :

(138)



$$j = I/A = \sigma E$$

Dermed:  $I = \sigma E A = \sigma V A / l$

$\Rightarrow \boxed{V = R I}$ , med motstand (resistans)

$$R = l / \sigma A$$

som er Ohms lov på "familier" (makroskopisk) form!

Konduktans  $G$ :  $I = G \cdot V \Rightarrow G = \sigma A / l = 1/R$

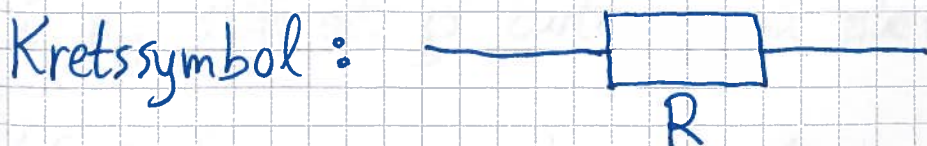
Resistivitet  $\rho$ :  $\rho = 1/\sigma$

Enheter:  $[R] = V/A = \Omega$  (ohm)

$$[G] = 1/\Omega = S \text{ (siemens)}$$

$$[\rho] = \Omega m ; [\sigma] = \frac{1}{\Omega m} = S/m$$

$\sigma, \rho$  er materialeegenskaper ;  $G, R$  er avhengige av  $A$  og  $l$



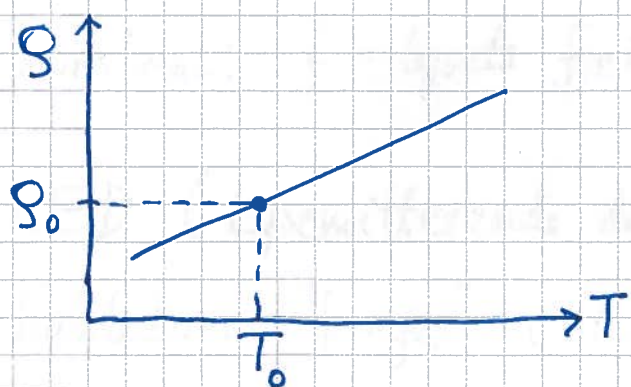
(Noen bruker )



## Resistivitet og temperatur [YF 25.2; LHL 21.2+5] (139)

Fra Drudes modell:  $\rho = 1/\sigma = m_e/e^2 n \tau \sim 1/n\tau$

Metall (Cu, Al, Ag, ----): Stor  $n$  som avhenger lite av  $T$ . Men hyppigere kollisjoner når  $T$  øker, dvs mindre  $\tau$  og større  $\rho$ . Exp. gir typisk en lineær  $\rho(T)$ :

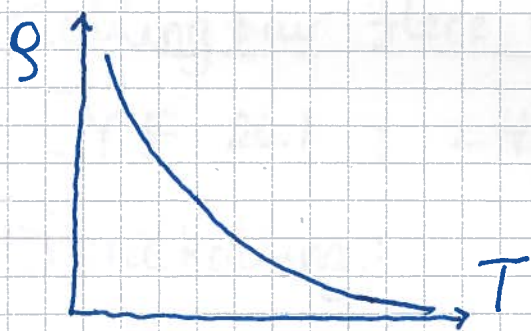


$$\Rightarrow \rho(T) = \rho_0 \{1 + \alpha \cdot (T - T_0)\}$$

$\alpha \approx 0.004 \text{ K}^{-1}$  for både Cu, Al og Ag

Halvleder (Si, Ge, GaAs, GaN, ....): Isolator, med  $n \approx 0$  ved  $T \approx 0$ . Økt  $T$  gir sterk økning i  $n$ , slik at  $\rho$  avtar med økende  $T$ .

(Også forurensningsatomer - doping - øker  $n$  og reduserer  $\rho$ .)



Solceller: Lys, dvs fotoner med energi  $hf$ , absorberes av elektroner i halvlederen, blir frie elektroner som kan bidra til elektrisk strøm. ( $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$  Js = Plancks konstant;  $f$  = lysets frekvens)

LED (Lysemitterende dioder): Frie elektroner i halvlederen "fanges" i tilstand med lavere energi (et "hull"); frigjort energi sendes ut som foton.

Eks:

$(Al_x Ga_{1-x})As$  :  $\lambda = 560 - 870$  nm (~~rødt~~ gult-rødt)

$(In_x Ga_{1-x})N$  :  $\lambda = 360 - 620$  nm (blått-gult)

Kan kombineres og gi hvitt lys med LED-pærer.

Nobelpris fysikk, 2014.

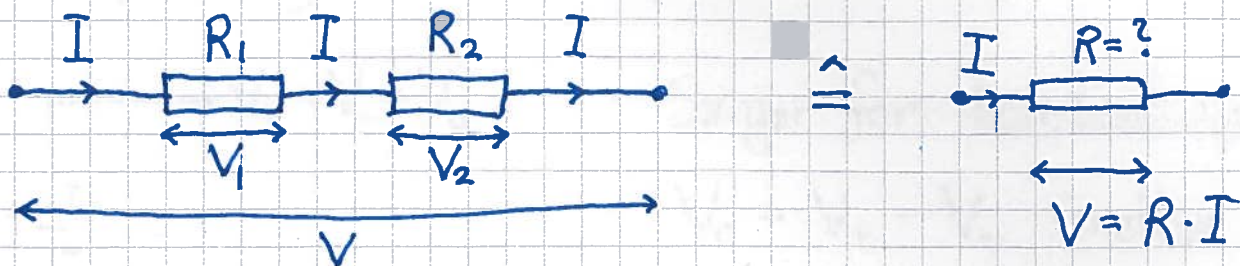


# Kobling av flere motstander

141

[YF 26.1 ; LHL 21.3]

Seniekobling:



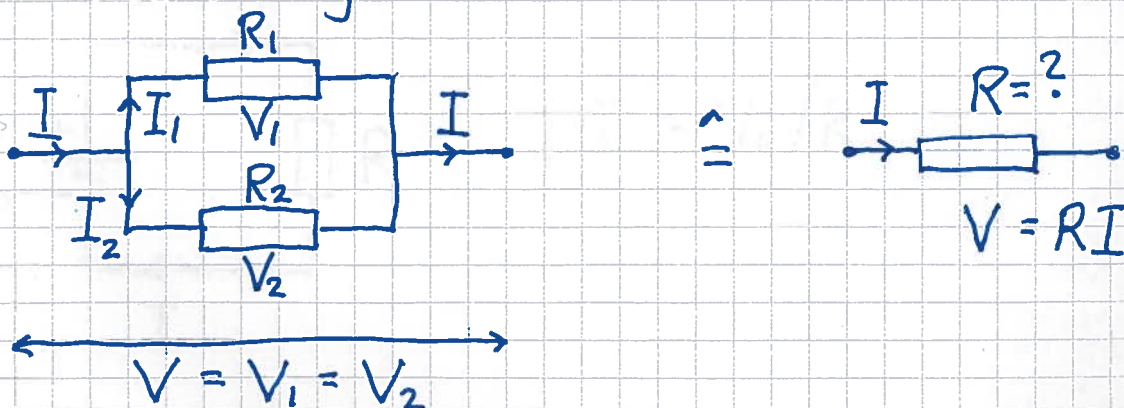
Samme strøm  $I$  gjennom  $R_1$  og  $R_2$ ;  $V = V_1 + V_2$

$$\Rightarrow V = R_1 I + R_2 I = R I \Rightarrow \boxed{R = R_1 + R_2}$$

Med  $N$  motstander i serie:

$$\boxed{R = \sum_{j=1}^N R_j}$$

Parallellkobling:



Samme spenning over  $R_1$  og  $R_2$  ;  $I = I_1 + I_2$

$$\Rightarrow \frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

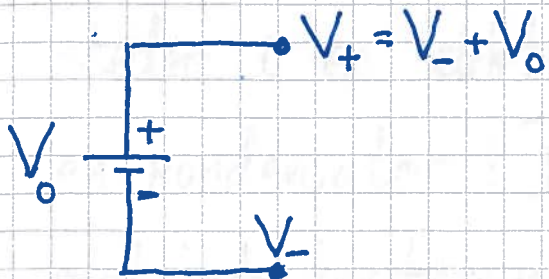
Med  $N$  motstander i parallell:

$$\boxed{R^{-1} = \sum_{j=1}^N R_j^{-1}}$$

# Likestrømkretser [YF 26 (25); LHL 22] (142)

DC = direct current = likestrøm

Likespenningskilde :



Sørger for konstant spenning

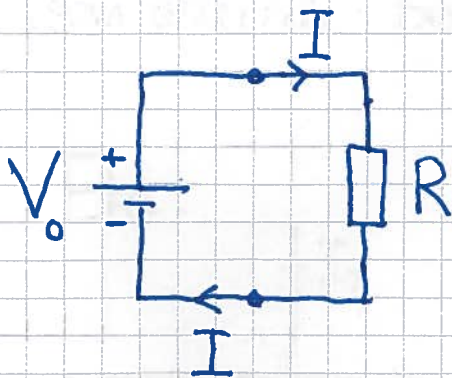
$V_0 = V_+ - V_-$  mellom polene.

Eks: Kjemisk batteri, solcelle

Kan koble spenningskilden til en motstand  $R$ .

Gir en lukket krets, og strøm bestemt av

Ohms lov :



$$I = V_0 / R$$



# Kirchhoffs lover (regler) [YF 26.2; LHL 22.3] (143)

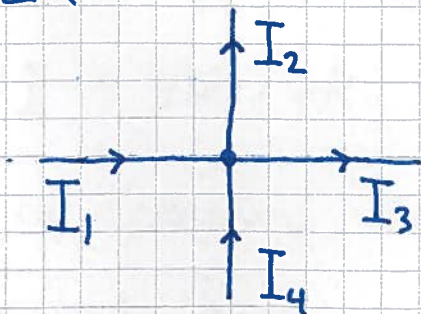
K1: Strømregel; knutepunktregel

Ladning vil ikke "høpe seg opp" på ulike steder i en elektrisk krets. [Unntak: Platene i en kondensator!] Derfor må netto strøm inn mot et knutepunkt være lik netto strøm ut av knutepunktet.

$$\sum_j I_j = 0 \quad \text{i alle knutepunkt i elektrisk krets}$$

(som allerede benyttet s. 141)

Eks:



Velg (f.eks) positivt fortegn inn og negativt fortegn ut

$$\Rightarrow I_1 + I_4 - I_2 - I_3 = 0$$

$$\underbrace{I_1 + I_4}_{\text{inn}} = \underbrace{I_2 + I_3}_{\text{ut}}$$

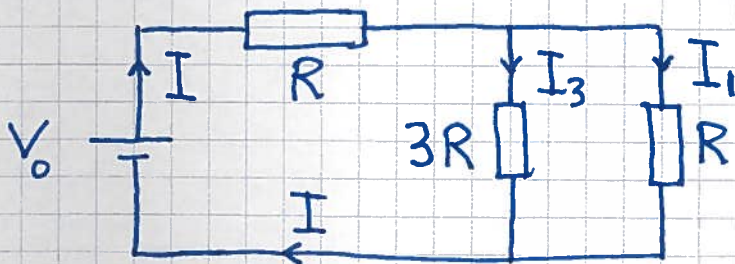


K2: Spenningsregel; sløyferegel

En ladning må oppleve et entydig potensial (dvs: ha en entydig pot. energi) på et gitt sted i en elektrisk krets. Derfor må summen av alle potensialendringer rundt enhver lukket sløyfe være null

$$\sum_j V_j = 0 \text{ rundt alle sløyfer i elektrisk krets}$$

Eks:



$$V_0 = I \cdot R_{\text{tot}} ; R_{\text{tot}} = R + \left( \frac{1}{3R} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \frac{7}{4} R$$

$$\Rightarrow I = 4V_0 / 7R, I_3 = \frac{1}{4} I = V_0 / 7R, I_1 = \frac{3}{4} I = 3V_0 / 7R$$

Lik spenning over de to parallellkoblede motstandene.