TFY4104 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 10.

Oppgave	A	B	C	D
1	x			
2	x			
3			x	
4	x			
5		x		
6	x			
7				x
8				x
9	x			
10			x	
11			x	
12				x
13			x	
14	x			
15			x	
16				x
17			x	
18	x			
29				x
20			x	

1) Glass-staven er ikke i berøring med metallkulene, så vi kan ikke få noen netto overføring av ladning mellom glass-staven og kulene. Imidlertid vil den positivt ladede glass-staven trekke fri elektroner i metallet til seg, slik at vi får et overskudd av negativ ladning på venstre side av venstre metallkule. Siden metallkulene totalt sett er elektrisk nøytrale, må det bety at høyre kule ender opp med et underskudd av elektroner, altså netto positiv ladning. Dette er igjen polarisering (jfr oppgave 4, 9 og 14), eller lading ved induksjonsom det også kalles.

2) Kreftene fra ladningene i B og C er like store og motsatt rettet og gir derfor null netto bidrag. Kraften fra ladningen i A peker langs OD. (Vektor-)Summen av kreftene fra de to ladningene midt på CD og BD må peke langs OA. I absoluttverdi må hver av disse være nøyaktig dobbelt så store som kraften fra ladningen i A, ettersom avstanden OA er $\sqrt{2}$ ganger så stor som avstanden fra O ut til de to midtpunktene. I absoluttverdi er vektorsummen av kreftene fra de to ladningene midt på CD og BD en faktor $\sqrt{2}$ større enn lengden av hver av dem. Følgelig er denne vektorsummen også større enn kraften fra ladningen i A. Dermed må totalkraften peke langs OA.

3) Newtons 3. lov: Kraft og motkraft er motsatt rettet og like store i absoluttverdi.

4) I stedet for å begynne å regne ut feltet fra en slik skive, følger vi tipset gitt i oppgaveteksten og sjekker om noen av de oppgitte alternativene stemmer med det vi vet om feltet fra en slik ladning i visse såkalte "asymptotiskegrenser. For eksempel må feltet fra en viss mengde lokalisert ladning Q på riktig stor avstand x redusere seg til feltet fra en punktladning Q i avstand x, dvs

$$E(x) \to \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$

når $x \gg R$. Her holder dette i massevis, for uttrykkene i B, C og D går ikke mot null i denne grensen!

(Uttrykket i D har dessuten ikke riktig dimensjon.) Stemmer uttrykket i A? Hvis $x \gg R$, har vi

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1+R^2/x^2}} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{R^2}{2x^2} + \ldots\right) \\ &\simeq \frac{R^2}{2x^2} \end{aligned}$$

slik at $E \simeq Q/4\pi\varepsilon_0 x^2$. Vi kunne også ha sett på feltet i motsatt grense, dvs $x \to 0$. Da bør vi jo få det samme som for et uendelig stort plan, dvs $\sigma/2\varepsilon_0$. Bare feltet i A stemmer med dette:

$$E_A \to \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

med $\sigma = Q/\pi R^2$, dvs ladning pr flateenhet.

5) Ettersom $E(r) = -dV/dr$, må vi for den lineære delen av E ha $E(r) = ar$ (a = positiv konstant), dvs $dV/dr = -ar$. Følgelig er $V(r) = b - ar^2/2$ (b = konstant), en parabel med negativ krumning. Bare kurve 3 stemmer med dette. Vi ser at oppførselen til E og V for store r også er i orden med kurve 3, f.eks. $E(r) \sim 1/r^2$ og $V(r) \sim 1/r$.

6) Det spiller ingen rolle om ladningsfordelingen på metallet ikke lenger er uniform: Det elektrostatiske feltet $\boldsymbol{E}$ er null overalt inne i metallet, så potensialet V må være konstant overalt. Ikke glem dette: I elektrostatisk likevekt er en sammenhengende elektrisk leder et ekvipotensial.

7) $\boldsymbol{E} = -\nabla V$, dvs $\boldsymbol{E}$ peker i retning av lavere potensial, og står dessuten normalt på ekvipotensialflaten.

8) Den elektriske feltstyrken inne i den dielektriske skiva reduseres i forhold til om vi hadde vakuum der. Dermed blir potensialforskjellen ΔV mellom kondensatorplatene mindre. Påstand A er dermed ikke riktig. Ettersom kapasitansen er gitt ved $C = Q/\Delta V$, betyr det at kapasitansen blir større når ΔV blir mindre (når Q holdes konstant). Altså er påstand B heller ikke riktig. Potensiell energi lagret i kondensatoren må ha blitt mindre etter at vi satte inn den dielektriske skiva. Den konklusjonen kan vi trekke, uansett om vi betrakter energien som lagret i det elektriske feltet (energi pr volumenhet: $u = \varepsilon_0 E^2/2$) eller om vi regner ut arbeidet som skal til for å lade opp kondensatoren fra null ladning til endelig ladning $\pm Q$. Altså er også påstand C feil. Vi står igjen med påstand D, som er riktig: Den elektriske feltstyrken i luftlagene påvirkes ikke av at vi setter inn en dielektrisk skive. Vi får indusert negativ ladning på øverste overflate og like mye positiv ladning på nederste overflate av den dielektriske skiva. I de to luftlagene gir disse to ladningsplanene like store, men motsatt rettede bidrag til det totale elektriske feltet.

9) Et uendelig stort plan med ladning σ pr flateenhet skaper et elektrisk felt $\sigma/2\varepsilon_0$. Den elektriske kraften på et annet plan med ladning Q som plasseres i dette feltet blir dermed $F = QE = Q\sigma/2\varepsilon_0$. Kraften pr flateenhet blir $f = F/A = Q\sigma/2\varepsilon_0 A = \sigma^2/2\varepsilon_0$. Med $\sigma = 10^{-5}$ C/m^2 og $\varepsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$ C^2/N m^2, har vi $f = 100/2 \cdot 8.85 \simeq 5.7$ N/m^2.
Legg merke til at vi ikke kan bruke den *totale* elektriske feltstyrken σ/ε_0 når vi skal finne kraften på den ene plata fra den andre. De to platene bidrar hver med $\sigma/2\varepsilon_0$ til det totale feltet, men en gitt plate virker ikke på seg selv med noen netto kraft. (På samme måte som at du ikke greier å løfte deg selv etter håret....!)

10) Ladningen Q er fordelt over lederens overflate og resulterer i en eller annen slags flateladningstetthet σ. (Som typisk vil variere fra sted til sted på lederens overflate, med mindre den er kuleformet. Stor ladningstetthet der overflaten har liten krumningsradius, f.eks. skarpe kanter, liten ladningstetthet der overflaten har

stor krumningsradius.) Den dobbelt så store ladningen $2Q$ vil fordele seg på tilsvarende vis og resultere i en flateladningstetthet 2σ. Det elektriske feltet i punktet P kan da beregnes fra Coulombs lov. Med ladning Q:

$$\boldsymbol{E}_1(P) = \int_S \frac{\sigma\, dA}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Med ladning $2Q$:

$$\boldsymbol{E}_2(P) = \int_S \frac{2\sigma\, dA}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = 2\boldsymbol{E}_1(P)$$

Her går integralene over lederens (lukkede) overflate S, r er avstanden fra flateelementet dA til P og $\hat{r}$ er enhetsvektor langs retningen fra dA til P.
Ettersom feltet overalt (dvs: overalt på *utsiden* av lederen!) er blitt dobbelt så stort, må også potensialet (f.eks. relativt til uendelig langt unna)

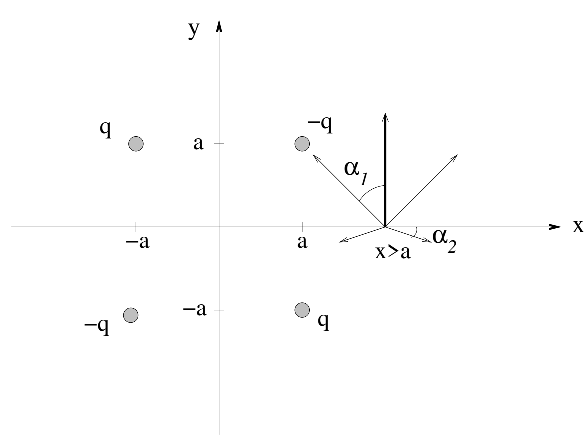
$$V(P) = -\int_\infty^P \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l}$$

ha blitt dobbelt så stort.

11) La oss bestemme retningen på det elektriske feltet like i nærheten av de to ladningene, med utgangspunkt i at det elektriske feltet peker inn mot en negativ ladning. Like til venstre for $x = -a$ må feltet peke mot høyre, dvs $E(x) > 0$. Alle kurver stemmer med dette. Men like til høyre for $x = -a$ må feltet peke mot venstre, dvs $E(x) < 0$. Kurve 1 stemmer ikke med dette. Like til venstre for $x = a$ må feltet peke mot høyre, dvs $E(x) > 0$. Kurve 4 stemmer ikke med dette. Og endelig, like til høyre for $x = a$ må feltet peke mot venstre, dvs $E(x) < 0$. Kurve 2 stemmer ikke med dette. Vi står igjen med kurve 3, som stemmer. Vi ser at $E(0) = 0$ i kurve 3, som opplagt også må være riktig.

12) $E = 0$ inne i metallkula, dermed er A og C ikke aktuelle. (Feltlinjene i B tilsvarer, som vi skal se om noen uker, magnetfeltet rundt en strømførende leder som står normalt på papirplanet.)

13) I punktet $(x, 0)$ $(x > a)$ bidrar ladningene med parvis like store felt (i absoluttverdi), og med retninger som vist i figuren:



Vektorsummen av de fire tynne vektorene gir tilsammen et elektrisk felt som peker i positiv y-retning.

14) Potensialet fra en punktladning q er

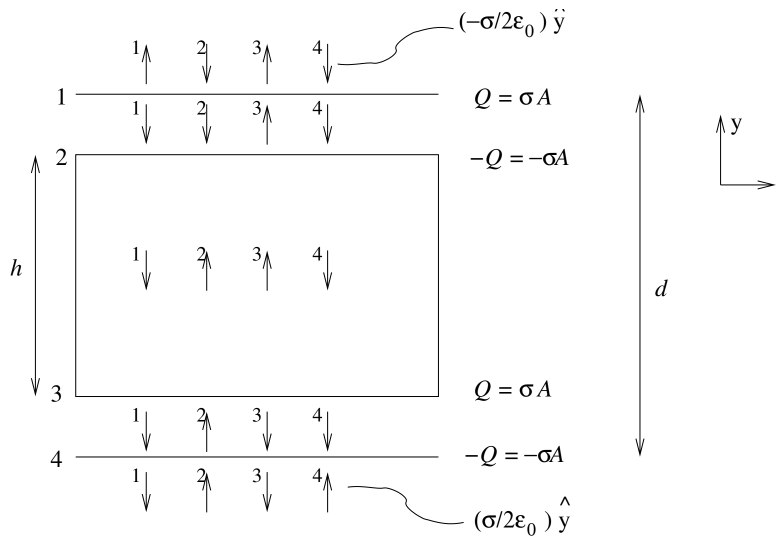
$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

der r er avstanden fra punktladningen. Det totale potensialet er summen av potensialet fra hver enkelt punktladning (superposisjonsprinsippet). Her har vi to og to ladninger med motsatt fortegn men med samme avstand. Altså må summen bli null. Vi ser faktisk at hele xz-planet er en ekvipotensialflate med verdien $V = 0$. Det samme må da også gjelde for yz-planet.

15) Det elektriske feltet fra de to kondensatorplatene vil indusere ladning på øvre og nedre flate av den innsatte metallskiva. I likevekt må vi ha null elektrisk felt inne i metallskiva. Det oppnår vi ved at det induseres en ladning $-Q$ på øvre flate og Q på nedre flate av metallskiva. Hvorfor nettopp $-Q$ og Q? Jo, fordi det elektriske feltet fra et uendelig stort ladet plan er uavhengig av avstanden til planet, og gitt ved flateladningstettheten σ:

$$E_0 = \sigma/2\varepsilon_0$$

I vårt tilfelle er $\sigma = Q/A$, der A er pldatearealet. Retningen på feltet fra et ladet plan er *bort fra* hvis det er positivt og *inn mot* hvis det er negativt. Vårt system blir da som vist i figuren nedenfor. Med f.eks. y-aksen oppover blir de ulike bidragene til det totale elektriske feltet i de ulike områdene dermed enten $(-\sigma/2\varepsilon_0)\hat{y}$ eller $(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{y}$, se figuren.



Vi har her essensielt 4 uendelig store plan, to med ladningstetthet σ (1 og 3) og to med ladningstetthet $-\sigma$ (2 og 4). I figuren er bidragene til totalt felt fra hvert enkelt plan tegnet inn i alle de fem "ulike" områdene. Totalt elektrisk felt blir rett og slett vektorsummen i hvert område, så vi har

$$E = 0$$

på utsiden av kondensatoren og inne i metallskiva (som vi *måtte* ha). I de to områdene mellom metallskiva og de to kondensatorplatene ser vi at feltet blir

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{y}$$

dvs det samme som vi hadde før vi satte inn metallskiva.
Så til det oppgaven spør om, nemlig potensialforskjellen mellom kondensatorplatene. Uten metallskiva blir potensialforskjellen

$$\Delta V = -\int_{(-)}^{(+)} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

for da er $\boldsymbol{E} = (-\sigma/\varepsilon_0)\hat{y}$ i hele området mellom platene. (Vi velger selvsagt $d\boldsymbol{l} = dy\,\hat{y}$.)
Med metallskiva på plass blir potensialforskjellen

$$\Delta V = -\int_{(-)}^{(+)} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{\sigma(d-h)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma d}{3\varepsilon_0}$$

for nå er $\boldsymbol{E} = (-\sigma/\varepsilon_0)\hat{y}$ bare i de to områdene på hver side av metallskiva, med total utstrekning $d - h = d - 2d/3 = d/3$; inne i metallskiva er $E = 0$.
Konklusjon: Potensialforskjellen mellom kondensatorplatene blir tre ganger mindre.
Kommentar: Dette var en veldig omstendelig løsning. Ikke desto mindre synes jeg det kan være en grei måte å tenke på i slike oppgaver med "uendelig" store ladete plan. Det eneste vi trenger å vite er at feltet fra ett

plan er $\sigma/2\varepsilon_0$, med retning bort fra eller inn mot planet hvis hhv positiv eller negativ ladning. I tillegg må vi vite at $E = 0$ inne i et metall, og endelig at superposisjonsprinsippet gjelder for det elektriske feltet.

16) Et uendelig stort uniformt ladet plan med ladning pr flateenhet σ resulterer i et konstant elektrisk felt $E = \sigma/2\varepsilon_0$. Hvis σ er positiv, blir E rettet bort fra planet, og omvendt hvis σ er negativ. Vi vet videre at potensialet *avtar* dersom vi beveger oss *med* det elektriske feltet. Husk: Avtagende potensial når vi fjerner oss fra en positiv ladning, ettersom en positiv testladning må få avtagende potensiell energi når den fjerner seg fra en positiv ladning.
Her har vi nettopp et positivt ladet plan, så potensialet må altså avta med avstanden til planet. Det er valgt $V = -20$ V på planet, så V må her være negativt overalt.
(Hvis planet hadde vært negativt ladet, med ladningstetthet $\sigma = -4$ nC/m^2, hadde vi hatt $V = 0$ i avstand $d = \Delta V/E = \Delta V \cdot 2\varepsilon_0/\sigma = 20 \cdot 2 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}/4 \cdot 10^{-9} \simeq 0.09$ m.)

17) Dersom det elektriske feltet er E_0 mellom metallplatene før vi setter inn de to dielektriske lagene, blir feltstyrken redusert med en faktor $1/\varepsilon_{rj}$ inne i dielektrikum j ($j = 1, 2$). Her er ε_{rj} relativ permittivitet til dielektrikum j, dvs $\varepsilon_{r1} = 4$ og $\varepsilon_{r2} = 2$. Feltstyrken forblir uendret i vakuumlaget mellom $x = 2a$ og $x = 3a$. Dermed:

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{4}E_0 \qquad 0 < x < 2a \\
E &= E_0 \qquad 2a < x < 3a \\
E &= \frac{1}{2}E_0 \qquad 3a < x < 5a
\end{aligned}$$

Dette betyr at potensialet avtar minst mellom 0 og $2a$, raskest (mer presist: fire ganger raskere) mellom $2a$ og $3a$, og "mellomraskt"(mer presist: dobbelt så raskt som mellom 0 og $2a$) mellom $3a$ og $5a$. Bare kurve 3 kan stemme med dette.

18) La oss i denne oppgaven ta den enkle løsningen først, utstyrt med den visdommen som vi opparbeidet oss i oppgave 18. Her har vi en *seriekobling* av to kapasitanser: Begge har plateareal A og plateavstand $d/2$, den ene er luftfylt og den andre er fylt med et dielektrikum med permittivitet $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$. Da kan vi benytte oss av resultatet i oppgave 13. Kapasitansen til halvdelen med dielektrikum er

$$C_1 = \varepsilon\frac{A}{d/2} = 2\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A}{d}$$

mens kapasitansen til den luftfylte halvdelen er

$$C_2 = \varepsilon_0\frac{A}{d/2} = 2\varepsilon_0\frac{A}{d}$$

Total kapasitans blir ifølge oppgave 13

$$\begin{aligned}
C &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} \\
&= \varepsilon_0\frac{A}{d}\left(\frac{1}{2\varepsilon_r} + \frac{1}{2}\right)^{-1} \\
&= \varepsilon_0\frac{A}{d}\frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1} \\
&= \frac{2\varepsilon_r}{\varepsilon_r + 1}C_0
\end{aligned}$$

Også i denne oppgaven kan vi gå veien om elektrisk forskyvning, indusert og fri ladning osv, og bestemme sammenhengen mellom total fri ladning Q og potensialforskjellen ΔV. Vi har

$$D = \sigma_f = Q/A$$

Her er D konstant i hele området mellom platene ettersom den frie ladningen er jevnt fordelt utover metallplatene (ingen forskjell på høyre og venstre her). Vi har videre

$$D = \varepsilon E_1$$

for sammenhengen mellom elektrisk forskyvning og elektrisk felt i område 1 (= det nederste, med dielektrikum). Dessuten er

$$D = \varepsilon_0 E_2$$

for sammenhengen mellom elektrisk forskyvning og elektrisk felt i område 2 (= det øverste, med vakuum). Potensialforskjellen mellom platene er

$$\Delta V = E_1 \cdot \frac{d}{2} + E_2 \cdot \frac{d}{2}$$

som framkommer ved å ta veiintegralet av $\boldsymbol{E}$ fra den ene til den andre plata. Men da er vi omtrent i mål:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= E_1 \cdot \frac{d}{2} + E_2 \cdot \frac{d}{2} \\
&= \frac{d}{2}\left(\frac{D}{\varepsilon} + \frac{D}{\varepsilon_0}\right) \\
&= \frac{d}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{A\varepsilon_r} + \frac{Q}{A}\right) \\
&= \frac{Qd}{2\varepsilon_0 A} \cdot \frac{1+\varepsilon_r}{\varepsilon_r}
\end{aligned}$$

slik at

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\varepsilon_0 A}{d} \cdot \frac{\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} = \frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r} C_0$$

Det samme som vi fant ved å bruke formelen for seriekobling av to kapasitanser!

19) Her er det elektriske feltet i området mellom indre og ytre metallsylinder oppgitt, så det er bare å regne ut potensialforskjellen direkte:

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V_a - V_b = -\int_b^a E(r)\, dr \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \int_a^b \frac{dr}{r} \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}(\ln b - \ln a) \\
&= \frac{Q}{2\pi\varepsilon L} \ln \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

Følgelig blir sylinderkondensatorens kapasitans

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon L}{\ln b/a}$$

For enkelte vil kanskje det største problemet i denne oppgaven være å holde styr på fortegnet, slik at en ender opp med alternativ C. Da må en huske: Kapasitans er (pr definisjon) en *positiv* størrelse. Ettersom $a < b$, må alt. D være det riktige, fordi logaritmen til et tall mindre enn 1 er negativt.
Dessuten vil vi ha høyest elektrisk potensial ved den positivt ladete lederen. Det følger av definisjonen av elektrisk potensial, som potensiell energi pr ladningsenhet. Tenk deg en liten positiv ladning. Den må da opplagt ha størst potensiell energi hvis vi velger å plassere den i et punkt nær den positivt ladete lederen. Altså har vi her også høyest verdi på det elektriske potensialet. For en liten negativ ladning blir det omvendt: Den vil ha høyest potensiell energi hvis vi velger å plassere den i et punkt nær den negativt ladete lederen. Da må vi her ha *lavest* verdi på det elektriske potensialet, slik at når vi ganger potensialet med den lille negative ladningen, ender vi opp med størst positiv verdi på potensiell energi.

20) Riktig svar er C. Total kapasitans er

$$C_{\text{total}} = \left[\frac{1}{C} + \frac{1}{C+3C}\right]^{-1} = \frac{4C}{5},$$

slik at ladningen Q blir

$$Q = \frac{3}{4} \cdot V_0 \cdot \frac{4C}{5} = 3V_0C/5.$$

Alternativt: La Q_1, Q_2 og $Q_3 = Q$ være ladningene på hhv C øverst, C i parallell og $3C$. Da har vi følgende 3 ligninger (se tips10.pdf):

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_2}{C}, \\ V_0 &= \frac{Q_1}{C} + \frac{Q_3}{3C}, \\ Q_1 &= Q_2 + Q_3. \end{aligned}$$

Fra de to øverste ligningene har vi da

$$Q_2 = Q_3/3,$$

slik at

$$Q_1 = 4Q_3/3.$$

Nå kan V_0 uttrykkes ved Q_3:

$$V_0 = \frac{4Q_3}{3C} + \frac{Q_3}{3C} = \frac{5Q_3}{3C},$$

dvs

$$Q_3 = Q = 3V_0C/5.$$