TFY4104 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 12.

Oppgave 1

I det første eksperimentet er $B = 0$. Da er Newtons 2. lov

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= m\boldsymbol{a} = q\boldsymbol{E} \\
\Rightarrow \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \frac{q}{m}\boldsymbol{E} \\
\Rightarrow \boldsymbol{v}(t) &= \boldsymbol{v}(0) + \frac{q}{m}\boldsymbol{E}t = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \\
\Rightarrow \boldsymbol{r}(t) &= \boldsymbol{r}(0) + \boldsymbol{v}(0)t + \frac{q}{2m}\boldsymbol{E}t^2
\end{aligned}$$

Her er det naturlig å velge $t = 0$ idet partikkelen entrer området med $E \neq 0$, og dessuten velge origo i denne posisjonen:

$$\boldsymbol{r}(0) = (x_0, y_0) = (0, 0)$$

Her er hastigheten

$$\boldsymbol{v}(0) = v\,\hat{x}$$

når vi legger x-aksen mot høyre. y-aksen legger vi oppover, slik at

$$\boldsymbol{E} = -E\,\hat{y}$$

(dvs med $E > 0$) Partikkelbanen inne i feltet blir altså en parabel, akkurat som når vi kaster en masse i tyngdefeltet. Hastigheten i x-retning påvirkes ikke slik at

$$x(t) = vt$$

mens partikkelen får en konstant akselerasjon i y-retning, dvs forflytningen i y-retning som funksjon av t må være bestemt ved

$$y(t) = -\frac{q}{2m}Et^2$$

Partikkelen vil forlate området der $E \neq 0$ ved tidspunktet

$$t_L = \frac{x(t_L)}{v} = \frac{L}{v}$$

Vertikalposisjonen er da

$$y(t_L) = -\frac{q}{2m}E\frac{L^2}{v^2}$$

Allerede nå kan vi konkludere med at $q < 0$ dersom $y(t_L) > 0$.
Distansen fra $x = L$ til $x = L + D$ tilbakelegges deretter uten påvirkning av noen krefter, med retning i forhold til x-aksen gitt ved vinkelen α, der

$$\tan\alpha = \frac{v_y(t_L)}{v_x(t_L)} = \frac{-(q/m)E(L/v)}{v} = -\frac{qEL}{mv^2}$$

Vi må dessuten ha

$$\tan\alpha = \frac{y - y(t_L)}{D}$$

der y er treffpunktet på detektoren, ved $x = L + D$.

Eksperimentet gjentas nå med samme E-felt, men vi skrur nå på et magnetfelt B med retning inn i planet inntil partiklene ikke avbøyes av feltene. Det må bety at den elektriske krafta (oppover) akkurat balanseres av en magnetisk kraft (nedover). Altså:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 0 \\
\Rightarrow E &= vB \\
\Rightarrow \frac{1}{v} &= \frac{B}{E}
\end{aligned}
$$

Dermed:

$$
\begin{aligned}
\frac{y - y(t_L)}{D} &= -\frac{qEL}{mv^2} = -\frac{qEL}{m} \cdot \frac{B^2}{E^2} \\
\Rightarrow y + \frac{q}{2m} EL^2 \frac{B^2}{E^2} &= -\frac{qEL}{m} \cdot \frac{B^2}{E^2} D \\
\Rightarrow yE &= -\frac{q}{m} \cdot B^2 \left(DL + \frac{1}{2} L^2 \right) \\
\Rightarrow \frac{q}{m} &= -\frac{yE}{B^2 \left(DL + \frac{1}{2} L^2 \right)}
\end{aligned}
$$

Dvs,

$$a = \frac{E}{B^2 \left(DL + L^2/2 \right)}$$

Oppgave 2

Ionenes hastighet når de kommer inn i magnetfeltet er gitt ved at endringen i potensiell energi gjennom spenningsforskjellen V tilsvarer endringen i ionenes kinetiske energi:

$$eV = \frac{1}{2} mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

Sentripetalakselerasjonen inne i magnetfeltet er

$$a = \frac{v^2}{r}$$

slik at Newtons 2. lov gir

$$F = m\frac{v^2}{r} = evB \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv}{eB}$$

Baneradius for en partikkel med masse m blir

$$r = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2Vm}{e}}$$

altså proporsjonal med $\sqrt{m}$. Baneradier og masser for de ulike isotopene må altså forholde seg til hverandre på følgende vis:

$$\frac{r_i}{r_j} = \sqrt{\frac{m_i}{m_j}}$$

der $i, j = 79$ eller 81.
Dersom ionenes treffpunkt på den fotografiske platen skal være adskilt med (minst) en avstand $a = 1.0$ cm, må forskjellen i banenes *diameter* være 1.0 cm. Vi får:

$$a = 1.0 \text{ cm } = 2(r_{81} - r_{79}) = 2r_{79} \left(\sqrt{\frac{m_{81}}{m_{79}}} - 1 \right)$$

Det gir

$$r_{79} = \frac{a}{2}\left(\sqrt{\frac{m_{81}}{m_{79}}} - 1\right)^{-1} = 0.5 \text{ cm } \cdot \left(\sqrt{\frac{81}{79}} - 1\right)^{-1} \simeq 39.7 \text{ cm}$$

og

$$r_{81} = r_{79} + \frac{a}{2} \simeq 40.2 \text{ cm}$$

Vi kan nå bestemme hvor sterkt magnetfelt som kan brukes for å få disse baneradiene:

$$B = \frac{1}{r_{81}}\sqrt{\frac{2Vm_{81}}{e}} = \frac{1}{0.402} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \cdot 81 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{1.6 \cdot 10^{-19}}} = 0.065 \text{ T}$$

Dette representerer øvre grense for B: Et sterkere magnetfelt vil redusere både r_{79} og r_{81}, men r_{81} mest, slik at treffpunktene kommer nærmere hverandre. Samtidig skal ikke $d_{81} = 2r_{81}$ overstige instrumentets fysiske begrensning gitt ved $L = 250$ cm. Det tilsvarer en minsteverdi på magnetfeltstyrken:

$$B_{\text{min}} = \frac{1}{L/2}\sqrt{\frac{2Vm_{81}}{e}} = \frac{1}{1.25} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 400 \cdot 81 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}}{1.6 \cdot 10^{-19}}} = 0.021 \text{ T}$$

Vi kan med andre ord benytte et magnetfelt i området 21 til 65 mT.

Oppgave 3

I stor avstand fra strømsløyfa kan vi sette

$$x^2 + R^2 \simeq x^2$$

Dermed blir magnetfeltet tilnærmet lik

$$B(x) \simeq \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3}.$$

Strømsløyfas magnetiske dipolmoment er

$$m = IA = I \cdot \pi R^2,$$

så vi kan skrive dette magnetfeltet på formen

$$B(x) = \frac{\mu_0 m}{2\pi x^3}.$$

Det er vel verdt å sammenligne dette resultatet med det elektriske feltet på aksen til en elektrisk dipol, i stor avstand x fra dipolen:

$$E(x) = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 x^3},$$

der p er dipolens elektriske dipolmoment. Altså nøyaktig samme resultat, med m istedetfor p og μ_0 istedetfor $1/\varepsilon_0$. Det er mange analogier mellom elektrostatikk og magnetostatikk!

Oppgave 4

1) $\boldsymbol{F} = I\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}$, slik at kraftparet nummerert med 1 blir korrekt. **A**.

2) Magnetisk kraft og elektrisk kraft vil her virke i motsatt retning, enten partiklene har negativ eller positiv ladning. A og B kan dermed ikke være riktige. Med null kraft totalt (ingen avbøyning) er $qE = qvB$, dvs

$v = E/B = 10^4/50 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^5$ m/s = 200 km/s. **D**.

3) Elektronets hastighet er (i absoluttverdi) $v = \sqrt{v_0^2 + v_0^2} = \sqrt{2}v_0$. Sirkelbanens radius blir derfor $r = mv/qB_0 = \sqrt{2}m_e v_0/eB_0$. **B**.

4) $B = \mu_0 n I = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (2000/0.3142) \cdot 2$ T = 16 mT. **B**.

5) En regulær sekskant med sidekanter 1 cm har areal $1.5 \cdot \sqrt{3} \simeq 2.6$ cm^2, som multiplisert med en strøm 1.0 A gir magnetisk dipolmoment 2.6 A cm^2. **C**.