

TFY4102 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til øving 13.

1) I en ideell gass er det ingen vekselvirkning mellom molekylene, slik at indre energi U er lik molekylene kinetiske energi K . Toatomige molekyler har 5 kvadratiske ledd i energifunksjonen: $K = (m/2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + (I_0/2)(\omega_x^2 + \omega_y^2)$ (når vi velger z -aksen langs molekylets akse; null treghetsmoment med hensyn på rotasjon omkring molekylets akse for lineære molekyler; intet bidrag fra kinetisk vibrasjonsenergi, da tilgjengelig termisk energi ved normale temperaturer er for liten til å eksitere vibrasjonsbevegelse i toatomige molekyler (utover laveste vibrasjonsenergitilstand, den såkalte grunntilstanden)). Ekvipartisjonsprinsippet sier at hvert kvadratiske ledd i energifunksjonen gir et bidrag $k_B T/2$ til indre energi U pr molekyl når systemets temperatur er T . Dermed er $U(T) = 5Nk_B T/2$ for en ideell toatomig gass. Da er $C_V = (dQ/dT)_V = (dU/dT)_V$ (siden $dW = p dV = 0$ når eksperimentet foretas ved konstant volum), dvs $C_V = 5Nk_B/2$. Hvis eksperimentet foretas ved konstant trykk, er $C_p = (dQ/dT)_p = (dU/dT)_p + p(dV/dT)_p = 5Nk_B/2 + p \cdot Nk_B/p = 7Nk_B/2$. Riktig svar: C.

2) Arbeid utført pr syklus er gitt ved arealet som omslutes av kurven $p(V)$. Her blir da $W = (5p_0 - p_0) \cdot (4V_0 - V_0) = 12p_0V_0$. Riktig svar: C.

3) La oss nummerere de fire hjørnene av den rektangulære $p(V)$ -kurven fra 1 til 4, med klokka, og med tilstand 1 oppe til venstre, dvs $p_1 = 5p_0$ og $V_1 = V_0$. Ideell gass tilstandsligning gir da $T_1 = p_1V_1/Nk_B = 5p_0V_0/Nk_B$, $T_2 = p_2V_2/Nk_B = 20p_0V_0/Nk_B$, $T_3 = p_3V_3/Nk_B = 4p_0V_0/Nk_B$, og $T_4 = p_4V_4/Nk_B = p_0V_0/Nk_B$. I stigende rekkefølge, og i enheten p_0V_0/Nk_B blir dette $T_4 = 1$, $T_3 = 4$, $T_1 = 5$ og $T_2 = 20$. Riktig svar: D.

4) Varme som overføres fra omgivelsene til gassen er $C_p \Delta T$ for de to isobare delprosessene (12 og 34), og $C_V \Delta T$ for de to isokore delprosessene (23 og 41). Siden temperaturen i gassen avtar fra tilstand 2 til tilstand 3, og fra tilstand 3 til tilstand 4, er dette delprosesser der varme *avgis* fra gassen til omgivelsene. Dette er ikke varme som vi må betale for, og skal dermed ikke regnes med når virkningsgraden skal beregnes. I den isobare utvidelsen fra 1 til 2 og i den isobare trykkøkningen fra 4 til 1, derimot, øker temperaturen i gassen. Dette gir positiv varmeoverføring fra omgivelsene til gassen, slik at Q_{12} og Q_{41} skal regnes med ved beregning av η . Her blir $Q_{12} = (7Nk_B/2) \cdot (T_2 - T_1) = 105p_0V_0/2$ og $Q_{41} = (5Nk_B/2) \cdot (T_1 - T_4) = 10p_0V_0$. I alt blir $Q_{\text{inn}} = 125p_0V_0/2$, slik at virkningsgraden er

$$\eta = W/Q_{\text{inn}} = 12/(125/2) = 24/125 \simeq 0.19.$$

Riktig svar: A.

Kommentar: En Carnot-prosess med isotermer ved høyeste (T_2) og laveste (T_4) temperatur i den aktuelle prosessen ville hatt virkningsgrad $\eta_C = 1 - T_4/T_2 = 1 - 1/20 = 0.95$. Dette er en øvre teoretisk grense, og vi ser at vår kretsprosess har virkningsgrad (0.19) betydelig mindre enn dette.

5) Isobar utvidelse fra a til b betyr at $T_a < T_b$. Isoterm utvidelse fra b til c betyr at $T_b = T_c$. Adiabatisk kompresjon fra d til a betyr at $T_d < T_a$ (siden en adiabat er brattere enn en isoterm i et pV -diagram). Dermed er $T_d < T_a < T_b = T_c$. Riktig svar: B.

6) Isobar kompresjon fra a til b betyr at $T_a > T_b$. Isoterm utvidelse fra b til c betyr at $T_b = T_c$. Adiabatisk kompresjon fra d til a betyr at $T_d < T_a$ (siden en adiabat er brattere enn en isoterm i et pV -diagram). Dermed er $T_b = T_c < T_d < T_a$. Riktig svar: D.

7) En Carnot-varmepumpe har effektfaktor

$$\varepsilon_C^C = |Q_2/W| = |Q_2/(Q_2 + Q_1)| = |1/(1 + Q_1/Q_2)| = |1/(1 - T_1/T_2)| = T_2/(T_2 - T_1).$$

Her er T_2 temperaturen til det varme reservoaret, dvs inne i stua, og T_1 er temperaturen til det kalde reservoaret, dvs ute. Din venn hevder at han oppnår $Q_2 = 10$ kW med $W = 1$ kW når $T_1 = 253$ K. Dette høres

veldig mye ut: Hvis vi går ut fra at din venn i hvert fall har 15 varmegrader inne i stua, dvs minst $T_2 = 288$ K, vil en Carnot-varmepumpe ikke kunne levere mer enn $Q_2 = W \cdot T_2 / (T_2 - T_1) = 1 \cdot 288 / 35 = 8.2$ kW. Mer enn dette vil det ikke være mulig å få ut av en reell varmepumpe, og i praksis vil nok effektfaktoren være en god del mindre enn som så. Men du kan trygt gratulere din venn med en god investering – en god varmepumpe kan gi god fyringsøkonomi i dag. Du kan tillate deg alternativ C, eventuelt alternativ B, hvis du ikke er av den snakkesalige typen. Men A og D vil ikke se bra ut.

8) En Carnot-kjølemaskin har effektfaktor

$$\varepsilon_K^C = |Q_1/W| = |Q_1/(Q_1 + Q_2)| = |1/(1 + Q_2/Q_1)| = |1/(1 - T_2/T_1)| = T_1/(T_2 - T_1).$$

Dermed: $W = Q_1 \cdot (T_2 - T_1)/T_1 = 500 \cdot 33/255 = 65$ W. Riktig svar: B.

9) Tilført varme: $Q_2 = 8$ kJ pr syklus. Netto utført arbeid: $W = 2$ kJ pr syklus. Virkningsgrad: $\eta = W/Q_2 = 2/8 = 0.25$. Riktig svar: B.

10) Avgitt varme pr syklus: $|Q_1| = |W - Q_2| = |2 - 8| = 6$ kJ. Riktig svar: C.

11) Forbrent mengde bensin pr syklus: $8 \text{ kJ} / 46 \text{ kJ/g} = 0.17$ g. Riktig svar: A.

12) Motorens effekt (med $t =$ perioden): $P = W/t = 2 \text{ kJ} / (1/120) \text{ s} = 240 \text{ kJ/s} = 240$ kW. Riktig svar: C.

13) For adiabatisk prosesser er $TV^{\gamma-1} =$ konstant. Dermed: $T_2 = T_1 \cdot (V_1/V_2)^{\gamma-1} = 295 \text{ K} \cdot 8^{0.4} = 678 \text{ K} = 405^\circ\text{C}$. Riktig svar: C.

14) For adiabatisk prosesser er $pV^\gamma =$ konstant. Dermed: $p_2 = p_1 \cdot (V_1/V_2)^\gamma = 85 \text{ kPa} \cdot 8^{1.4} \simeq 1560 \text{ kPa} = 1.56$ MPa. Riktig svar: C.

15) I forelesningene utledet vi virkningsgraden for en reversibel Otto-syklus:

$$\eta = |W/Q_{\text{inn}}| = \dots = 1 - (V_1/V_2)^{1-\gamma} = 1 - 8^{-0.4} = 0.56.$$

Riktig svar: C.

16) Carnot-prosessen består av to isotermer (konstant T) og to adiabater (konstant S). I et ST -diagram blir derfor Carnot-prosessen et rektangel. Riktig svar: B. (Strengt tatt er vel et rektangel et spesialtilfelle av både rombe, parallelogram og trapes, slik at alle fire alternativ kan hevdes å være riktige.)

17) I en adiabatisk, reversibel prosess er $dS = dQ/T = 0$ langs hele prosessen, dvs $\Delta S = S_B - S_A = 0$. Entropien S er en tilstandsfunksjon. Da spiller det ingen rolle hvordan vi bringer systemet fra tilstand A til tilstand B, endringen ΔS er den samme uansett. Riktig svar: A.

18) Smelting av isen skjer ved den konstante temperaturen $T_s = 273$ K, og systemet tilføres varme (den såkalt latente varmen, eller rett og slett smeltevarmen L_s). Da øker entropien i 1 kg is/vann, med mengden $\Delta S = L_s/T_s = 335 \text{ kJ} / 273 \text{ K} = 1.23 \text{ kJ/K}$. Riktig svar: A.

19) Ved kondensasjon avgir vannet varme til omgivelsene, ved konstant temperatur $T_f = 373$ K (f for fordampning, siden vi vel har benyttet indeksen k for koking). Da avtar entropien i 1 kg vanddamp/vann, med mengden $\Delta S = -L_f/T_f = -2272 \text{ kJ} / 373 \text{ K} = -6.09 \text{ kJ/K}$. Riktig svar: B.

20) Hvis jorda er i termisk likevekt, mottas like mye varme Q via strålingen fra sola som jorda selv stråler ut. Da mottar jorda entropien $S_{\text{inn}} = Q/T_{\text{sol}}$, og avgir entropien $S_{\text{ut}} = Q/T_{\text{jord}}$. Forholdet mellom avgitt

og mottatt entropi er $S_{\text{ut}}/S_{\text{inn}} = T_{\text{sol}}/T_{\text{jord}} = 5800/290 = 20$. Med andre ord, jordas samlede entropi avtar (betraktelig) som følge av varmestrålingen inn og ut. Riktig svar: C. I tillegg til dette kommer all verdens irreversible prosesser på jorda, og disse medfører alle en netto entropiøkning. Det totale entropiregnskapet for jorda er det dermed ikke så lett å si noe sikkert om. Til tross for termodynamikkens 2. lov er det ikke sikkert at vi går mot en tilstand med stadig større entropi, og dermed stadig større grad av uorden og kaos. Jorda er ikke et termisk isolert system.

21) Den varmen som den varmeste klossen avgir absorberes i sin helhet av den kaldeste klossen. Siden de to klossene har like stor varmekapasitet C , må det bety at temperaturøkningen ΔT i den kalde klossen er like stor som temperaturreduksjonen i den varme klossen. Felles slutt-temperatur blir dermed $T_s = (T_1 + T_2)/2$. Riktig svar: B.

22) Fra den termodynamiske identitet (1. hovedsetning) har vi generelt $dS = dU/T + (p/T)dV$. Her er $dV = 0$, og med $dU = C_V dT$ og $C_V = C_p = C$ er $dS = C dT/T$ for en "tenkt" reversibel varmeutjevning, for hver av de to klossene. Total entropiendring blir:

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_f - S_i = \int_i^f (dS_1 + dS_2) \\ &= C \int_{T_1}^{(T_1+T_2)/2} \frac{dT}{T} + C \int_{T_2}^{(T_1+T_2)/2} \frac{dT}{T} \\ &= C \ln \frac{T_1 + T_2}{2T_1} + C \ln \frac{T_1 + T_2}{2T_2} \\ &= C \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} \\ &= C \ln \left(1 + \frac{(T_1 - T_2)^2}{4T_1 T_2} \right) \end{aligned}$$

Her skrev vi om argumentet til logaritmefunksjonen for å se klart at den totale entropien øker. ($\ln(1+x) > 0$ når $x > 0$.) Riktig svar: D.

23) Reversibel utvidelse ved konstant trykk p innebærer tilførsel av varme, og $dQ = C_p dT$, med $C_p = 7Nk_B/2$ for ideell toatomig gass. Dermed er $dS = dQ/T = C_p dT/T$, og $\Delta S = S_f - S_i = C_p \ln(T_f/T_i)$. Her angir f slutt-tilstanden og i angir start-tilstanden (som i forrige oppgave). Hvis trykket er konstant og volumet dobles, dobles også temperaturen: $T_f = 2T_i$. Entropiendringen pr molekyl er dermed $\Delta s = \Delta S/N = (7/2)k_B \ln 2 \simeq 2.43k_B$. Riktig svar: D.