TFY4104/TFY4115 Fysikk Eksamen 6. desember 2018

Løsningsforslag Oppgave 1 – 25 Mekanikk

1) A: Ingen horisontale krefter på kula, så $a_x = 0$, v_x er konstant, og x øker lineært med tiden t.

2) A: Energibevarelse gir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_1^2 + mga &= \frac{1}{2}mv_2^2 + mgb \\ \Rightarrow v_2 &= \left[v_1^2 + 2g\,(a-b)\right]^{1/2} \end{aligned}$$

3) D: Pianoet står i ro, så total kraft på det er null. Horisontalt påvirkes pianoet av deg, dvs skyvkraften på 700 N, og en motsatt rettet og like stor friksjonskraft fra teppet.

4) E: Impulsbevarelse: $|p_2| = |p_3| = p$. Det gir $K_3/K_2 = (p^2/6m)/(p^2/4m) = 2/3$, slik at $K_2/(K_2+K_3) = K_2/(5K_2/3) = 3/5 = 60\%$.

5) B: Beltedelen som har kontakt med underlaget står i ro. Øvre horisontale beltedel har dobbelt så stor hastighet som gravemaskinen.

6) E:

$$A = 4\pi r^2 = 15.205\,\mathrm{cm}^2$$

For å anslå usikkerheten i A, kan vi regne ut A med radius hhv 11.1 og 10.9 mm. Dette gir hhv 15.483 og 14.930 cm^2, så vi ser at usikkerheten i A er ca ± 0.3 cm^2. Alternativt, og litt raskere, kan vi si at

$$\Delta A/A = 2\Delta r/r \quad \Rightarrow \quad \Delta A = 2A\Delta r/r \simeq 0.3\ \mathrm{cm}^2$$

7) B:

$$m = \rho V = 7.86\ \mathrm{g/cm}^3 \cdot (4\pi/3) \cdot 1.1\,\mathrm{cm}^3 = 43.8\ \mathrm{g}$$

8) E:

$$I_0/m = 2r^2/5 = 48.4\ \mathrm{mm}^2$$

9) A:

$$K = mv^2/2 + I_0\omega^2/2 = 7mv^2/10$$

Starthøyde: $y_0 \cdot (1.2^4 - 1.2^2) = 0.6336 y_0$. Dermed:

$$|\Delta U| = K \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{10g \cdot 0.6336 y_0/7} = 149\,\mathrm{cm/s}$$

10) C: Helningsvinkel gitt ved $\tan\theta = dy/dx$, med

$$dy/dx = y_0(4x^3/L^4 - 2x/L^2).$$

I hver ende er $x = \pm 6L/5$ som gir

$$|dy/dx|_{\max} \simeq 4.5y_0/L = 0.45.$$

Det gir en (maksimal) helningsvinkel $\theta_{\max} = \arctan 0.45 = 24°$.

11) A: I banens to bunnpunkter (og det lokale topp-punktet ved $x = 0$) er $dy/dx = 0$: $dy/dx \sim 4x^3/L^4 - 2x/L^2 \sim 4x^2/L^2 - 2 = 0$ for $x = \pm L/\sqrt{2}$. Her er $d^2y/dx^2 = y_0(12x^2/L^4 - 2/L^2) = y_0(6-2)/L^2 = 4y_0/L^2 = 1/\rho$, slik at krumningsradien er $\rho = L^2/4y_0 = 625$ cm.

12) B: Kinetisk energi øker lineært med tiden: $K(t) = A(t - t_0)$. Da er tilført effekt konstant: $P = dK/dt = A$. Dvs, $P = Fv = mav = A$ er konstant. Siden $K = mv^2/2$, vil $v \sim \sqrt{t}$ og $a \sim 1/\sqrt{t}$, og dermed vil $F \sim 1/\sqrt{t}$.

13) C: Energibevarelse gir $kx^2/2 = mv^2/2$, dvs $k = mv^2/x^2 = 0.042 \cdot 0.42^2/0.042^2 = 4.2$ N/m.

14) D: Fra figuren ser vi at $\rho(R) = \rho_0/4$, som betyr at $\alpha = 3/4$.

15) B: Et tynt kuleskall med radius r og tykkelse dr har volum $dV = 4\pi r^2 dr$ (oppgitt), og følgelig masse $dm = \rho(r)dV = \rho_0(1 - \alpha r/R) \cdot 4\pi r^2 dr$. Hele jordas masse bestemmes ved å legge sammen massene til slike tynne kuleskall, fra innerst ($r = 0$) til ytterst ($r = R$):

$$\begin{aligned} M &= \int dm = \int_0^R \rho_0\,(1 - \alpha r/R) \cdot 4\pi r^2 dr \\ &= 4\pi\rho_0 \Big|_0^R \left(\frac{r^3}{3} - \frac{\alpha r^4}{4R}\right) \\ &= 4\pi\rho_0 \left(\frac{4R^3}{12} - \frac{3\alpha R^3}{12}\right) \\ &= \frac{\pi(4 - 3\alpha)}{3}\,\rho_0 R^3. \end{aligned}$$

Altså er $\beta = \pi(4 - 3\alpha)/3$.

16) D: $a = v^2/r = (100/3.6)^2/(250/2\pi) = 19.4$ m/s^2.

17) B: $x(t) = x_0 \sin\omega t$, $v(t) = \omega x_0 \cos\omega t$, $a(t) = -\omega^2 x_0 \sin\omega t$. Her er $x_0 = 3.3$ cm og $\omega^2 x_0 = 9.6$ cm/s^2, slik at $\omega = \sqrt{9.6/3.3} = 1.7$ s^{-1}. Dermed

er maksimal hastighet $\omega x_0 = 5.6$ cm/s.

18) A: N2 for "restraketten" er $u \cdot dm/dt = m \cdot dv/dt$, dvs $dm/m = dv/u$, som integrert gir $\ln(m/m_0) = (v - v_0)/u$, dvs $m = m_0 \exp((v - v_0)/u) = m_0 \exp(-(v - v_0)/|u|)$, ettersom $u < 0$. Med $v - v_0 = 1.4$ km/s, $|u| = 2.6$ km/s og $m_0 = 7.5 \cdot 10^5$ kg, er rakettens masse redusert fra m_0 til $m = 0.584 m_0 = 4.38 \cdot 10^5$ kg ved fartsdoblingen. Dette tilsvarer en massereduksjon på $3.12 \cdot 10^5$ kg. Det forbrukes $0.13 \cdot 10^5$ kg bensin pr sekund. Følgelig har det tatt $3.12/0.13 = 24$ sekunder å doble farten.

19) C: $L = L_b + L_s = mrv + (2/5)mr^2 \cdot v/r = 7mrv/5 = 7 \cdot 0.130 \cdot 0.02625 \cdot 1.0/5 = 4.78 \cdot 10^{-3}$ kg m^2/s (Js).

20) A: Dette er rotasjon med konstant vinkelakselerasjon α bestemt av N2 for rotasjon, $\alpha = \tau/I_0 = Fr/I_0$. Her har vi et tynt kuleskall, og $I_0 = (2/3)mr^2$. Rotert vinkel er dermed $\phi = (1/2)\alpha t^2 = (3F/4mr)t^2 = (3 \cdot 20/4 \cdot 0.0027 \cdot 0.020) \cdot 10^{-6} = 0.278$ radianer $= 16$ grader.

21) D: Med utsving x fra likevekt virker kreftene fra de to fjærene i samme retning, slik at N2 blir $m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$. Da er perioden $T = 2\pi\sqrt{m/(k_1 + k_2)} = 2\pi\sqrt{0.050/145} = 0.12$ s.

22) A: Eksakt forflytning er $s(t_1) = v_0 t_1 + a t_1^2/2 = 0.01217$ m. Numerisk:
$s_1 = s_0 + v_0 \Delta t = 0.4 \cdot 0.025 = 0.010$ m
Feil i s_1: $0.01217 - 0.010 = 0.00217$ m $\simeq 2.2$ mm.

23) C: Energibevarelse: $mgh = mv^2/2$, slik at $v = \sqrt{2gh} = 27.66$ m/s $= 100$ km/t.

24) A: Vi finner v_y som funksjon av rotert vinkel" ϕ med energibevarelse og figurbetraktning: Vertikal forflytning er $\Delta y = h \sin\phi$, og $v_y = v \cos\phi$. Dermed: $v_y = \sqrt{2gh \sin\phi}\cos\phi$. Maksverdi når $dv_y/d\phi = 0$, eller kanskje litt enklere, når $dv_y^2/d\phi = 0$:

$$dv_y^2/d\phi = 2gh\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi - \sin^3\phi\right) \sim \cos\phi(1 - 3\sin^2\phi) = 0$$

dersom $\phi = \arcsin(1/\sqrt{3}) = 35$ grader.

25) D: Amplitudereduksjon 0.03 prosent pr periode betyr at $e^{-\gamma T} = 0.9997$. Videre er $Q = \omega_0/\Delta\omega = 2\pi/2\gamma T = \pi/\gamma T$. Dermed: $Q = -\pi/\ln 0.9997 = 10^4$.