(a) Fullstendig uelastisk:

$$v' = V' = \frac{mv + MV}{m+M}$$

(b) Delvis uelastisk: Kun 1 ligm. ($\Delta p = 0$) for 2 ukjente (v', V'). Må ha 1 opplysning ekstra.

(c) Elastisk, $\Delta K = 0$:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$$

$$\Rightarrow \quad m(v+v')(v-v') = M(V'+V)(V'-V) \qquad (1)$$

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \quad m(v-v') = M(V'-V) \qquad (2)$$

$$(1)/(2) \Rightarrow \quad v + v' = V + V'$$

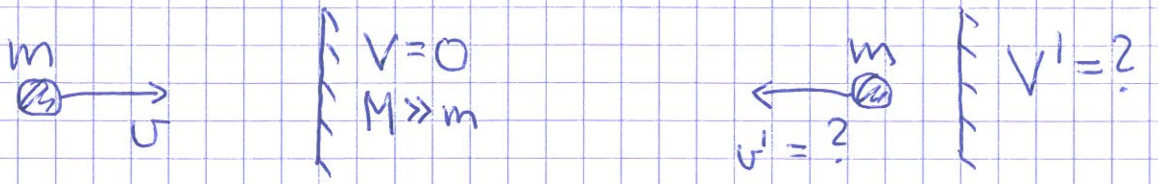
$$\Rightarrow \quad v' - V' = -(v - V) \qquad (3)$$

(2) og (3) gir

$$v' = \frac{M}{m+M}\left(2V + v\,\frac{m-M}{M}\right)$$

$$V' = \frac{m}{M+m}\left(2v + V\,\frac{M-m}{m}\right)$$

Eks: Ball mot vegg, elastisk.



Løsn: $v' = \frac{M}{m+M}\left(0 + v\,\frac{m-M}{M}\right) \approx \frac{M}{M}\cdot v \cdot \left(\frac{-M}{M}\right) = \underline{-v}$

$$V' = \frac{m}{M+m}\left(2v + 0\right) \approx \frac{m}{M}\cdot 2v \approx \underline{0}$$

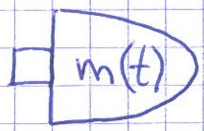
Er $\Delta p = 0$?

$$\left.\begin{array}{l} p = mv,\ P = MV = 0,\ p' = mv' = -mv, \\ P' = MV' \approx M\cdot\frac{m}{M}\cdot 2v = 2mv \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\Delta p = 0}$$

Er $\Delta K = 0$?

$$\left.\begin{array}{l} K_m = \frac{1}{2}mv^2,\ K_M = 0,\ K_m' = \frac{1}{2}mv^2, \\ K_M' = \frac{1}{2}MV'^2 \approx \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}2v\right)^2 = 2\frac{m}{M}mv^2 \approx 0 \end{array}\right\} \Downarrow\ \underline{\Delta K = 0}$$

Rakettprinsipp [YF 8.6 ; LL 5.4]

Før (t) : 

$\xrightarrow{v(t)}$ $p(t) = m(t)v(t)$

Etter $(t+dt)$: $v_e \longleftarrow$ eksos dm_e 

$\longrightarrow v(t+dt)$

$$p(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)+dm}\underbrace{v(t+dt)}_{v(t)+dv} + \underbrace{dm_e}_{-dm}\cdot\underbrace{v_e(t)}_{v(t)+u}$$

u = eksoshastighet relativt raketten $= v_e - v \quad < 0$

dm = rakettens masseendring i løpet av $dt \quad < 0$

$\Rightarrow$

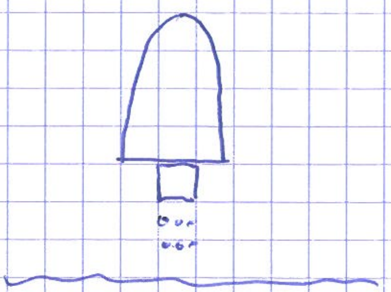
$$p(t+dt) = \underbrace{m(t)v(t)}_{p(t)} + m(t)dv + \underbrace{v(t)dm - v(t)dm}_{0} - u\,dm$$

Med $F_{ytre} = 0$ (outer space) er $p(t+dt) = p(t)$

$\Rightarrow \quad m\,dv = u\,dm$

$\Rightarrow \quad \underbrace{m\,dv/dt}_{m\cdot a} = u\,dm/dt = \underbrace{u\dot{m}}_{F_{skyv}} \quad (> 0)$

I tyngdefeltet:



$\downarrow g \qquad F_{ytre} = -mg$

$\Rightarrow$ Total kraft på (rest-)raketten blir

$$F_{skyv} + F_{ytre} = u\dot{m} - mg$$

Som gir

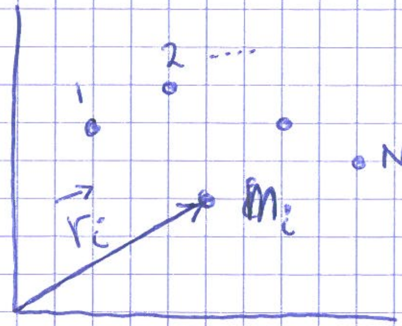
$$ma = u\dot{m} - mg \qquad (N2)$$

Hittil: "Punktmasser"

Nå: Partikkelsystemer. Stive legemer.

Massesenter. Tyngdepunkt

[YF 8.5, oppg 8.115+8.116 ; LL 5.6, 5.8, 6.1]

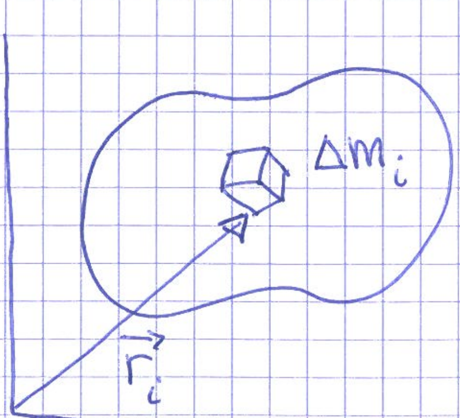


Massesenter (CM) for N punktmasser $m_1\ m_2 \cdots m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1\ \vec{r}_2 \cdots \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$M = \sum_i m_i$ = total masse

Kontinuerlig massefordeling:



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \underset{\Delta m_i \to 0}{=} \frac{\int \vec{r}\, dm}{\int dm}$$

$$= \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm$$

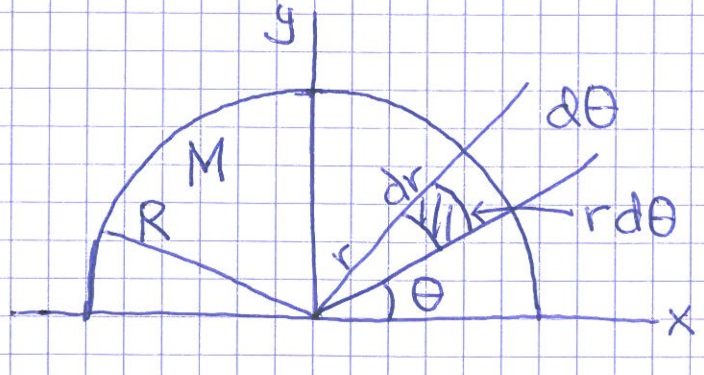
integral over der vi har masse

3D : $dm = \rho\, dV$, ρ = masse pr volumenhet,
dV = volumelement

2D : $dm = \sigma\, dA$, σ = masse pr flateelement,
dA = flateelement

1D : $dm = \lambda\, d\ell$, λ = masse pr lengdeenhet,
$d\ell$ = linjeelement

Eks: Halvsirkulær tynn skive

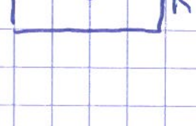


$$dA = dr \cdot r\, d\theta$$

$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} = \frac{r\, dr\, d\theta}{\frac{1}{2}\pi R^2}$$

$$\vec{r} = \hat{x}\, r\cos\theta + \hat{y}\, r\sin\theta$$

$\vec{R}_{CM} = \hat{x}\, X_{CM} + \hat{y}\, Y_{CM}$; $X_{CM} = 0$ pga symmetri

$Y_{CM} \lesssim R/2$ (rektangel  gir $Y_{CM} = R/2$)

Exp. gir $Y_{CM} \approx 7R/18$ (papp og pinne!)

$$Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \int r\sin\theta \,\frac{dA}{A} =$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} r\sin\theta \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\underbrace{\int_0^R r^2\,dr}_{\frac{1}{3}R^3} \cdot \underbrace{\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta}_{\left.(-\cos\theta)\right|_0^{\pi} = 1+1 = 2}$$

$$\underline{\underline{= \frac{4}{3\pi}R \approx 0.42\,R}}$$

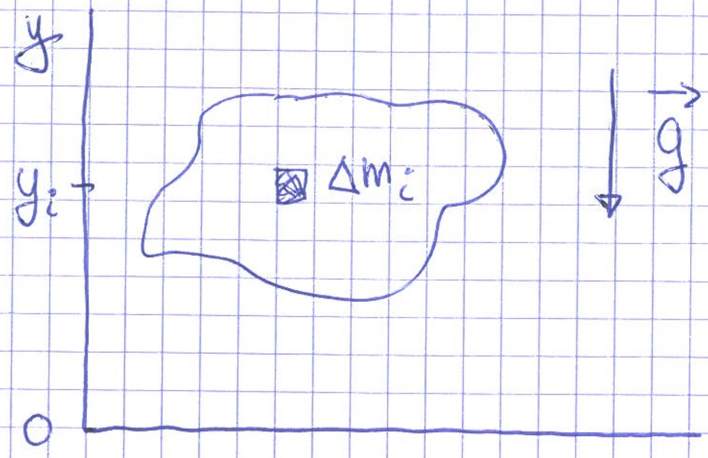
Vis selv:

Halvsirkulær tynn stang: $Y_{CM} = \frac{2}{\pi}R$ (1D)

Kompakt halvkule: $Y_{CM} = \frac{3}{8}R$ (3D)

[Tips: Omdreining av skiva rundt y-aksen gir halvkule, med volumelement $dV = dA \cdot 2\pi x$. Integrasjon over r fra 0 til R og over θ fra 0 til $\pi/2$ (hvorfor ikke π?!) får med all massen. Volum av halvkule kjenner du (?)]

Potensiell energi U for partikkelsystem i tyngdefeltet



Velger $U(0) = 0$

$$U = \sum_i \Delta U_i = \sum_i \Delta m_i \, g \, y_i$$

Hvis g = konst.:

$$U = g \sum_i \Delta m_i y_i = \underline{g M Y_{CM}}$$

det samme som om hele massen $M = \sum_i \Delta m_i$ var samlet i høyden Y_{CM}!

(Og da f.eks. i nettopp $\vec{R}_{CM}$)

[Dette har vi antatt "hele livet".

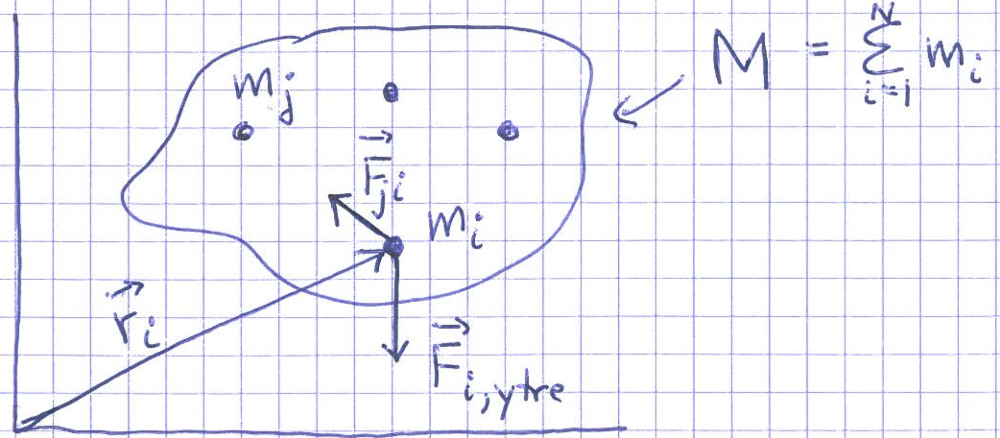
Nå vet vi at det er OK!]

Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5; LL 5.8]

Skal se at: $\boxed{M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$

Dvs:

Tyngdepunktet $\vec{R}_{CM}$ beveger seg som om hele massen M var samlet i $\vec{R}_{CM}$ og ble utsatt for summen av alle ytre krefter, $\vec{F}_{ytre}$, som virker på systemet!



N2 for m_i:

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ytre}}_{\text{total ytre kraft på } m_i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{total indre kraft på } m_i}$$

Legg sammen N2 for alle massene:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,ytre}}_{\substack{= \text{netto ytre} \\ \text{kraft } \vec{F}_{ytre} \\ \text{på systemet}}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\substack{= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N} \\ = 0 \quad (\text{pga N3})}}$$

Venstre side:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2}\left\{\sum_i m_i \vec{r}_i\right\} = \frac{d^2}{dt^2}\left\{M\vec{R}_{CM}\right\} = M\ddot{\vec{R}}_{CM}$$

Dermed: $\boxed{M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$

Bevegelse i tillegg til tyngdepunktbevegelsen:

- Rotasjon om CM
- Vibrasjon relativt CM

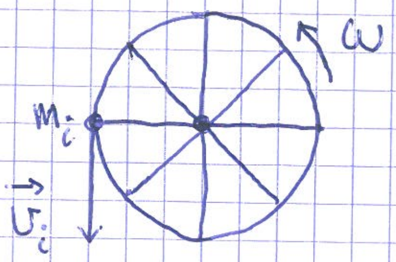
Stive legemer:

Kun translasjon av CM + rotasjon om CM

ROTASJON [YF 9,10; LL 6 (5)]

Innledning:

- Roterende hjul



CM i ro $\Rightarrow K_{trans} = 0$, men

$K_{rot} \neq 0$

Impuls?

$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$, men

dreieimpuls $\neq 0$

- Rulling

Hvor angriper kreftene?

Dreiemoment!

Hvorfor er $v_k > v_s$?

Friksjonens rolle

- Mer komplisert dynamikk

Presesjon

Gyroskop