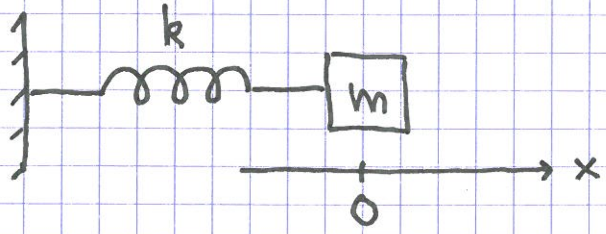
SVINGNINGER [YF 14; LL 9]

= oscillasjoner

= periodisk oppførsel omkring likevekt

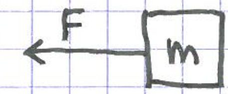
Eks: masse/fjær, pendel, gitarstreng, luft i orgelpipe, atomer i molekyler og krystaller ...

Harmonisk oscillator [YF 14.2; LL 9.1-9.3]

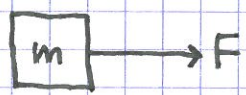


Likevekt ($F = 0$) med m (CM) i $x = 0$

Strukket fjær, $x > 0$:



Sammenpresset fjær, $x < 0$:

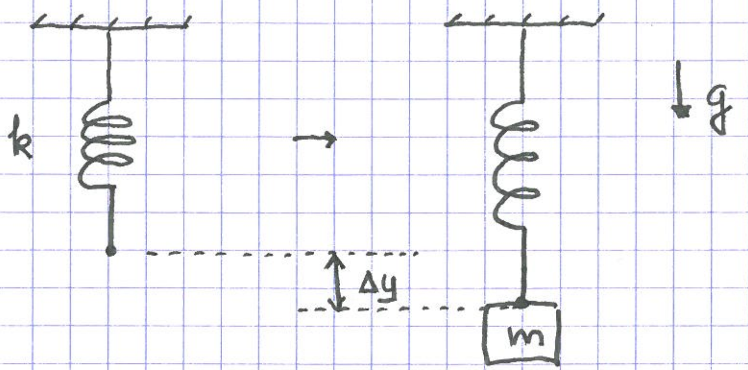


Hookes lov (ideell fjær): $|F| \sim |x|$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = -kx\,\hat{x}}$$

Fjærkonstanten : k $\qquad [k] = N/m$

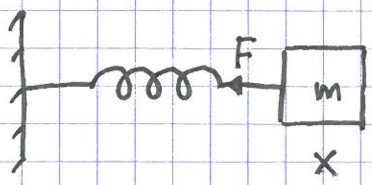
Vertikalt i tyngdefeltet:



Likevekt:

$k \, \Delta y = mg$

$\Rightarrow \quad \Delta y = mg/k$



N2: $\quad -kx = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

Innfør $\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ Enkel harm. osc. i en dimensjon

Løsning: Frie svingninger uten demping.

Ser at både $\sin \omega_0 t$ og $\cos \omega_0 t$ løser ligningen, siden $\frac{d^2}{dt^2}(\sin \omega_0 t) = -\omega_0^2 \sin \omega_0 t$, og tilsvarende for $\cos \omega_0 t$.

Generell løsning:

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ evt $x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$

Int. konst. A, φ evt. B, C fastlegges med 2 initialbetingelser,

f.eks: $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

[$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ gir relasjoner mellom A, φ og B, C]

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

A = amplitude = max utsving fra likevekt ; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkelfrekvens ; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr svingning ; $[T] = s$

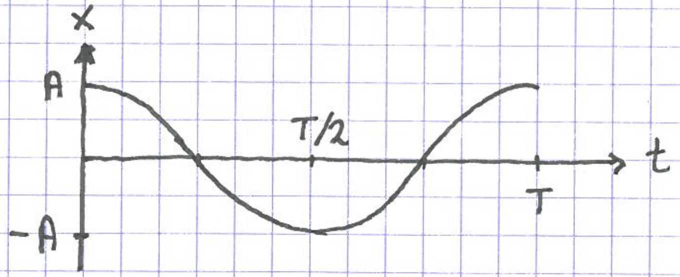
$f = 1/T$ = frekvens = svingninger pr tidsenhet ; $[f] = Hz = s^{-1}$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant ; $[\varphi] = 1$

Anta f.eks. $\varphi = 0$ og $A > 0$:

$x(t) = A \cos \omega_0 t$



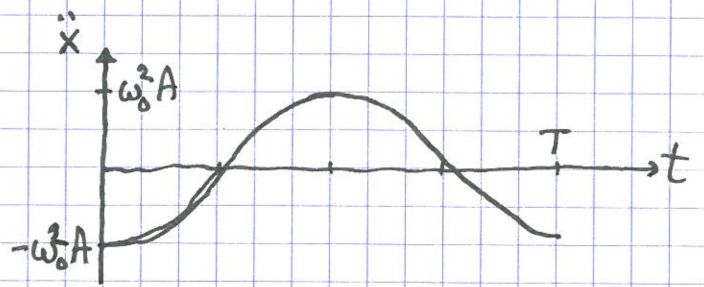
$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t$

$= \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t$

$= -\omega_0^2 x$

$= \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \pi)$



Energi i harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4]

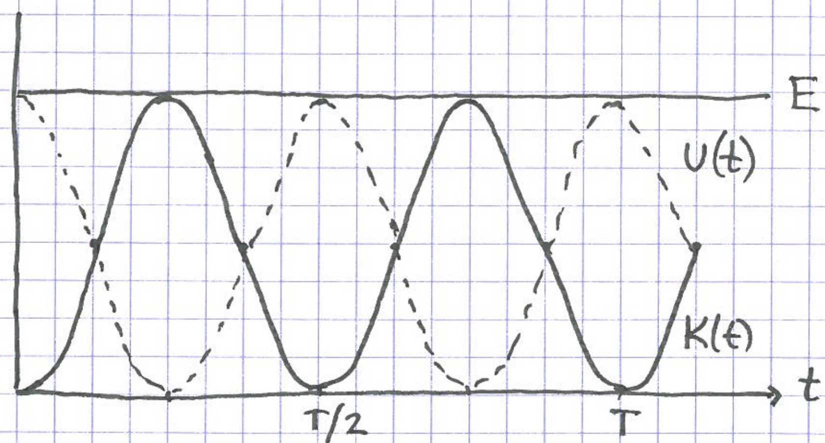
$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

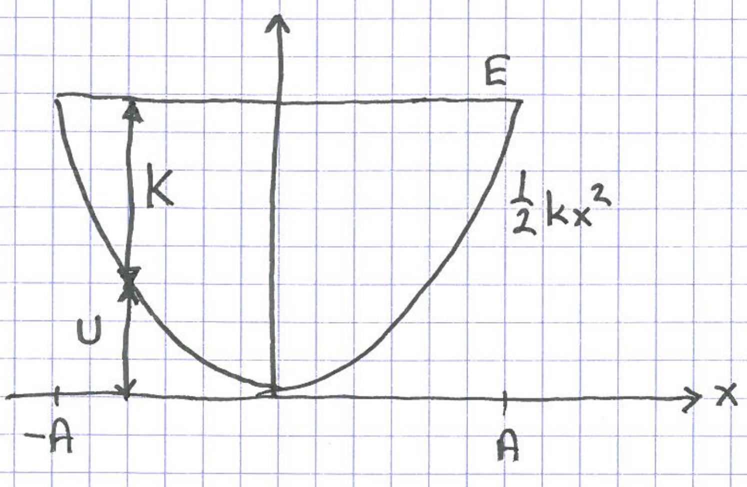
$$U = -\int_0^x F(x)\,dx = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2} k x^2$$

$$U(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$\Rightarrow$ Systemet er konservativt, dvs E er bevart ($E =$ mek. energi):

$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 (\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t) = \frac{1}{2} k A^2 = \text{konst.}$$

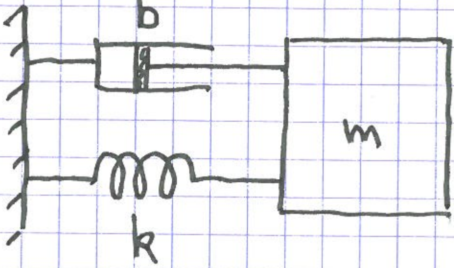




Dempet fri svingning [YF 14.7 ; LL 9.7]

67

Antar $f = -b\dot{x}$, dvs friksjon i fluid (langsom bevegelse).



Netto kraft på m:

$-kx - b\dot{x}$

N2 : $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

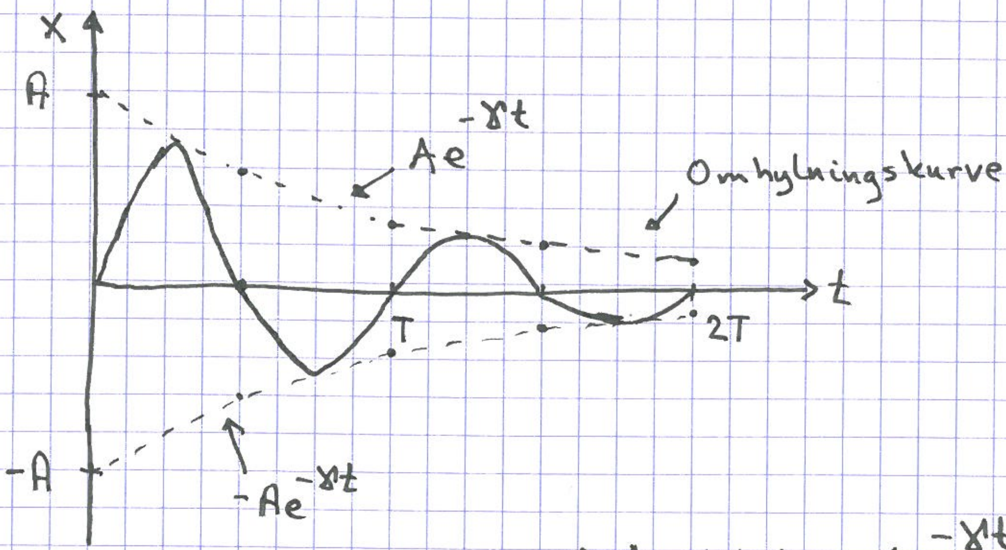
$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$; $\gamma = b/2m$, $\omega_0^2 = k/m$

$[\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$

Løsning:

Underkritisk (svak) demping, $\gamma < \omega_0$ $(b < 2\sqrt{k \cdot m})$

$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi)$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$

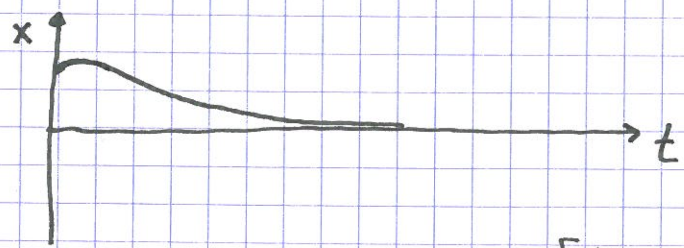


$\Rightarrow$ Amplituden $Ae^{-\gamma t}$ avtar eksponentielt med t

Overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$:

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad , \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

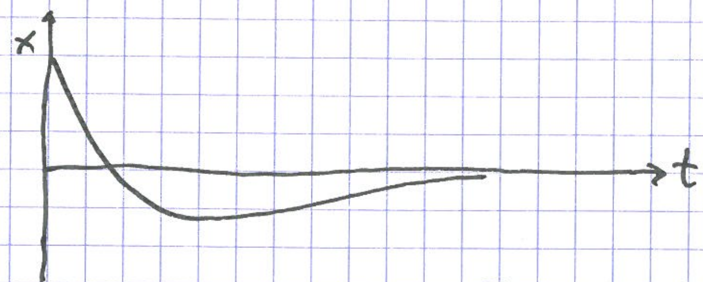


Ingen svingninger

[Her: $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) > 0$]

Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$



[Her: $x(0) > 0$, $\dot{x}(0) < 0$]

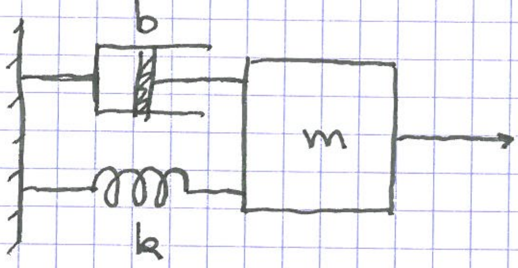
Eks: Støtdempere i (f.eks) bil.

Mest behagelig med $\gamma \approx \omega_0$ på humpete veier

Tvungen svingning. Resonans [YF 14.8 ; LL 9.9]

67

06.10.14



$F_y(t) = F_0 \cos \omega t$

$= \text{ytre harmonisk kraft}$

N2: $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \qquad \begin{aligned} \gamma &= b/2m \\ \omega_0^2 &= k/m \end{aligned}$$

Løsning:

$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$, slik at

$\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h(t) + \omega_0^2 x_h(t) = 0$ (homogen løsn.)

$\ddot{x}_p + 2\gamma \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$ (partikulærløsn.)

I starten bidrar både x_h og x_p til <u>innsvingningsforløpet</u>.

Etter hvert blir $t \gg 1/\gamma$ slik at $e^{-\gamma t} \to 0$ og $x_h \to 0$.

Da er $x(t) = x_p(t)$.

Vi gjetter $x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$

Innsetting av x_p, $\dot{x}_p$ og $\ddot{x}_p$ i N2 gir:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right\}$$

Resonans: Anta svak demping, $\gamma \ll \omega_0$. Da blir $A(\omega)$ stor hvis $\omega \approx \omega_0$, dvs ytre kraft "driver" systemet med frekvens ω lik systemets egenfrekvens (resonansfrekvens) $\omega_0 = \sqrt{k/m}$:

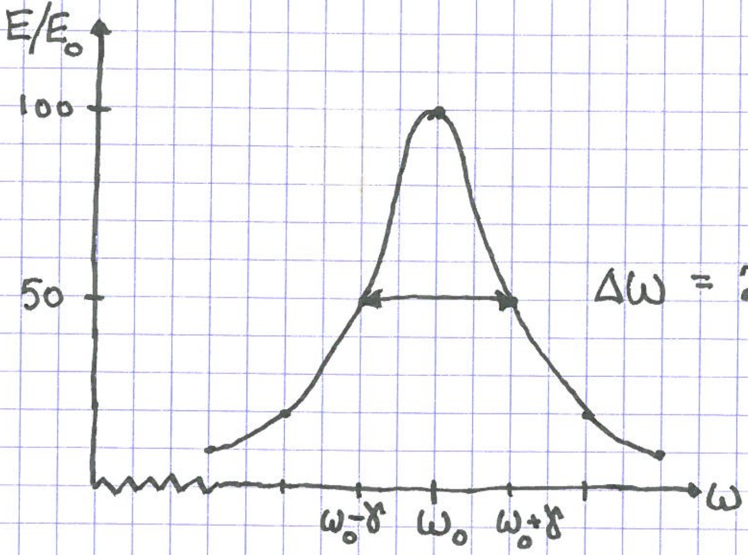
$A(\omega) \to \infty$ dersom $\gamma \to 0$ og $\omega \to \omega_0$

[Jf. Tacoma bridge, 1940]

Oscillatorens energi:

$$E \approx \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k \frac{F_0^2}{m^2} \cdot \frac{\omega_0^4 / \omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{F_0^2}{2k}}_{E_0} \cdot \underbrace{\frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}_{\text{dimensjonsløs funksjon av } \omega}$$



Anta $\gamma = \omega_0/20$

$\Delta\omega = 2\gamma$ = halvverdibredden

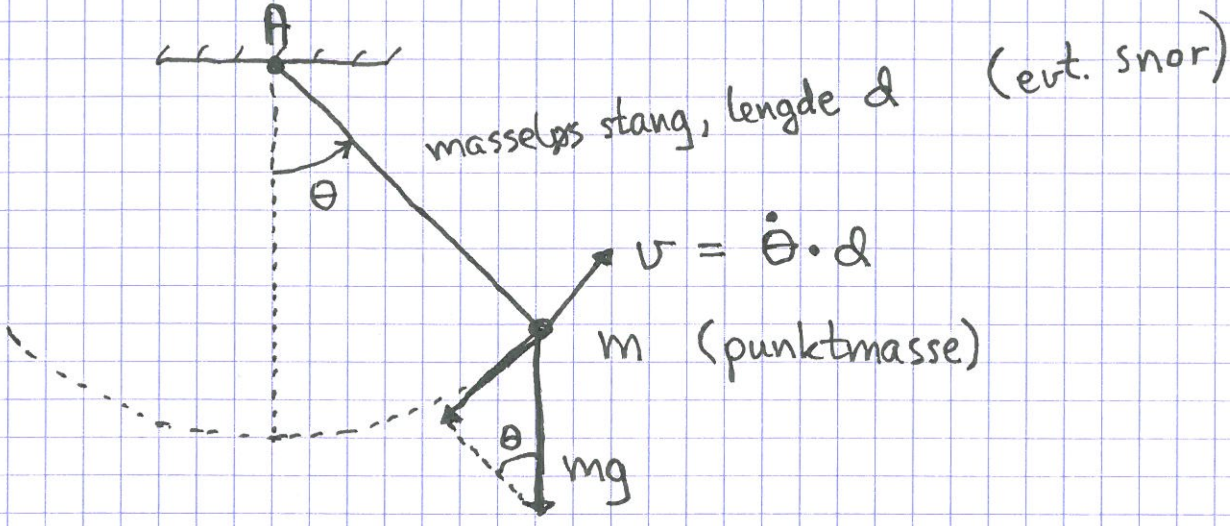
Q-faktor: Mål for hvor "skarp" resonanstoppen er.

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \qquad \text{[Q for quality!]}$$

Dvs: Mindre demping $\Rightarrow$ Smalere resonans $\Rightarrow$ Større Q-verdi

[Her er $Q = 10$]

Matematisk pendel [YF 14.5; LL 9.6]



N2 ∥ sirkelbanen :

$$-mg \sin\theta = m a_{\parallel} = m\dot{v} = m \cdot d \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{d} \sin\theta = 0$$

Kan ikke løses analytisk, med mindre vi hele tiden har små utsving fra likevekt, dvs $|\theta| \ll 1$.

Da er $\sin\theta \approx \theta$, og vi har enkel harm. osc :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{g/d}$$

Svingeperiode : $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{d/g}$

Større utsving gir avvik fra harm. osc.

Vi må beholde $\sin\theta$ i ligningen, som nå må løses numerisk, f.eks slik :

Anta kjente startbetingelser $\theta(0)=\theta_0$ og $v(0)=v_0$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{d} \Rightarrow d\theta = \frac{v}{d}\cdot dt \Rightarrow \Delta\theta \approx \frac{v}{d}\cdot\Delta t$$

$$\frac{dv}{dt} = a_{\parallel} \Rightarrow dv = a_{\parallel}\cdot dt \Rightarrow \Delta v \approx a_{\parallel}\cdot\Delta t \overset{\text{(her)}}{=} -g\sin\theta\cdot\Delta t$$

Dermed:

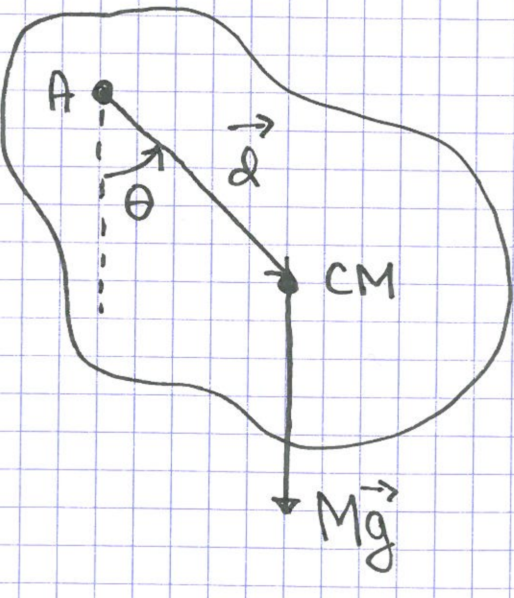
$$\theta(\Delta t) \approx \theta_0 + \frac{v_0}{d}\Delta t \quad ; \quad v(\Delta t) \approx v_0 - g\sin\theta_0\cdot\Delta t$$

$$\theta(2\Delta t) \approx \theta(\Delta t) + \frac{v(\Delta t)}{d}\Delta t \quad ; \quad v(2\Delta t) \approx v(\Delta t) - g\sin\theta(\Delta t)\cdot\Delta t$$

osv. osv. [Eulermetoden]

$\boxed{09.10.14}$

Fysisk pendel [YF 14.6 ; LL 9.6]



Stivt legeme. Masse M. Kan svinge (friksjonsfritt) om akse gjennom A. Treghetsmoment I mhp rot.aksen.

Med A som ref.punkt (ref.akse) er CM i posisjon $\vec{d}$

Bestem svingeperioden T.

(Anta små utsving, $|\theta| \ll 1$)

Ytre krefter: $M\vec{g}$, og $\vec{F}_A$ = kraften fra akslingen på legemet. $\vec{F}_A$ er ukjent, både abs.verdi og retning. [Med matematisk pendel, s.73, er $\vec{F}_A$ lik snordraget, rettet langs snora/stanga, og dermed med null komponent normalt på snora/stanga, slik at kun tyngden bidrar langs sirkelbanen. Med fysisk pendel har $\vec{F}_A$ generelt komponenter både parallelt med $\vec{d}$ (se fig) og normalt på $\vec{d}$.]

Men: $\vec{F}_A$ har ingen arm relativt aksen gjennom A, og dermed ikke noe dreiemoment mhp denne aksen.

Da gir N2 for rotasjon (om fast akse gjennom A):

$\tau = I\ddot{\theta}$ med $\tau = -d \cdot Mg \cdot \sin\theta$

[Fortegnet: $\vec{\tau} = \vec{d} \times M\vec{g}$ er rettet <u>inn</u> i planet, dvs tyngdens dreiemoment gir <u>redusert</u> vinkelakselerasjon når vinkelen θ er positiv, som i figuren.]

$$\Rightarrow -Mgd\sin\theta = I\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mgd}{I}\theta \simeq 0 \quad (|\theta| \ll 1)$$

Dvs: Harmonisk osc. med $\omega_0^2 = Mgd/I$

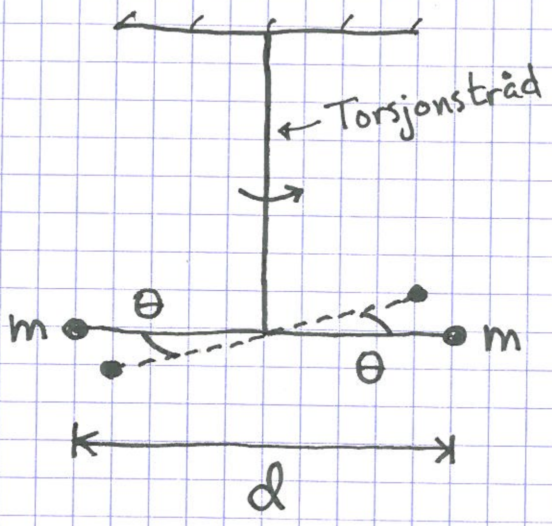
$$\Rightarrow T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{I/Mgd}$$

$$= 2\pi\sqrt{(I_0 + Md^2)/Mgd}$$

Steiners sats

($\to \infty$ når $d \to 0$, som ventet)

Torsjonspendel [YF 14.4 ; LL 9.6]



Hookes lov: $|\tau| \sim |\theta|$

Tråden motsetter seg vridning og virker på pendelen [her: stang med lengde d og to masser m i hver ende; treghetsmoment $I = 2 \cdot m \cdot (d/2)^2 = md^2/2$] med dreiemoment τ prop. med vridningen θ

$\Rightarrow \tau = -D \cdot \theta$ [YF: $\mathcal{H}$; LL: Γ]

N2, rot. om trådens akse: $\tau = I \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad -D \cdot \theta = I \cdot \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = D/I$$

$\Rightarrow$ Svingeperiode: $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{I/D}$

[Lab: Cavendisheksperimentet]

D = torsjonskonstanten / torsjonsstivheten

$$[D] = [1/\tau] = \frac{1}{N \cdot m} = \frac{1}{J}$$