KLASSISK DYNAMIKK

YF 1–11, 14 ; LL 1–7, 9

Størrelser og enheter [YF 1]

Eks:

dekadisk prefiks (m = milli = 10^{-3})

Lengde ; ℓ = 25.4 mm

størrelse, symbol, tallverdi, enhet

Notasjon: $[\ell] = m$; "enheten til lengde er meter"

SI-systemet:

Grunnenheter:

lengde, $[\ell] = m$ (meter)
masse, $[m] = kg$ (kilogram)
tid, $[t] = s$ (sekund)
elektrisk strømstyrke, $[I] = A$ (ampere)
temperatur, $[T] = K$ (kelvin)
stoffmengde, $[n] = mol$

Sammensatte enheter:

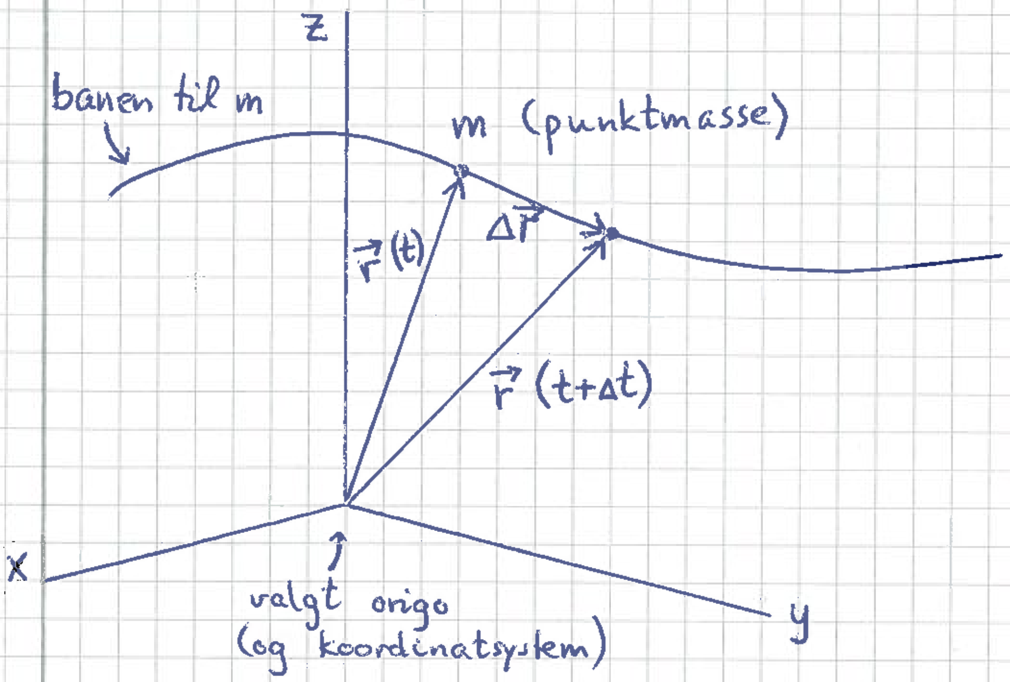
hastighet (fart), $[v] = m/s$
akselerasjon, $[a] = m/s^2$
impuls (bevegelsesmengde), $[p] = kg\,m/s$

Avledete enheter:

kraft, $[F] = kg\,m/s^2 = N$ (newton)
energi, $[W] = Nm = J$ (joule)
effekt, $[P] = J/s = W$ (watt)

Kinematikk [YF 2, 3 ; LL 1]

= beskrivelse av bevegelse



$\vec{r}(t)$ = posisjonen til m ved tid t

$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

= forflytningen av m mellom t og $t+\Delta t$

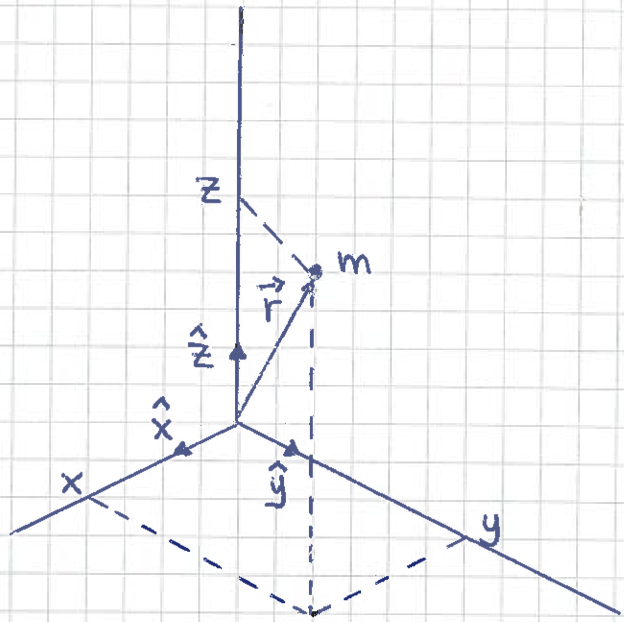
Hastighet $\stackrel{def}{=}$ forflytning pr tidsenhet:

$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, tangentiell til banen $(\vec{v} \parallel \Delta\vec{r})$

Akselerasjon $\stackrel{def}{=}$ hastighetsendring pr tidsenhet:

$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Dekomponering i kartesiske koordinater:



$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{x} + v_y(t)\,\hat{y} + v_z(t)\,\hat{z}$$

$$= \frac{dx}{dt}\,\hat{x} + \frac{dy}{dt}\,\hat{y} + \frac{dz}{dt}\,\hat{z} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} + \dot{z}\,\hat{z}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\hat{x} + a_y(t)\,\hat{y} + a_z(t)\,\hat{z}$$

$$= \frac{dv_x}{dt}\,\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{y} + \frac{dv_z}{dt}\,\hat{z}$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\hat{y} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\hat{z} = \ddot{x}\,\hat{x} + \ddot{y}\,\hat{y} + \ddot{z}\,\hat{z}$$

Enhetsvektorer:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad \text{(dimensjonsløse)}$$

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1 \;; \quad \hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \ldots = 0$$

Fastlegger $\vec{v}$ fra $\vec{r}$ og $\vec{a}$ fra $\vec{v}$ med integrasjon: 4

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\,dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$

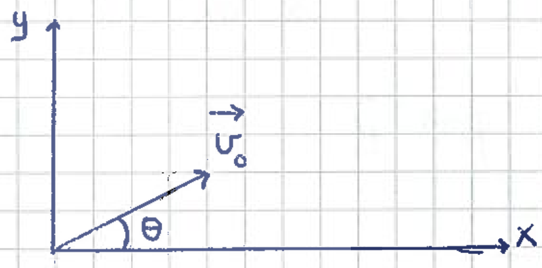
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \text{... tilsvarende ...} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

Må også gjelde komponentvis:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v_x(t)\,dt \quad \text{osv.}$$

$$v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t a_x(t)\,dt \quad \text{osv.}$$

Eks: Skrått kast i tyngdefeltet



- Her er $\vec{a} = -g\hat{y}$ (konstant)
- Anta $\vec{r}(0) = 0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$
- Bestem $\vec{r}(t)$. Vis at banen er en parabel.

Løsn:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t (-g\hat{y})\,dt = \vec{v}_0 - gt\,\hat{y}$$

$$\vec{r}(t) = \int_0^t (\vec{v}_0 - gt\,\hat{y})\,dt = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2\,\hat{y}$$

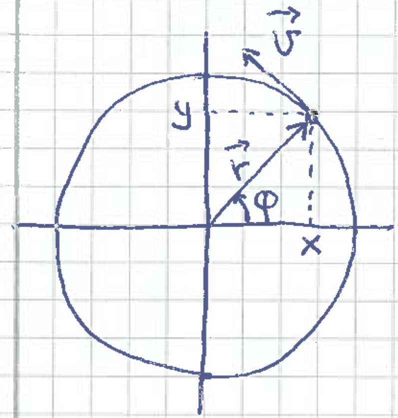
$$\Rightarrow x(t) = v_0 t \cos\theta \ ; \quad y(t) = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

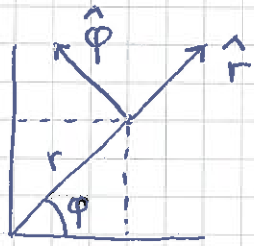
Banen: $$y = v_0\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)\sin\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\,x^2 + \tan\theta\ x$$

Øving 1: • Kast i motbakke. • Gitt $a(v)$, finn $v(t)$.

Sirkelbevegelse [YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8] (5)





Polarkoordinater:

r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\vec{r}$ ($\varphi > 0$ mot klokka)

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\tan\varphi = y/x$

$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$ (= konstant ved sirkelbevegelse)

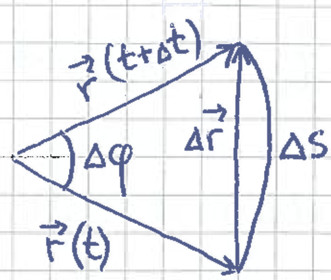
$\vec{r} = r\cos\varphi\ \hat{x} + r\sin\varphi\ \hat{y} = r\,\hat{r}$

$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi$, $\hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$

Vinkelhastighet $\overset{\text{def}}{=}$ vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}, \qquad [\omega] = s^{-1}$$

Vinkel $\overset{\text{def}}{=}$ buelengde / radius:



$$\Delta\varphi = \Delta s / r$$

Når $\Delta t \to 0$:

$\Delta\varphi \to 0$, $\Delta r = |\Delta\vec{r}| \to \Delta s = r\,\Delta\varphi$

$\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$

$$\Rightarrow v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega \quad \Bigg\}\ \vec{v} = v\hat{\varphi} = r\omega\hat{\varphi}$$

$\vec{v} \parallel \Delta\vec{r} \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{r}$

Uniform sirkelbevegelse når v og ω er konst:

anta $\varphi(0) = 0$:

$$\int_0^{\varphi(t)} d\varphi = \omega \int_0^t dt \Rightarrow \boxed{\varphi(t) = \omega t}$$

Dermed:

$$\vec{r}(t) = r \cos \omega t \ \hat{x} + r \sin \omega t \ \hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = -r\omega \sin \omega t \ \hat{x} + r\omega \cos \omega t \ \hat{y}$$

$$\vec{a}_\perp(t) = -r\omega^2 \cos \omega t \ \hat{x} - r\omega^2 \sin \omega t \ \hat{y}$$

$$= -\omega^2 \vec{r} = \text{sentripetalakselerasjonen}$$

$$= -\omega^2 r \ \hat{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$$

dvs rettet radielt inn mot sirkelens sentrum.

Hvis $v = |\vec{v}|$ endrer seg, har vi baneakselerasjon:

$$a_\parallel = \dot{v} = \frac{d}{dt}(\omega r) = r \frac{d\omega}{dt} = r\dot{\omega} = r\alpha = r\ddot{\varphi}$$

$\Rightarrow$ Total akselerasjon: $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel = -\omega^2 r \hat{r} + r\dot{\omega} \hat{\varphi}$

Vinkelakselerasjon: $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$, $[\alpha] = s^{-2}$

Periode: T = omløpstid ("rundetid"), $[T] = s$

Frekvens: f = antall omløp pr tidsenhet, $[f] = \frac{1}{s} = Hz$

$\Rightarrow$ Ulike sammenhenger:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Newtons lover [YF 4,5 ; LL 2,3]

Tre empiriske lover:

N1 $\boxed{\vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v} = \text{konst.}}$

Hvis netto ytre kraft $\vec{F}$ på et legeme er null, forblir legemet i ro, eller i rettlinjet bevegelse med konst. hastighet $\vec{v}$

N2 $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

Legemets akselerasjon er prop. med netto ytre kraft,
$\vec{a} = \vec{F}/m$; $m =$ legemets masse

N3 $\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$

Når A virker på B med kraft $\vec{F}_{AB}$, virker B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$.

Dvs: Krefter er vekselvirkninger mellom legemer

Enhet:

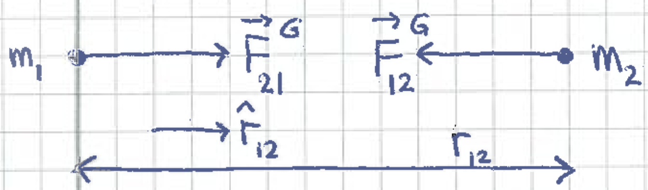
$[F] = [ma] = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$ (newton)

De viktigste fundamentale naturkreftene i TFY4104: [YF 5.5 LL 2.1]

- Gravitasjon: Svak tiltrekning mellom masser
- Elektromagnetisk: Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger

[Dessuden: Svake og sterke kjernekrefter, rekkevidde hhv ca 10^{-18} m og 10^{-15} m, beskriver hhv radioaktivitet og stabilitet av kjerner]

Newtons gravitasjonslov:

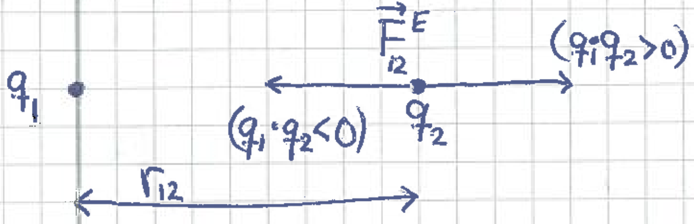


$$\vec{F}^G_{21} = G\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12}$$

$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$

(gravitasjonskonstanten)

Coulombs lov:



$$\vec{F}^E_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\hat{r}_{12}$$

$[q] = \mathrm{C} = \mathrm{A \cdot s}$ (coulomb)

$\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/Nm^2}$

(vakuumpermittiviteten)

$1/4\pi\varepsilon_0 \approx 9 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$

Krefter mellom to elektroner:

$m_e \sim 10^{-30}$ kg, $e \sim 10^{-19}$ C $\Rightarrow \dfrac{F_E}{F_G} \sim 10^{43} \Rightarrow F_G$ neglisjerbar

Mellom himmellegemer:

Ukjente ladninger q_1 og q_2, men typisk er $F_G \gg F_E$

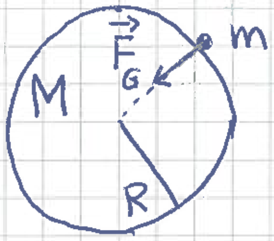
Mellom dagligdagse objekter:

Typisk er $F_E \gg F_G$ (selv om $q \approx 0$)

I tillegg: F_G fra jorda ("tyngden")

$\Rightarrow$ Både F_E og F_G påvirker hverdagen!

Tyngde [YF 4.4 ; LL 2.5]



Tiltrekkende kraft på m fra jorda (M):

$$F_G = GmM/R^2 \approx 6.67\cdot10^{-11}\cdot m\cdot 6\cdot10^{24}/(6.37\cdot10^6)^2$$
$$= m\cdot g$$

Her er $g = GM/R^2 \approx 9.81\ m/s^2$ = tyngdens akselerasjon

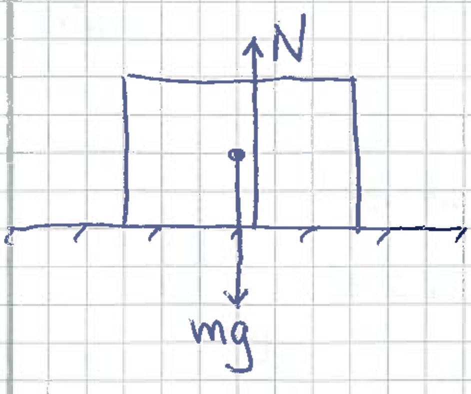
Fritt fall:

Hvis F_G er <u>eneste</u> kraft på m, har vi

$$mg = ma \quad , \quad \text{dvs} \quad a = g \approx 9.81\ m/s^2$$

Kontaktkrefter [YF 4.1 ; LL 3]

Normalkraft:

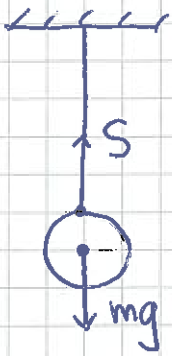


N = netto frastøtende coulombkraft fra underlaget på klossen

Hvis klossen ligger i ro:

$$N = mg \quad (\text{pga } N1)$$

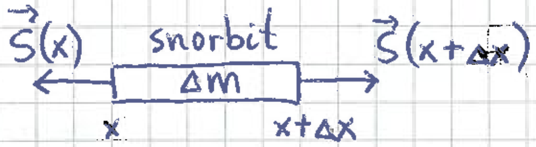
Snorkraft:



S = netto tiltrekkende coulombkraft fra snora på kula

Hvis kule i ro: $S = mg$ (pga N1)

[Spm: Hva er "motkreftene" til N, mg og S, mg i disse to eksemplene?]

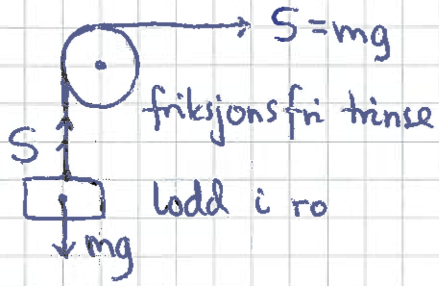


$$N2 \Rightarrow \vec{S}(x+\Delta x) + \vec{S}(x) = \vec{a} \cdot \Delta m$$

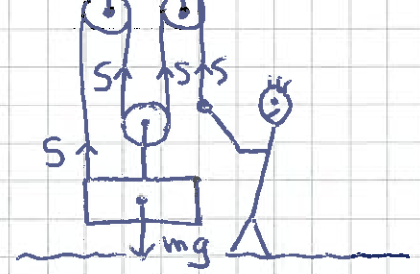
$\Rightarrow$ hvis $\vec{a} = 0$ eller $\Delta m \approx 0$, er $\vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x)$

$\Rightarrow$ konstant $S = |\vec{S}|$ langs hele snora

<u>Trinser</u> endrer retning på $\vec{S}$:



<u>Taljer</u> reduserer påkrevd løftekraft:



N1 anvendt på kassa: $3S = mg$

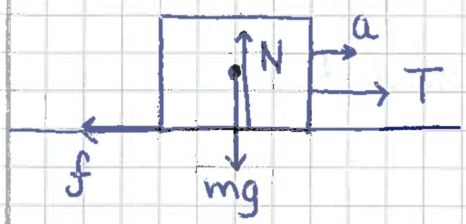
$\Rightarrow$ $\underline{S = mg/3}$

Friksjonskrefter [YF 5.3 ; LL 3.1]

= kontaktkrefter rettet mot relativ bevegelse

(evt: mot relativ bevegelse som vil oppstå uten friksjon)

Tørr friksjon:

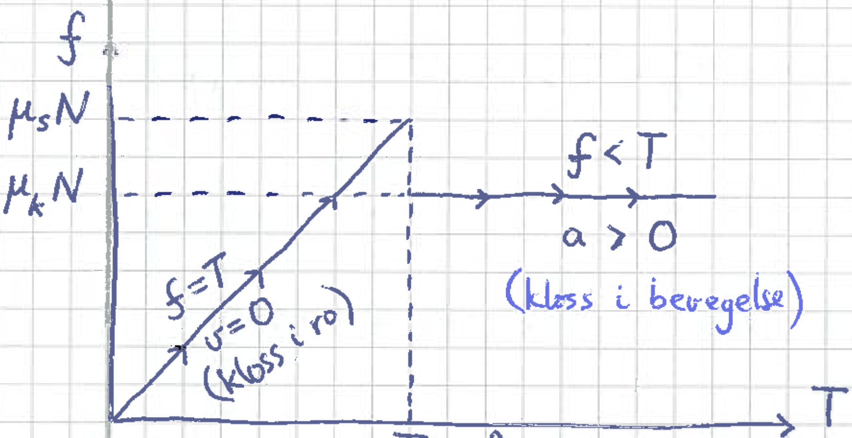


T = trekk-kraft

N (= mg) = normalkraft

f = friksjonskraft, fra underlag på kloss

Forsøk med økende T gir ($f = T - ma$):



$T_s = f_{max} = \mu_s N$

- $v = 0$, statisk friksjon, $f = T$, $f_{max} = \mu_s N$
- $v > 0$, kinetisk friksjon, $f = \mu_k N$, $\mu_k < \mu_s$

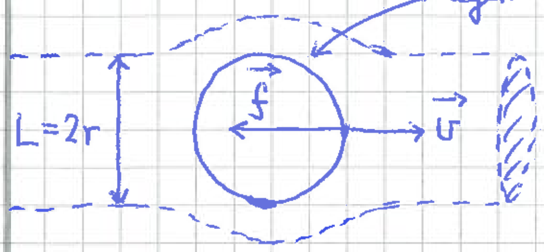
Tallverdier, statisk og kinetisk friksjonskoeffisient:

Materialer	μ_s	μ_k
Tre mot tre	0.4 - 0.6	0.2 - 0.4
Stål mot is	0.03	0.015
Pt mot Pt	1.2	
Våt svamp mot laminat		

Ujevnheter i grenseflatene gir best grep i statisk tilfelle; "flyter" lettere oppå; dermed $\mu_s > \mu_k$ (som regel).

Friksjon i fluider [YF 5.3 ; LL 8]

legeme med lineær utstrekning L
(f.eks. kule)



$A = \pi r^2$

omgivende fluid,
massetetthet ρ, $[\rho] = kg/m^3$
(dynamisk) viskositet μ, $[\mu] = kg/ms$

Reynoldstallet: $Re = \rho v L / \mu$ (dim.løst)

Laminær (pen, ordnet) strømning av fluidet omkring (symmetrisk) legeme når $Re \lesssim 10$, dvs når v er liten nok:

$$\vec{f} = -k\vec{v} = -kv\hat{v}$$

Eks: Kule, radius r. $k = 6\pi\mu r$ (Stokes' lov)

Turbulent strømning når $Re > 10$:

$$\vec{f} = -Dv^2\hat{v} \quad ; \quad D = \frac{1}{2}\rho A C_d$$

C_d = drag-koeffisient ($\approx 0{,}5$ for kule)

Eks: Revolve ved 60 km/h.

$\rho \simeq 1.2\ kg/m^3$; $A \simeq 1.1\ m^2$; $C_d \simeq 1.35$

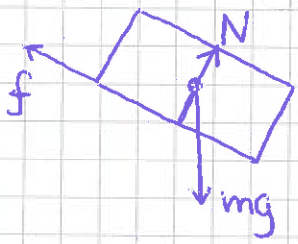
$$\Rightarrow f = \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 1.1 \cdot 1.35 \cdot (60/3.6)^2\ N = \underline{248\ N}$$

<u>Problemløsning</u> [YF 5; LL 3]

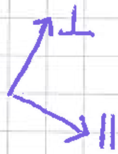
- Finn alle ytre krefter $\vec{F}_i$ på legemet
- Tegn fritt-legeme-diagram: Omgivelsene erstattes av krefter på legemet ($m\vec{g}$, $\vec{S}$, $\vec{N}$, $\vec{f}$, ...)
- Velg koordinatsystem. Dekomponer.
- Bruk N2, $\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m$, evt. N1, $\sum_i \vec{F}_i = 0$

Eks (enkelt!): Legeme på skråplan [Øving 2; Lab 1+2]

Fritt-legeme-diagram:



Koord.system



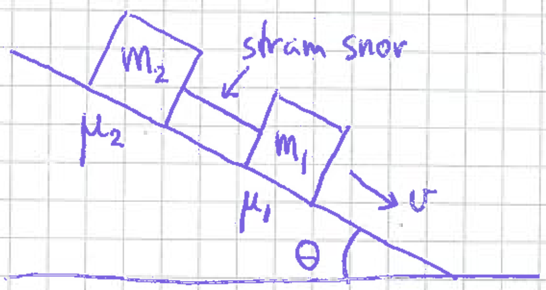
N1 ⊥ : $N - mg\cos\theta = 0$

N2 ∥ : $mg\sin\theta - f = m\,dv/dt$

Hvis $v = 0$: $f \leq \mu_s N$ (statisk) $\Rightarrow \tan\theta_{max} = \mu_s$

Hvis $v \neq 0$: $f = \mu_k N$ (kinetisk)

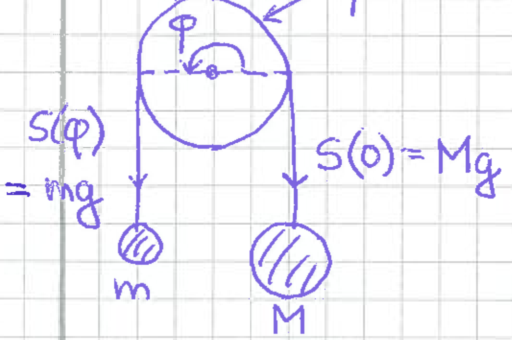
Litt vanskeligere: [Øv. 2; Lab 1+2]



Hvilken θ gir $v = $ konst. ?

Eks (vanskelig!): Snorfriksjon

(se "Med livet som innsats", A. Wahl, youtube)

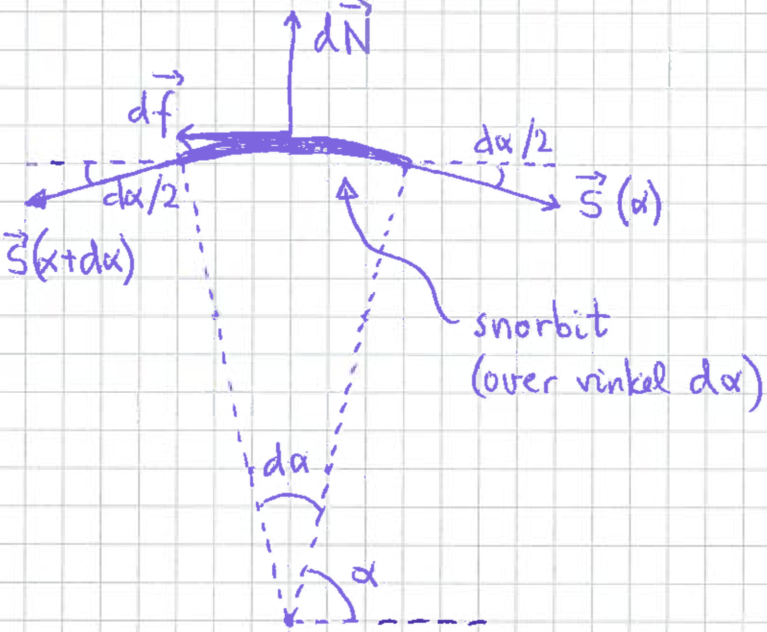


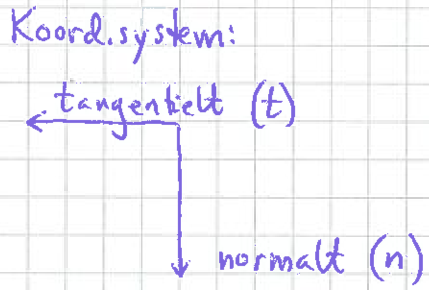
φ = kontaktvinkel mellom snor og rør

(her: $\varphi = \pi + 2n\pi$; $n = 0, 1, 2 \ldots$)

$\boxed{\text{Finn minste } m \text{ som holder } M \text{ oppe!}}$

Løsn: Må se på liten snorbit (fordi S ikke er konstant)





Krefter på snorbiten:

$\vec{S}$ fra resten av snora

$d\vec{N}$ fra røret, normalkraft

$d\vec{f}$ — " — , friksjonskraft ; minste mulige m når $df = df_{max} = \mu\, dN$

N1 på snorbiten: $\vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$

Dekomponerer:

(t) $S(\alpha + d\alpha)\cos\frac{d\alpha}{2} - S(\alpha)\cos\frac{d\alpha}{2} + df = 0$

(n) $S(\alpha + d\alpha)\sin\frac{d\alpha}{2} + S(\alpha)\sin\frac{d\alpha}{2} - dN = 0$

$d\alpha \ll 1 \Rightarrow \cos\frac{d\alpha}{2} \approx 1 \,, \quad \sin\frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$

Videre er:

$S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) = dS \;; \quad S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha) = 2S \;; \quad df = \mu\, dN$

Dermed:

$$\left.\begin{aligned} &(t) \quad dS = -\mu\, dN \\ &(n) \quad S\, d\alpha = dN \end{aligned}\right\} \frac{(t)}{(n)} \Rightarrow \frac{dS}{S} = -\mu\, d\alpha$$

Integrerer fra $\alpha = 0$ til $\alpha = \varphi$:

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\int_0^{\varphi} \mu\, d\alpha \Rightarrow \ln\frac{S(\varphi)}{S(0)} = -\mu\varphi \Rightarrow \underline{\underline{S(\varphi) = S(0)\, e^{-\mu\varphi}}}$$

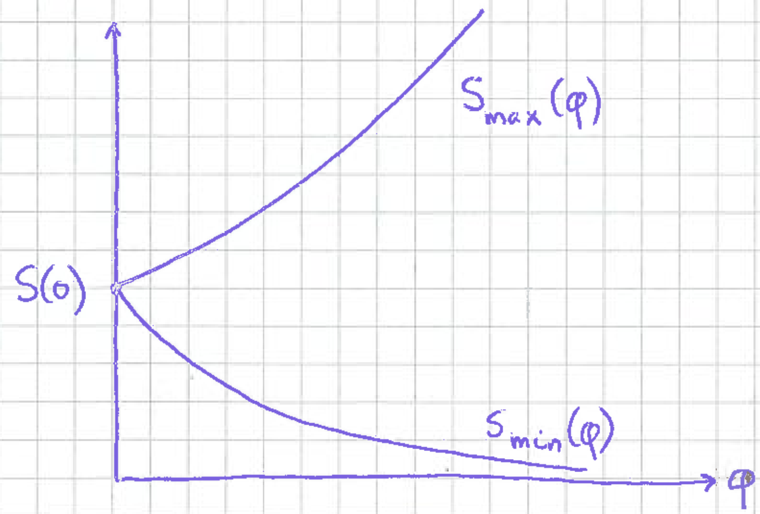
Plastrør og nylonsnor: $\mu \approx 0.17$ [Øving 3]

Med $M = 500\,g$ og $\varphi = 7\pi$ fås

$$\frac{m}{M} = \frac{S(\varphi)}{S(0)} = \exp(-0.17\cdot 7\pi) \approx 0.024 \Rightarrow m \approx 12\,g$$

Omvendt, for å heise M opp: $S(\varphi) = S(0)\, e^{+\mu\varphi}$,

dvs $m = M \exp(+0.17 \cdot 7\pi) \approx 21\ kg$



Arbeid og energi [YF 6,7 ; LL 4]

Arbeid [YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]

$\Delta\vec{r}$ = legemets forflytning

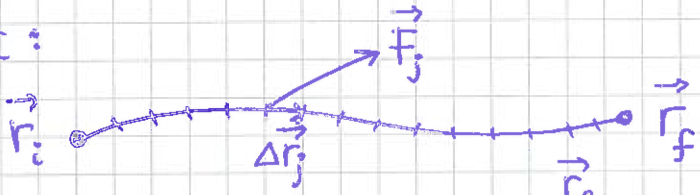
arbeid $\stackrel{def}{=}$ kraft × forflytning

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F\cdot\Delta r\cdot\cos\theta$$

= arbeidet utført av ytre kraft $\vec{F}$ på legemet

Enhet: $[W] = N\cdot m = J$ (joule)

Generelt:



[i : initial
f : final]

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j\cdot\Delta\vec{r}_j \stackrel{\Delta r_j\to 0}{=} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

= arb. utført av $\vec{F}$ ved forflytn. fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$

Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

effekt $\stackrel{def}{=}$ arbeid (energi) pr tidsenhet

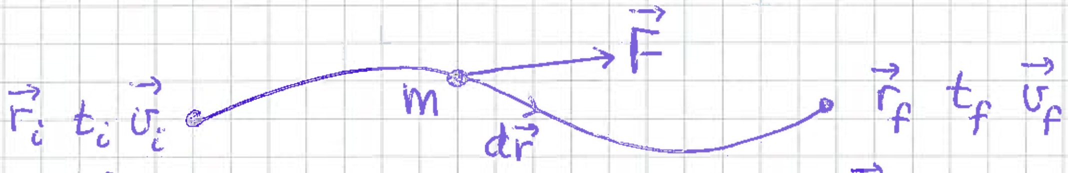
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v} \quad ; \quad [P] = \frac{J}{s} = W \text{ (watt)}$$

Eks: Typisk husholdning bruker 30 MWh el. energi pr år.
Hvor mange J er dette? Hva er gjennomsnittlig effekt $\langle P\rangle$?

Løsn: $30\text{ MWh} = 30\cdot 10^6 (J/s)\cdot 3600s = 1{,}08\cdot 10^{11}\, J = \underline{108\text{ GJ}}$

$\langle P\rangle = 30\cdot 10^6\text{ Wh} / 365\cdot 24\text{h} = 3425\text{ W} \simeq \underline{3.4\text{ kW}}$

Kinetisk energi [YF 6.2 ; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \, dt = m \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$= m \cdot \frac{1}{2} \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \underbrace{(\vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v})}_{= d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = dv^2} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Kinetisk energi : $K \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$

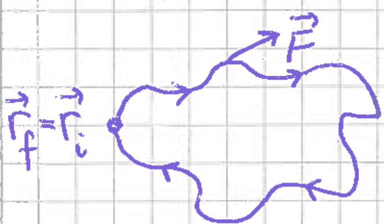
$$\Rightarrow \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

Arbeidet W som utføres på et legeme tilsvarer endringen ΔK i legemets kinetiske energi.

Konservativ kraft (og system) [YF 7.3; LL 4.4]

I <u>kons. system</u> virker kun <u>kons. krefter</u>, og mekanisk energi tapes ikke til andre energiformer (varme etc).

Anta $\vec{r}_f = \vec{r}_i$ (lukket kurve) :



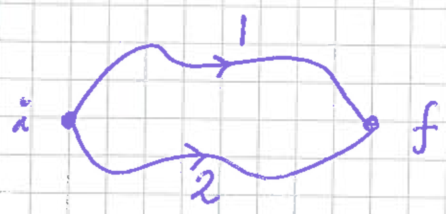
Hvis $K_f = K_i$, er $W = \Delta K = 0$, dvs

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

Da er $\vec{F}$ en <u>konservativ kraft</u>.

[$\oint \ldots$ = integral rundt lukket kurve]

Hvis $\vec{F}$ er konservativ, er arbeidet W uavhengig av veien:



$$W_1 = \left(\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)_1$$

$$W_2 = \left(\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)_2 = -\left(\int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)_2$$

$$\Rightarrow 0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)_1 + \left(\int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right)_2 = W_1 - W_2$$

$$\Rightarrow \underline{W_1 = W_2} \qquad \text{(qed)}$$

Potensiell energi [YF 7.1–7.4 ; LL 4.3–4.4]

Når $\vec{F}$ er konservativ, er

$$\boxed{U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

den potensielle energien i posisjon $\vec{r}$, der vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$.

NB: Kun forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

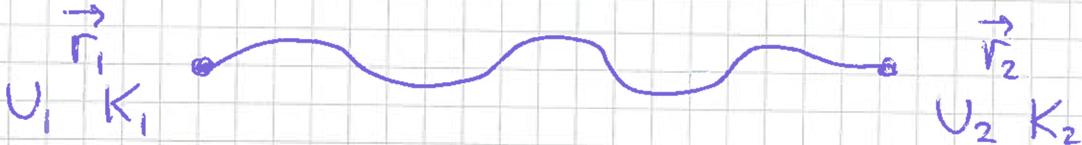
Fra Matematikk 2:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{F} = 0$$

$$U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\nabla U$$

Bevarelse av mekanisk energi [YF 7.1–7.3; LL 4.5]

Anta konservativt system.



$$U_1 - U_2 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \left(-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}\right) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$K_2 - K_1 = W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$\Rightarrow$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Dvs: I et kons. system er total mekanisk energi

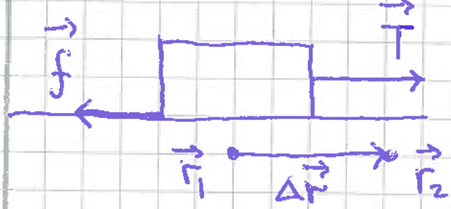
$$E = K + U$$

konstant (bevart).

Friksjonskrefter er ikke konservative.

Tyngdekraften og coulombkraften er konservative.

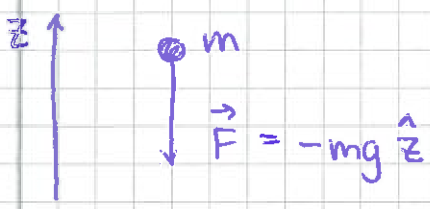
Friksjonsarbeid [YF 7.3; LL 4.5]



$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f}\cdot d\vec{r} < 0$, siden $\vec{f}$ alltid rettet <u>mot</u> $d\vec{r}$; mek. energi "tapes" som varme, lyd etc.

Med $\vec{f}\cdot d\vec{r} < 0$ blir $\oint \vec{f}\cdot d\vec{r} < 0$, alltid. Dermed kan $\vec{f}$ ikke være en kons. kraft.

Eks 1: Fall i tyngdefeltet



- Anta $U(0) = 0$ og $v(0) = 0$, og finn $U(z)$ og $v(z)$
- Vurder effekten av luftmotstand

Løsn: Først uten luftmotstand.

$$U(z) = -\int_0^z (-mg\,\hat{z})\cdot(\hat{z}\,dz) = \underline{\underline{mgz}}$$

E bevart $\Rightarrow U(z) + K(z) = U(0) + K(0) = 0$

$$\Rightarrow mgz + \tfrac{1}{2}m\,v(z)^2 = 0$$

$$\Rightarrow v(z) = \underline{\underline{\sqrt{-2gz}}} \qquad (z<0)$$

Luftmotstand: $\vec{f} = -Dv^2\,\hat{v}$; $D = \frac{1}{2}\rho A C_d$

Bordtennisball i luft: $\rho \approx 1.3\ \mathrm{kg/m^3}$; $C_d \approx 0.5$;

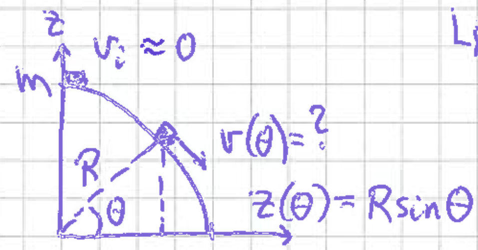
$A = \pi\cdot(0.020\ \mathrm{m})^2 \Rightarrow D \simeq 4\cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg/m}$

Terminalhastighet v_t når $\sum_i \vec{F}_i = 0$

$$\Rightarrow D\cdot v_t^2 = mg \Rightarrow v_t = (mg/D)^{1/2} = \left(0.0027\,\mathrm{kg}\cdot 9.8\,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}/4\cdot 10^{-4}\,\tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right)^{1/2}$$

$$\simeq \underline{\underline{8\ \mathrm{m/s}}}$$

Eks 2: Glatt kuppel



Løsn: Velger $U(0) = 0 \Rightarrow E = U(R) = mgR$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}m\,v(\theta)^2 + mg\,z(\theta) = mgR$$

$$\Rightarrow v(\theta) = \underline{\underline{\sqrt{2gR\,(1-\sin\theta)}}}$$

- Øv. 3 : Hvor mistes kontakten med underlaget?
- Hvordan hensynta friksjon?
- Hva med rullende evt. "skurende" objekter

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ Numerikk?!

Impuls [YF 8 ; LL 5]

(= bevegelsesmengde = linear momentum)

N2: $\vec{F} = m\, d\vec{v}/dt = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ når m=konst.

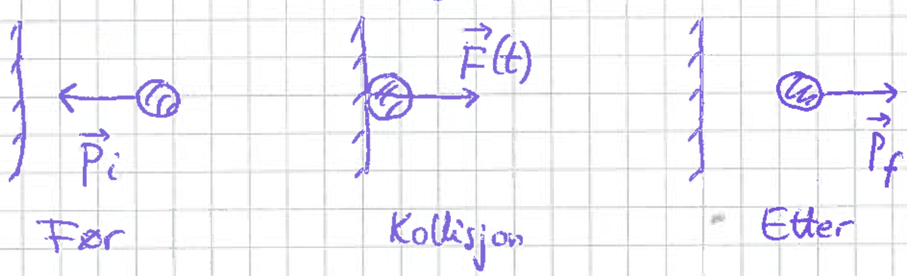
impuls $\stackrel{def}{=}$ masse × hastighet

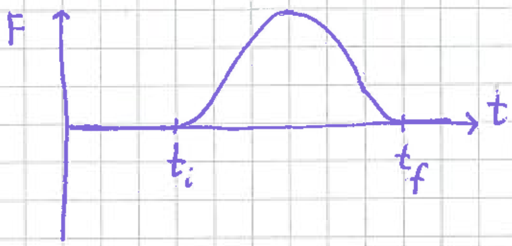
$\vec{p} = m\vec{v}$; $[p] = kg \cdot m/s$

Dermed: $\boxed{\vec{F} = d\vec{p}/dt}$ N2

Impulsbevarelse: Hvis $\sum \vec{F}_{ytre} = 0$, er legemets (eller systemets) impuls bevart

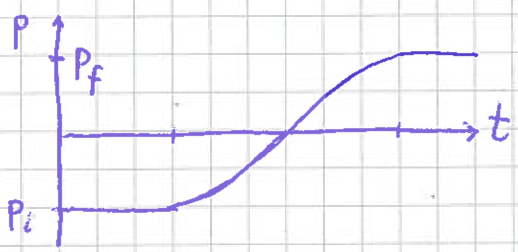
Eks: Ball mot vegg





$$d\vec{p} = \vec{F}(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \vec{p}(t) = \vec{p}_i + \int_{t_i}^{t} \vec{F}(t)\, dt$$



Ballens totale impulsendring:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt$$

Talleks: Bordtennis, $v_i \sim -10$ m/s, $v_f \sim +40$ m/s, $\Delta t \sim 2$ ms, anta $F \approx$ konstant

$$\Rightarrow F/G = m(\Delta v/\Delta t)/mg \approx 50 \text{ m/s} / 2\cdot 10^{-3}\text{ s} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = \underline{2500}$$

Lærdom: Ofte <u>store</u> krefter med <u>kort</u> varighet i kollisjoner; dermed OK å <u>neglisjere</u> evt. <u>ytre</u> krefter (som G) i kollisjonen.

<u>Kollisjoner</u> [YF 8.3, 8.4 ; LL 5.3]

Elastisk : Mek. energi bevart ($\Delta K = 0$)

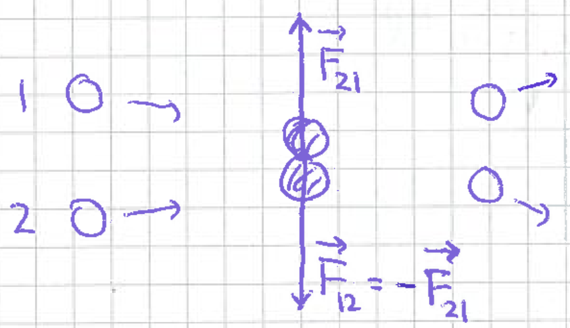
Uelastisk : —— " —— ikke bevart ($\Delta K < 0$)

(Kortvarig $\Rightarrow \Delta U \approx 0$)

Fullstendig uelastisk : Sammenhengende legemer etter kollisjon, med <u>felles</u> hastighet. Gir max $|\Delta K|$.

Tapt K $\rightarrow$ deformasjon, varme, lyd

Pga N3 vil indre krefter ikke endre $\vec{P}_{tot}$:



$$\text{N2, N3} \Rightarrow \vec{F}_{21} = d\vec{p}_1/dt, \quad \vec{F}_{12} = d\vec{p}_2/dt = -d\vec{p}_1/dt$$

$$\Rightarrow d\vec{P}_{tot}/dt = 0 \quad ; \quad \vec{P}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{tot} = \text{konst.}$$

Sentralt støt [YF 8.2–8.4 ; LL 5.3]

Før: $m \; \circ\!\longrightarrow v \qquad V \longleftarrow\!\circ \; M$ (i) $\qquad - \longleftrightarrow +$

Etter: $v' \longleftarrow\!\circ \; m \qquad M \; \circ\!\longrightarrow V'$ (f)

$$\Delta p = 0 \Rightarrow mv + MV = mv' + MV'$$

(a) Fullstendig uelastisk: $v' = V' = (mv + MV)/(m+M)$

(b) Delvis uelastisk: 1 ligning, 2 ukjente ⇒ Må ha 1 opplysning til.

(c) Elastisk, $\Delta K = 0$: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$

$$\Rightarrow m(v+v')(v-v') = M(V'+V)(V'-V) \qquad (1)$$

$$\Delta p = 0 \Rightarrow m(v-v') = M(V'-V) \qquad (2)$$

$$(1)/(2) \Rightarrow v + v' = V' + V \qquad (3)$$

$$M\cdot(3) - (2) \Rightarrow v' = \frac{M}{m+M}\left(2V + v\,\frac{m-M}{M}\right)$$

$$V' = \frac{m}{M+m}\left(2v + V\,\frac{M-m}{m}\right)$$

Eks: Ball mot vegg, elastisk

$m \; \circ\!\longrightarrow v \qquad \| \; V=0, \; M \gg m \qquad\qquad v' \longleftarrow\!\circ \; m \qquad \| \; V'$

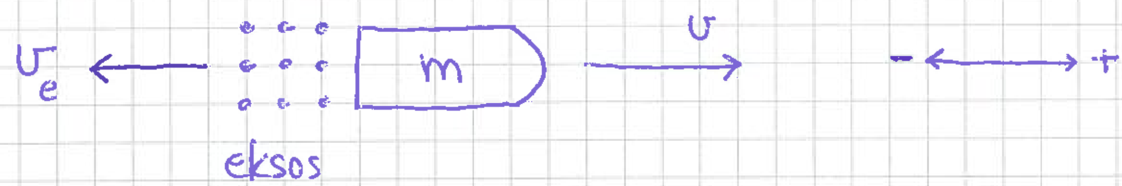
$$\Rightarrow v' = \frac{M}{m+M}\left(0 + v\,\frac{m-M}{M}\right) \approx \frac{M}{M}\cdot v \cdot \left(-\frac{M}{M}\right) = -v$$

$$V' = \frac{m}{M+m}(2v + 0) \approx \frac{m}{M}\cdot 2v \qquad (\approx 0)$$

Impuls: $\left.\begin{array}{l} p = mv, \; P = MV = 0, \; p' = mv' = -mv, \\ P' = MV' \approx M(m/M)2v = 2mv \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\Delta p = 0}$ (ok)

Energi: $\left.\begin{array}{l} K_m = \frac{1}{2}mv^2, \; K_M = \frac{1}{2}MV^2 = 0, \; K_m' = \frac{1}{2}mv^2, \\ K_M' = \frac{1}{2}MV'^2 \approx \frac{1}{2}M(2mv/M)^2 = 2m^2v/M \approx 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\Delta K = 0}$ (ca.)

Rakettprinsipp [YF 8.6 ; LL 5.4]



v = rakettens hastighet (målt i fast referansesystem)

v_e = eksosens —"— (—"—)

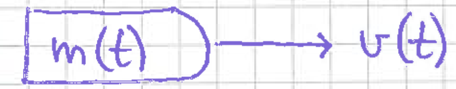
u = —"— (målt relativt raketten) (= konst.)

$\Rightarrow v_e = u + v \quad ; \quad v > 0, \quad u < 0$

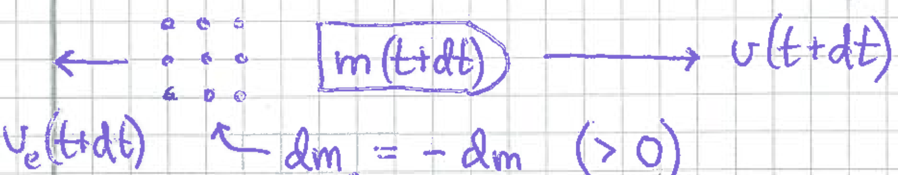
$\frac{dm}{dt}$ = rakettens masseendring pr tidsenhet < 0

Antar $F_{ytre} = 0$ (til slutt: $F_{ytre} = -mg$)

$\Rightarrow dp/dt = 0$



$p(t) = m(t)v(t)$



$dm_e = -dm \quad (>0)$

$$p(t+dt) = m(t+dt)\cdot v(t+dt) + dm_e \cdot v_e(t+dt)$$

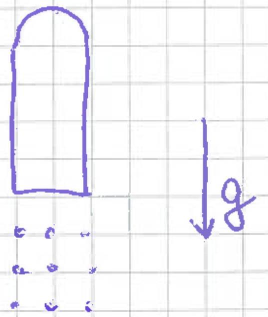
$$= [m(t)+dm]\cdot[v(t)+dv] - dm\cdot[u + v(t)+dv]$$

$$= \underbrace{m(t)v(t)}_{p(t)} + \underbrace{m(t)\,dv - u\,dm}_{=0}$$

$\Rightarrow m\cdot\frac{dv}{dt} = u\cdot\frac{dm}{dt} = u\dot{m}$, som er på "N2-form",

$m\cdot a = F_{skyv}$, med $F_{skyv} = u\dot{m} > 0$

I tyngdefeltet kommer tyngdekraften i tillegg:



$$F_{ytre} = -mg$$

$\Rightarrow$ N2 for "rest"-raketten blir

$$F = ma$$

med total kraft

$$F = F_{ytre} + F_{skyv} = -mg + u\dot{m}$$

Øving 4: $m\,dv/dt = -mg + u\,dm/dt$

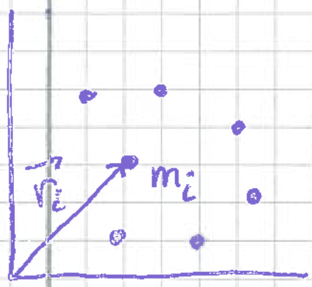
$$\Rightarrow \int dv = -\int g\,dt + u\int dm/m \qquad \text{osv.}$$

Så langt: Punktmasser, evt. ren translasjon av stive legemer.

Nå: Partikkelsystemer. Stive legemer inkl. rotasjon.

Massesenter [YF 8.5 + oppg 8.115/116 ; LL 5.6, 5.8, 6.1]

= tyngdepunkt når g er konstant i hele systemet



Massesenter (CM) for N punktmasser $m_1\ m_2 \cdots m_N$ i posisjon $\vec{r}_1\ \vec{r}_2 \cdots \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \quad ; \quad \text{Total masse } M = \sum_i m_i$$

Med kontinuerlig massefordeling : $m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} dm$

$$\Rightarrow \quad \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm \quad ; \quad M = \int dm$$

Masseelementet dm :

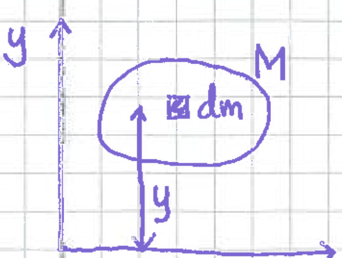
$$dm = \rho\, dV \ (3D) \ ; \quad dm = \sigma\, dA \ (2D) \ ; \quad dm = \lambda\, d\ell \ (1D)$$

ρ, σ, λ = masse pr hhv volum-, flate-, lengdeenhet

$dV, dA, d\ell$ = hhv volum-, flate-, lengdeelement

Med <u>uniform</u> massefordeling er $\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V}$ etc

Eks 1: Pot. energi i tyngdefeltet (anta konstant g)



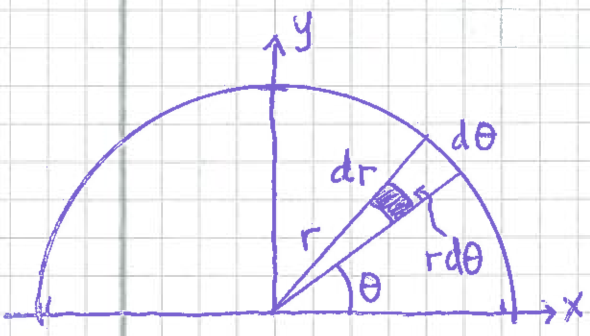
Velger $U(0) = 0$

$$\Rightarrow U = \int dU = \int g y\, dm = g\int y\, dm$$

$$= \underline{\underline{g M Y_{CM}}}$$

Dvs : Legemet har total U som om hele massen $M = \int dm$ var samlet i høyden $Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\, dm$ (og da f.eks. i $\vec{R}_{CM}$)

Eks 2: Halvsirkulær tynn skive (radius R)



$X_{CM} = 0$ pga symmetri $\Rightarrow \vec{R}_{CM} = Y_{CM}\,\hat{y}$

med $Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{A}\int y\,dA$

(siden $dm/M = dA/A$)

Vet at $A = \pi R^2/2$; ser at $dA = dr \cdot r\,d\theta$ og $y = r\sin\theta$.

Ser også at hele skiva regnes med når $0 < r < R$ og $0 < \theta < \pi$ brukes som integrasjonsgrenser.

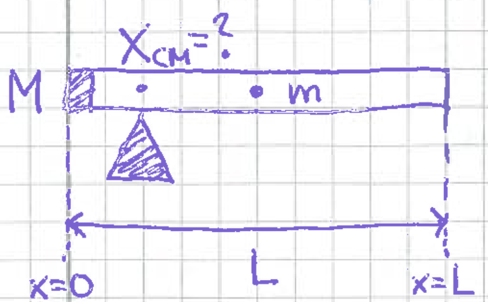
$$\Rightarrow Y_{CM} = \frac{2}{\pi R^2}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} r\sin\theta \cdot dr \cdot r\,d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2\,dr \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta = \frac{2}{\pi R^2}\cdot\frac{1}{3}R^3\cdot\underbrace{\Big|_0^\pi(-\cos\theta)}_{=2}$$

$$= \frac{4}{3\pi}R \approx \underline{\underline{0.42\,R}} \qquad \text{(Rimelig svar!)}$$

[Vis selv: $Y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$ for "bøyle" (1D); $Y_{CM} = \frac{3R}{8}$ for halvkule (3D)]

Eks 3: Rør med lodd i enden



$m = 165\,g$, $M = 305\,g$

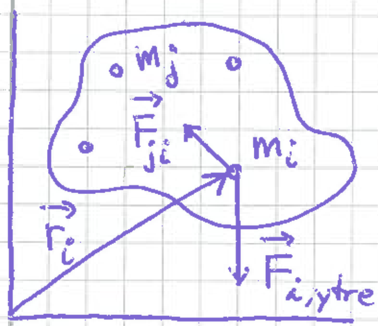
$$X_{CM} = \frac{M\cdot 0 + m\cdot L/2}{M+m} = \frac{165}{940}L \approx \underline{\underline{0.18\,L}}$$

$$\left[\text{Evt: } X_{CM} = \frac{1}{M+m}\Big\{M\cdot 0 + \underbrace{\int_0^L x\cdot \overbrace{m\frac{dx}{L}}^{=dm}}_{=\frac{1}{2}mL}\Big\} = \frac{mL}{2(M+m)}\right]$$

Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5 ; LL 5.8]

Forsøk (kast) viser at CM beveger seg som om hele M var samlet i CM ! [Se s. 4]

Bevis:



$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \quad ; \quad M = \sum_i m_i$$

N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}$$

total ytre kraft på m_i

total indre kraft på m_i

Adderer N2 for alle $i = 1, 2, \dots, N$:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2}\left\{\sum_i m_i \vec{r}_i\right\} = \frac{d^2}{dt^2}\left\{M\vec{R}_{CM}\right\} = M\ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{total ytre kraft på systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N} = 0 \quad (\text{pga N3})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{ytre} = M\ddot{\vec{R}}_{CM}}$$

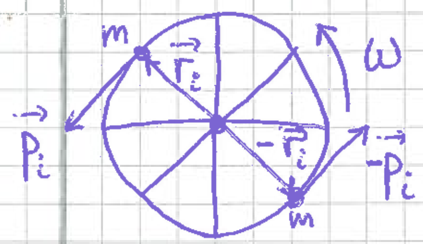
som er N2 for punktmasse M i posisjon $\vec{R}_{CM}$, utsatt for total ytre kraft $\vec{F}_{ytre}$!

I tillegg: Rotasjon om CM. } Neste ca 3 uker.
Vibrasjon om CM. }

Rotasjon [YF 9, 10 ; LL 6 (5)]

Noen innledende observasjoner:

- Ren rotasjon



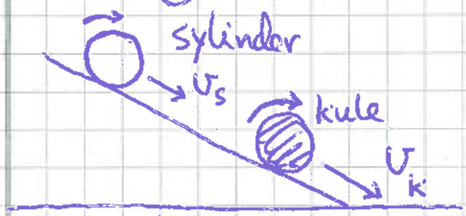
CM å ro $\Rightarrow K_{trans} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^{\,2} = 0$

Men $\underline{K_{rot} \neq 0}$

Total impuls $\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = 0$

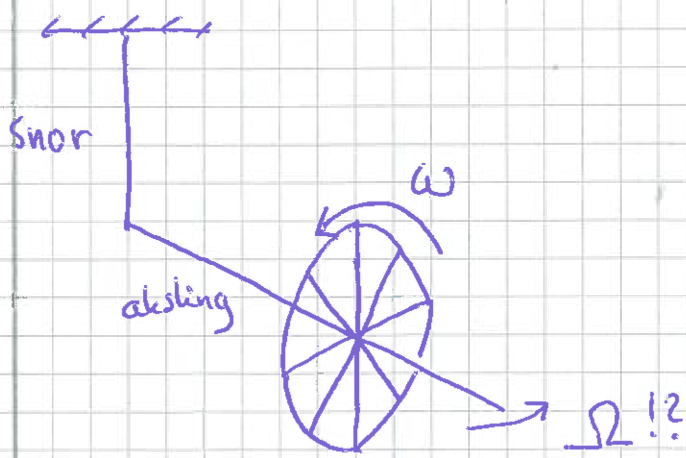
Men $\underline{\text{dreieimpuls} \neq 0}$

- Rulling



Hvorfor oppstår rotasjon?
Hvor angriper kreftene?
Må ha et <u>dreiemoment</u>.
Hvorfor $v_k > v_s$?
Hva med friksjon?

- Kompleks dynamikk



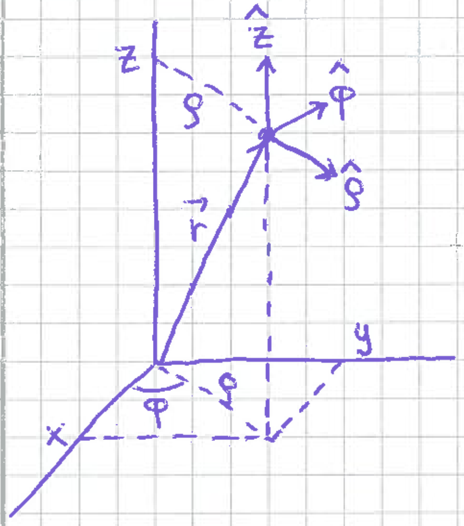
Presesjon!

(Gyroskop)

Sirkelbevegelse [YF 9.1–9.3; LL 1.8]

Anta rotasjon om z-aksen.

Sylinderkoordinater: Polarkoord. (ρ, φ) og z



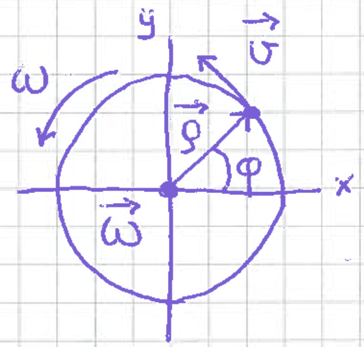
$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\varphi = y/x$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\rho^2+z^2}$$

Vinkelhastigheten $\vec{\omega}$ peker langs rotasjonsaksen:



$$\vec{\omega} = \omega\hat{z} \quad (= \omega\hat{\omega})$$

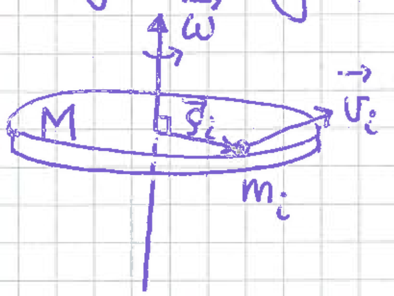
$$\vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$$

$$\vec{v} = d\vec{s}/dt = \rho\frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} = \rho\omega\hat{\varphi}$$

Ser at $\hat{\varphi} = \hat{z} \times \hat{\rho}$ (høyrehåndsregel)

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}}$$

Rotasjonsenergi. Treghetsmoment [YF 9.4; LL 6.4, 6.3]



$$K = K_{rot} = \sum_i \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sum_i m_i \rho_i^2\right)\omega^2$$

$$I \overset{def}{=} \sum_i m_i \rho_i^2 = \text{legemets}$$

<u>treghetsmoment</u> mhp valgt akse.

Kontinuerlig massefordeling: $m_i \to \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} dm$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int \rho^2 \, dm}$$ ρ = avstand fra aksen til dm

Dermed: $$\boxed{K_{rot} = \tfrac{1}{2} I \omega^2}$$

Kin. energi for stivt legeme [YF 10.3 ; LL 6.6]

$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \ldots\ldots$ se notat for bevis/utledning (ikke pensum)

$$\Rightarrow \boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \tfrac{1}{2} M V^2 + \tfrac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

der

M = legemets masse

$V = \dot{\vec{R}}_{CM}$ = hastigheten til CM

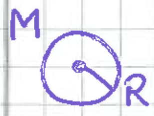
I_0 = treghetsmoment mhp rotasjonsaksen gjennom CM

$\vec{\omega}$ = vinkelhastigheten om ———— " ————

Eks: Rullende hjul/ring.

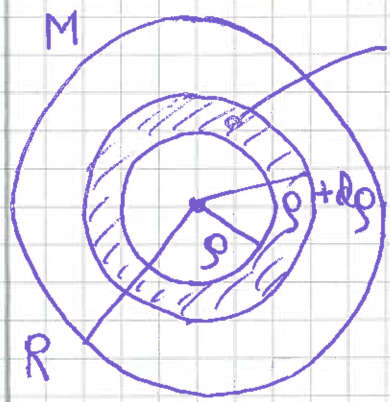
Treghetsmoment, eksempler [YF 9.6 ; LL 6.3]

Eks 1: Ring / Hul sylinder



$$I_0 = \int \rho^2 \, dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

Eks 2: Skive / Kompakt sylinder

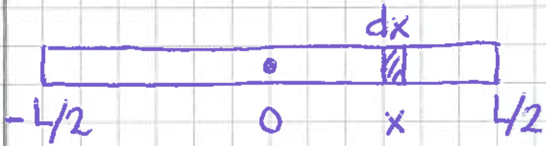


$$dI_0 = \rho^2 \, dm = \rho^2 M \frac{dA}{A}$$

$$= \rho^2 M \frac{2\pi \rho \, d\rho}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2} \rho^3 \, d\rho$$

$$\Rightarrow I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \underbrace{\int_0^R \rho^3 \, d\rho}_{= \frac{1}{4} R^4} = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} MR^2}}$$

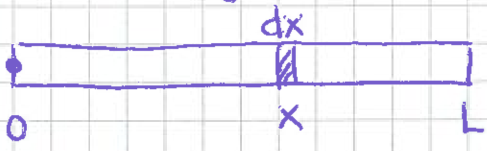
Eks 3: Tynn stang, akse $\perp$ stang, gjennom CM



$$\rho = x, \quad dm = M \, dx / L$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M \, dx / L = \frac{M}{L} \Big|_{-L/2}^{L/2} x^3/3 = \underline{\underline{\tfrac{1}{12} ML^2}}$$

Eks 4: Tynn stang, akse gjennom stangas ende



$$I = \int_0^L x^2 M \, dx / L = \underline{\underline{\tfrac{1}{3} ML^2}}$$

Eks 5: Kuleskall $\quad I_0 = \frac{2}{3} MR^2$

Eks 6: Kule (kompakt) $\quad I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

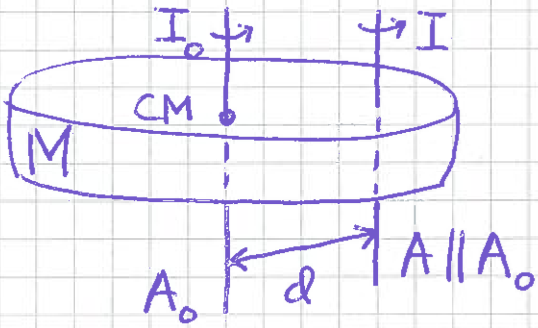
} akse gjennom CM

[Eks 2, 3, 5, 6 oppgis til eksamen]

Steiners sats

(parallellakseteoremet)

[YF 9.5 ; LL 6.3]



$$\boxed{I = I_0 + Md^2}$$

(se notat for utledning)

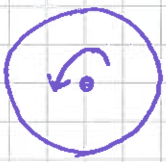
Eks 1: Tynn stang

$I_0 = \frac{1}{12}ML^2$

$\xrightarrow{d=\frac{L}{2}}$

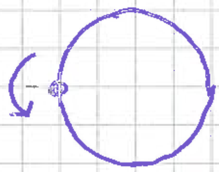
$I = I_0 + M(L/2)^2 = \frac{1}{3}ML^2$

Eks 2: Kompakt kule



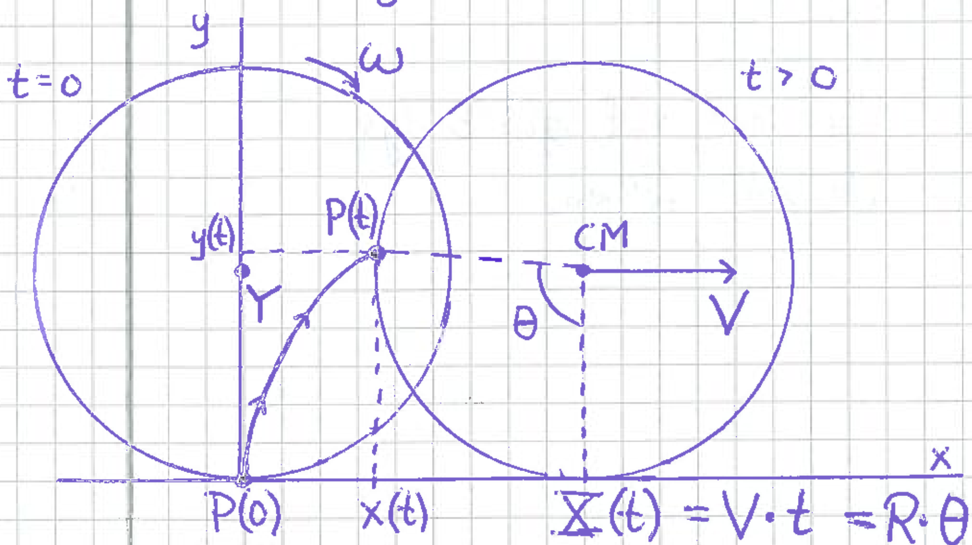
$I_0 = \frac{2}{5}MR^2$

$\xrightarrow{d=R}$



$I = I_0 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$

Ren rulling   [YF 10.3 ; LL 6.7]



$P(t) = (x(t), y(t))$ = banen til punkt på periferien

$P(0) = (0,0)$

$\mathrm{X}(0) = 0$

$$\mathrm{X}(t) = V \cdot t = R \cdot \theta$$

$$Y(t) = Y(0) = R$$

Fra figuren: $x = \mathrm{X} - R\sin\theta$, $y = R - R\cos\theta$
$= R\theta - R\sin\theta$

Bevegelsen til CM:

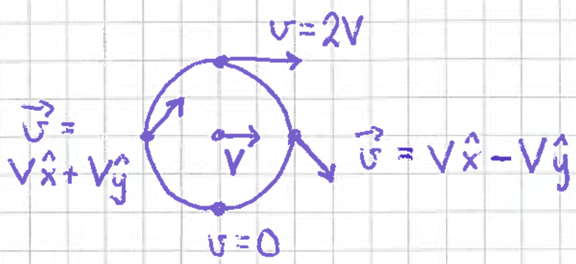
$$\vec{R}_{CM} = \mathrm{X}\,\hat{x} + Y\,\hat{y} = R\theta\,\hat{x} + R\,\hat{y}$$

$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM} = R\dot{\theta}\,\hat{x} = R\omega\,\hat{x} = V\,\hat{x}$$

$$\vec{A} = \dot{\vec{V}} = R\ddot{\theta}\,\hat{x} = R\dot{\omega}\,\hat{x} = R\alpha\,\hat{x} = A\,\hat{x}$$

Rullebetingelsene: $\boxed{V = R\omega, \quad A = R\alpha}$

Bevegelsen til P:



$$\vec{v} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y}$$

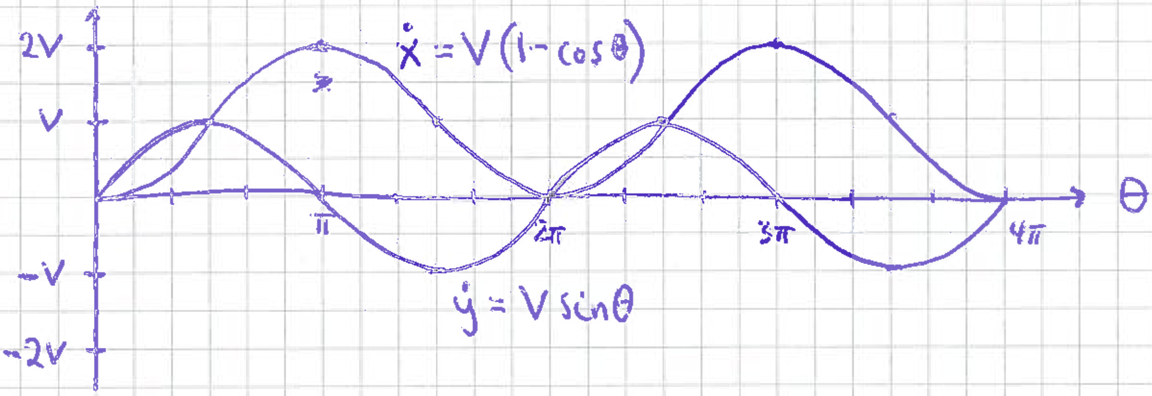
med

$$\dot{x} = R\dot{\theta} - R\dot{\theta}\cos\theta = V(1-\cos\theta)$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta}\sin\theta = V\sin\theta$$

Sykloide : $x = R(\theta - \sin\theta) \qquad y = R(1-\cos\theta)$

Fartskomponentene til P (antar konstant V):



Merk: $v_p = 0$ når $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, dvs når P er i kontakt med underlaget

$$\Rightarrow P_f = dW_f/dt = \vec{f}\cdot\vec{v} = 0$$

$\Rightarrow$ Null effekttap ved ren rulling, selv om $\vec{f} \neq 0$

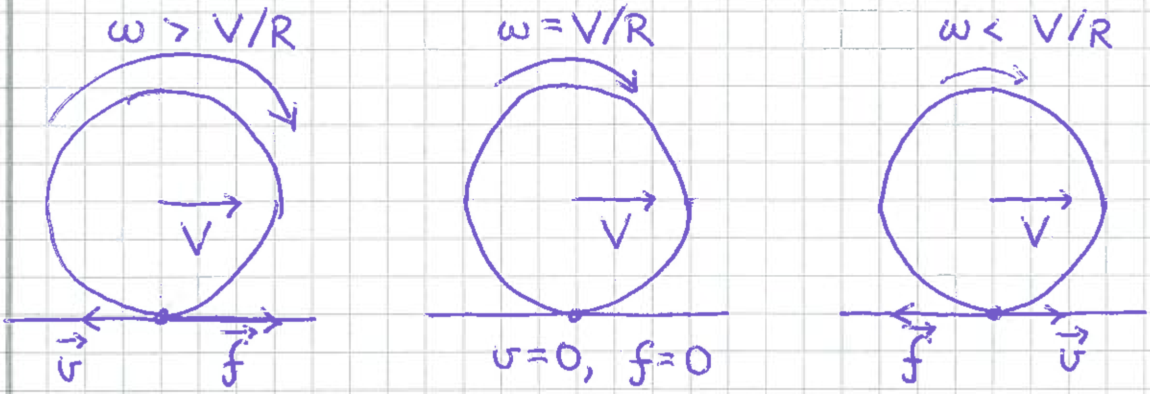
(Statisk friksjon; $f \leq \mu_s \cdot N$)

Retning på $\vec{f}$: Motsatt rettet den relativhastighet $\vec{v}$ som ville oppstå dersom $\mu_s \to 0$.

["Rulle-friksjon" $\Rightarrow$ Noe tap av mekanisk energi, også ved ren rulling.
Vi ser bort fra dette.]

Sluring [LL 6.7]

$\omega \neq V/R \Rightarrow$ relativ hastighet $v = V - \omega R$ mellom legeme og underlag i kontaktpunktet



<u>Kinetisk</u> friksjon, $f = \mu_k \cdot N$.

Tapt mek. energi pr tidsenhet : $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$

<u>Kinetisk energi ved ren rulling</u>

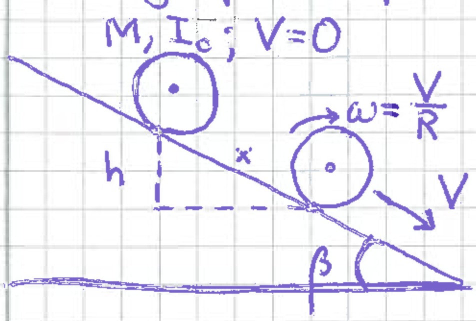
$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$I_0 = c \cdot M R^2 \qquad (c = 1 \text{ for ring}, \tfrac{2}{5} \text{ for kule osv})$$

$$\omega = V/R$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} c M R^2 \frac{V^2}{R^2} = \underline{\underline{(1+c)\frac{1}{2} M V^2}}$$

Eks: Rulling på skråplanet [YF 10.3 ; LL 6.8]



Finn V, $\dot{V}$, f (friksjon) samt minste μ_s som gir ren rulling.

$I_0 = c \cdot MR^2$ = tregh.mom. mhp CM

Exp gir: V(kule) > V(skive) > V(kuleskall) > V(hul sylinder)

Løsning: Ren rulling ⇒ mek. energi bevart ($f \leq \mu_s \cdot N$)

$\Rightarrow Mgh = (1+c)\frac{1}{2}MV^2$; $h = x \sin\beta$

$\Rightarrow V(x) = \sqrt{\frac{2gx\sin\beta}{1+c}}$; OK, siden $c(\text{kule}) = \frac{2}{5}$,

$c(\text{skive}) = 1/2$, $c(\text{kuleskall}) = 2/3$, $c(\text{hul sylinder}) = 1$

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dV}{dx} = V \cdot \sqrt{\frac{2g\sin\beta}{1+c}} \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{g\sin\beta}{1+c}$$

Dvs: Friksjon $\vec{f}$, rettet oppover skråplanet, reduserer $\dot{V}$ med en faktor $(1+c)^{-1}$. [$f=0 \Rightarrow \dot{V} = g\sin\beta$]

N2: $Mg\sin\beta - f = M\dot{V} = Mg\sin\beta/(1+c)$

$$\Rightarrow f = \frac{c}{1+c} Mg\sin\beta$$

Men: Ren rulling mulig bare hvis $f \leq f_{max} = \mu_s N$

$$\Rightarrow \frac{c}{1+c} Mg\sin\beta \leq \mu_s Mg\cos\beta$$

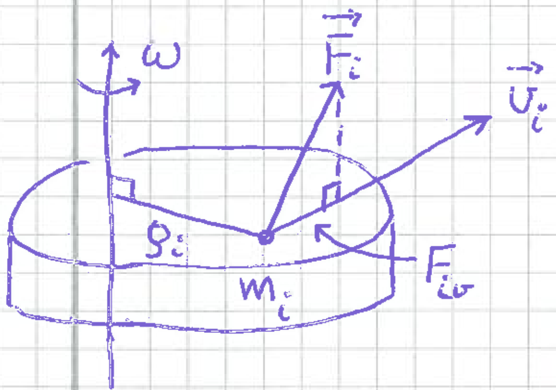
$$\Rightarrow \mu_s \geq \frac{c}{1+c}\tan\beta$$

Eks: Kompakt kule, $c = 2/5$, og $\mu_s = 0.3$ gir ren rulling opp til $\beta = \arctan[\mu_s(1+c)/c] = \arctan[0.3 \cdot 7/2]$
$= \arctan[21/20] \approx 45°$

Rotasjonsdynamikk

Akse med fast orientering

- Essensielt endimensjonalt problem
- Dekker det meste vi skal ta for oss
- Beskriver rotasjonsdelen av legemets totale bevegelse



$v_i = \rho_i \omega$

F_{iv} = komponent av $\vec{F}_i$ langs $\vec{v}_i$

Vi regner ut tilført effekt, $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$, på to måter:

(a) Med N2: $P = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ (som s.17)

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{d\omega^2}{dt} = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \frac{d\omega}{dt} = \underline{\underline{I\omega \frac{d\omega}{dt}}}$$

(b) $P = \sum_i F_{iv} v_i = \left\{ \sum_i F_{iv} \rho_i \right\} \omega = \underline{\tau \omega}$

$\Rightarrow \boxed{\tau = I\dot{\omega}}$ N2 for rotasjon om akse med fast orientering

med $\tau = \sum_i F_{iv} \rho_i$ = ytre <u>dreiemoment</u> på legemet, mhp rotasjonsaksen

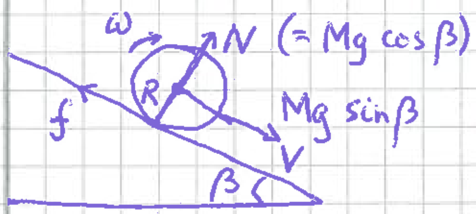
$I = \sum_i m_i \rho_i^2$ = legemets <u>treghetsmoment</u> mhp rot. aksen

---

Fra $P = \tau\omega = \tau \, d\varphi/dt$ og $P = dW/dt$ følger det at tilført arbeid ved rotasjon er

$\boxed{dW = \tau \, d\varphi}$ [YF 10.4; LL 6.4]

Eks 1: Rulling på skråplan



$\omega = V/R \; ; \quad \mathring{\omega} = \mathring{V}/R$

$I_0 = c \cdot MR^2$

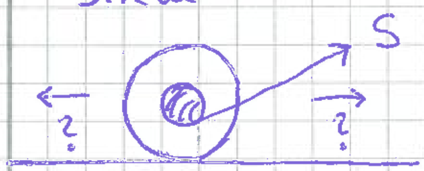
N2, rot. om akse gjennom CM: $\tau = I_0 \mathring{\omega} \; ; \quad \tau = f \cdot R$

$\Rightarrow f \cdot R = cMR^2 \cdot \mathring{V}/R \quad \Rightarrow f = cM\mathring{V}$

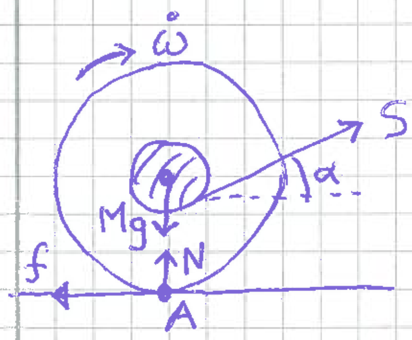
N2, translasjon: $Mg \sin\beta - f = M\mathring{V}$

$\Rightarrow Mg \sin\beta = M\mathring{V} + f = (1+c)M\mathring{V} \quad \Rightarrow \underline{\underline{\mathring{V} = \frac{g \sin\beta}{1+c}}}$ (som s. 37)

Eks 2: Snelle



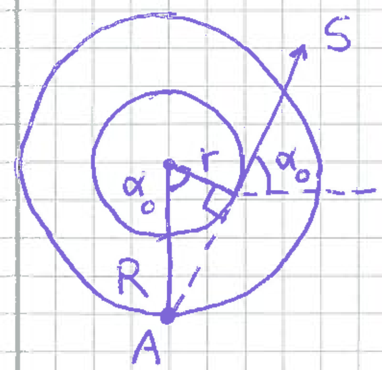
Velger akse gjennom kontakt-punktet (-linja) A ; bare snordraget $\vec{S}$ kan ha dreiemoment mhp aksen A:



Liten α ⇒ ruller mot høyre

Stor α ⇒ —"— venstre

Statisk likevekt når $\vec{S}$ går gjennom A ; da er $\tau_A = 0$:



[Vis at snella nå blir liggende i ro så lenge

$$S \leq \frac{\mu_s Mg}{\cos\alpha_0 + \mu_s \sin\alpha_0}$$]

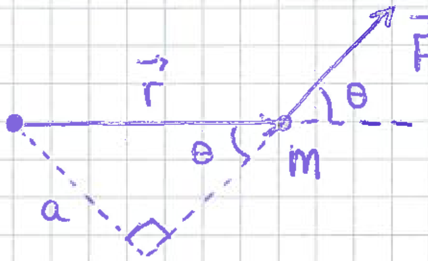
$\Rightarrow \cos\alpha_0 = \frac{r}{R}$

Rotasjonsdynamikk, "vektorielt"

~~Dreiemoment [YF 10.1; LL 5.5, 6.4]~~

NB: Dreiemoment $\vec{\tau}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ må alltid beregnes relativt et (fritt valgt!) referansepunkt $\vec{r}_0$. La oss her, for enkelhets skyld, velge origo som referansepunkt. Posisjonen til en punktmasse eller et masseelement, relativt referansepunktet, blir da ganske enkelt $\vec{r}$. Med vilkårlig ref. punkt $\vec{r}_0$ må $\vec{r}$ erstattes av $\vec{r} - \vec{r}_0$.

Dreiemoment [YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



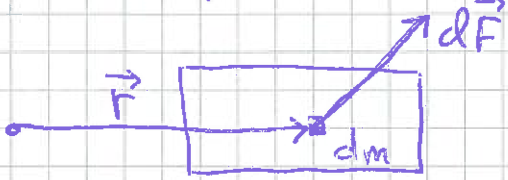
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

= $\vec{F}$'s dreiemoment på m

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{r}$

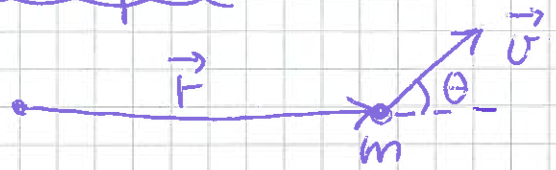
Abs. verdi: $\tau = r \cdot F \cdot \sin\theta = a \cdot F$ ("arm × kraft")

For partikkelsystem, f.eks stivt legeme:



$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$$ = totalt dreiemoment på systemet

Dreieimpuls [YF 10.5 ; LL 6.6]



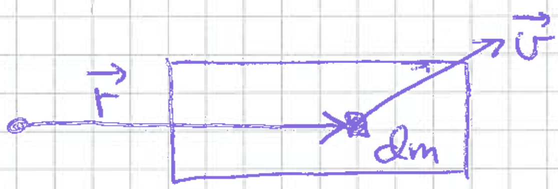
$\vec{p} = m\vec{v}$ (= impulsen)

$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$ = m's dreieimpuls

Retning: $\vec{L} \perp \vec{p}$, $\vec{L} \perp \vec{r}$

Abs.verdi: $L = r \cdot p \cdot \sin\theta = a \cdot p$ ("arm × impuls")

For partikkelsystem, f.eks. stivt legeme:



$d\vec{p} = dm \cdot \vec{v}$

$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v}\, dm$ = systemets totale dreieimpuls

N2 for rotasjon [YF 10.5 ; LL 6.6]

Skal vise at: $\boxed{\vec{\tau} = d\vec{L}/dt}$ [kalles også spinnsatsen]

Punktmasse m:

$$d\vec{L}/dt = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = m \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{= \vec{v} \times \vec{v} = 0} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

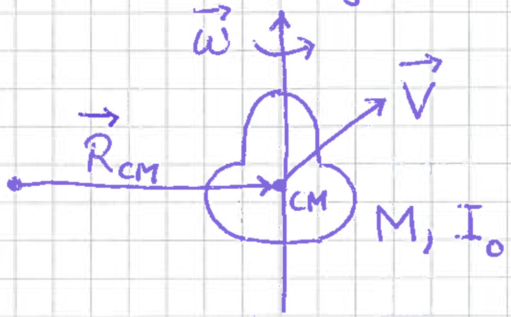
$$\overset{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

Tilsvarende bevis for partikkelsystem.

$\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på systemet; $\vec{L}$ = systemets totale dreieimpuls

$\vec{L}$ for stivt legeme [YF 10.5 ; LL 6.6]

Vi antar stivt legeme med refleksjonssymmetri om rotasjonaksen:



Resultat: $\boxed{\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0\vec{\omega}}$

[Se eget notat for bevis!]

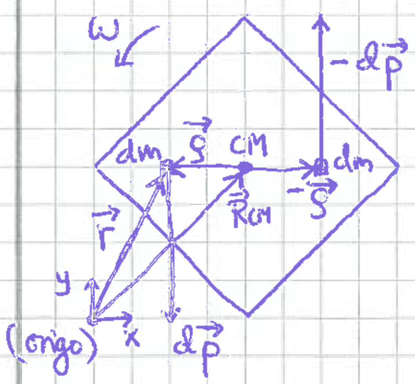
Banedreieimpuls:

$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$; dvs direkte fra definisjonen av $\vec{L}$, som punktmasse M i posisjon $\vec{R}_{CM}$ med hastighet $\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$.

Indre dreieimpuls ("spinn"):

$\vec{L}_s = I_0\vec{\omega}$; uavhengig av valg av referansepunkt.

"Antydningsbevis" for $\vec{L}_s = I_0\vec{\omega}$:



$$\vec{r} = \vec{R}_{CM} + z\hat{z} + \rho\hat{\rho}$$

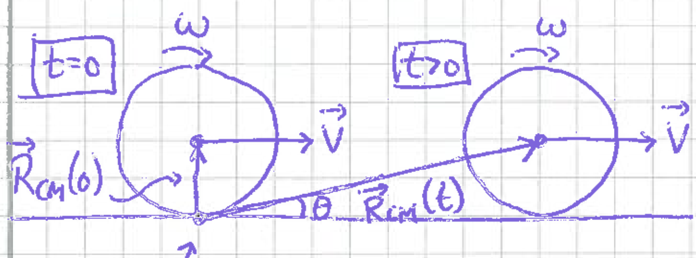
$$d\vec{p} = dm \cdot \vec{v} = dm \cdot \omega\rho\,\hat{\varphi}$$

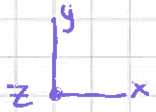
$$\Rightarrow d\vec{L}_s = (\underbrace{\vec{R}_{CM} + z\hat{z}}_{\text{kanselleres pga refl. symmetri!}} + \rho\hat{\rho}) \times (dm \cdot \omega\rho \cdot \hat{\varphi})$$

$$\rightarrow \rho^2 dm\, \omega\, \hat{\rho} \times \hat{\varphi} = dI_0 \cdot \underbrace{\omega\hat{z}}_{=\vec{\omega}}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_s = \int d\vec{L}_s = \left\{\int dI_0\right\}\vec{\omega} = \underline{\underline{I_0\vec{\omega}}}$$

Eks: Bestem $\vec{L}$ for rent rullende kule





$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$; $\quad I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

$\vec{r}_0 = 0$ (ref.punkt)

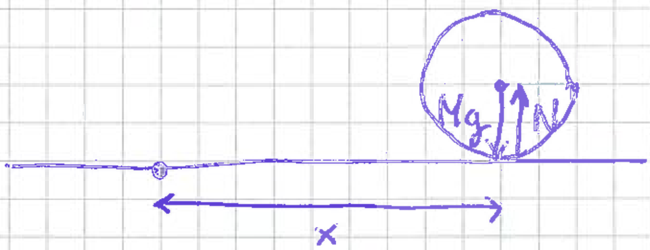
$$\vec{L}_b(0) = \vec{R}_{CM}(0) \times M\vec{V} = -MRV\,\hat{z}$$

$$\vec{L}_b(t) = \vec{R}_{CM}(t) \times M\vec{V} = -R_{CM}(t)\,MV \sin\theta\,\hat{z} = -MRV\,\hat{z}$$

$$\vec{L}_s(0) = \vec{L}_s(t) = I_0\,\vec{\omega} = -\frac{2}{5}MR^2\,\frac{V}{R}\,\hat{z} = -\frac{2}{5}MRV\,\hat{z}$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\vec{L} = -\frac{7}{5}MRV\,\hat{z}}}$, uavhengig av t hvis V=konstant

Vi har $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$, så her må $\vec{\tau} = 0$:



Mg (ned) og N (opp) har like stor arm x; $N = Mg$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = x\hat{x} \times N\hat{y} + x\hat{x} \times Mg(-\hat{y}) = \underline{\underline{0}} \qquad \text{OK!}$$

Bevaringslover oppsummert

- For et isolert system (ingen ytre krefter) er total energi E, impuls $\vec{p}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ bevart
- I et konservativt system er mekanisk energi $K+U$ bevart
- Hvis netto ytre kraft på et system er null, er total impuls $\vec{p}$ bevart
- Hvis netto ytre dreiemoment på et system er null, er total dreieimpuls $\vec{L}$ bevart

Spesialtilfelle: Statisk likevekt [YF 11.1-11.3; LL 7.1]

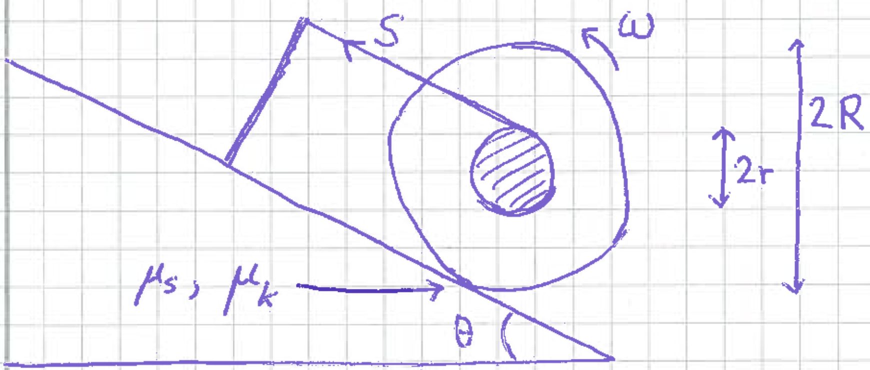
Et stivt legeme forblir i ro (dvs $\vec{p}=0$ og $\vec{L}=0$) bare når netto ytre kraft og netto ytre dreiemoment er null:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konstant} \quad (\text{f.eks. } \vec{p}=0)$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konstant} \quad (\text{f.eks. } \vec{L}=0)$$

Eksempler, rotasjon

Eks 1: Snelle på skråplan (Øving 6)

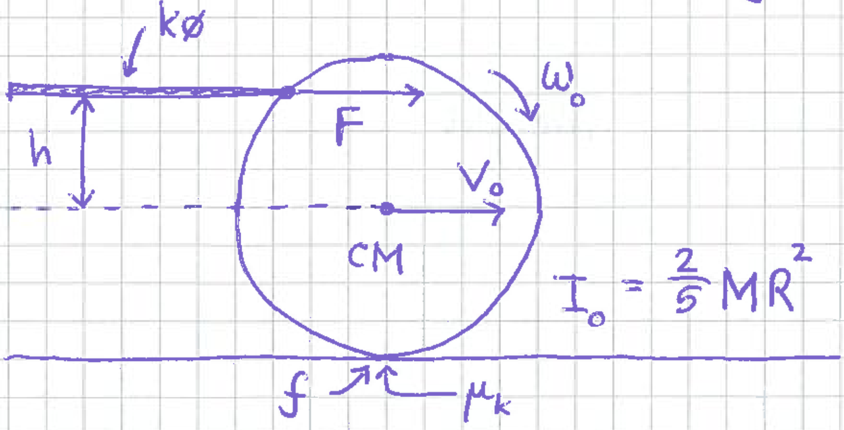


- Ved hvilken vinkel θ_0 begynner snella å "skure baklengs" nedover skråplanet?
- Hva er snordraget S og akselerasjonen a når $\theta > \theta_0$?

Tips:

- N1 langs skråplanet og N1 for rotasjon om CM gir θ_0 ved å sette $f = f_{max} = \mu_s N$
- N2 langs skråplanet og N2 for rotasjon om CM gir S og a; nå er $f = \mu_k N$

Eks 2: Snooker [LL 6.7 ; øving 6]



Kortvarig støt med køen i høyde h over senterlinjen.
$F \gg f \Rightarrow$ neglisjerer f i selve støtet.
Finn kulas bevegelse.

Tips:
Støtet (F ; $\tau = F \cdot h$ med CM som referanse)
gir V_0 og ω_0 bestemt av N2 og N2, rotasjon:

$$F \cdot \Delta t = \Delta p = MV_0 \quad ; \quad \tau \cdot \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$$

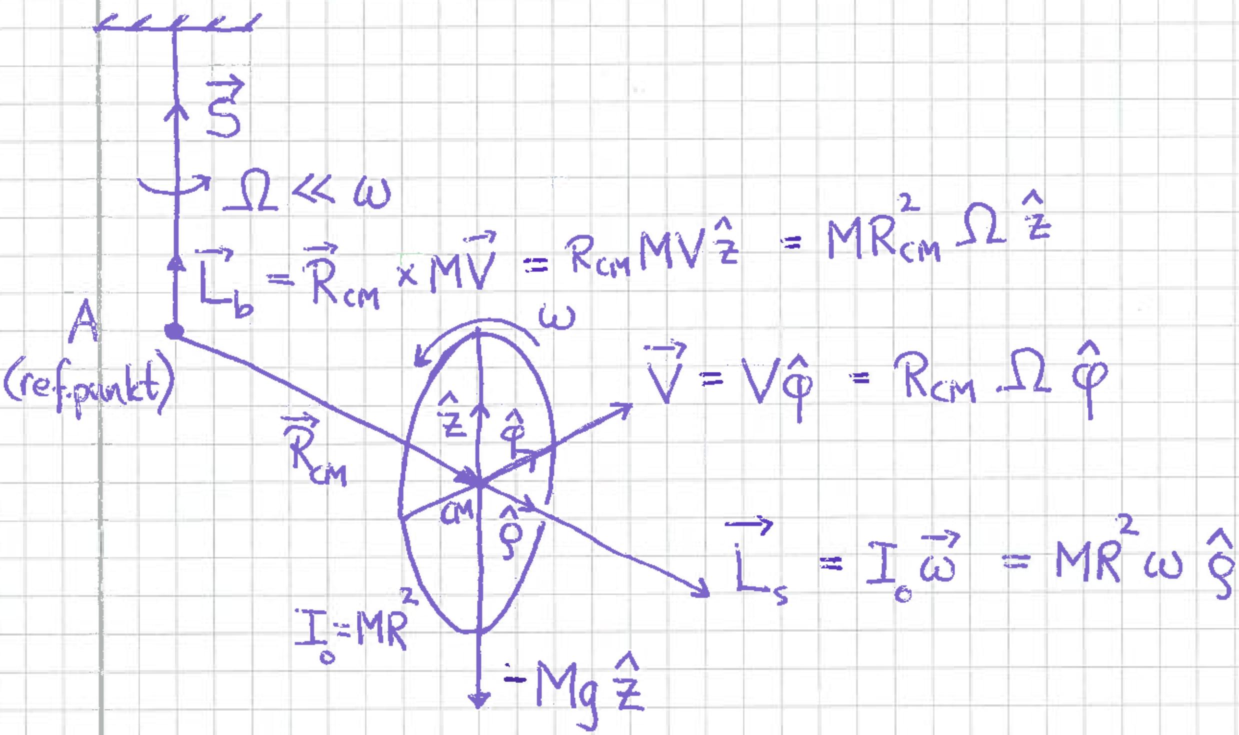
Stor h $\Rightarrow \omega_0 > V_0/R \Rightarrow$ sluring, $\vec{f}$ mot høyre

Liten h $\Rightarrow$ omvendt

h= ..... $\Rightarrow \omega_0 = V_0/R \Rightarrow$ ren rulling umiddelbart

Etter hvert: ren rulling uansett (og $f = 0$)

Eks 3: Presesjon [YF 10.7; LL 6.10]



Exp: $M = 5\,\text{kg}$, $R = 0.3\,\text{m}$, $R_{CM} = 0.2\,\text{m}$, $T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx \underline{4.7}$

Oppgave: Finn sammenheng mellom T_Ω og $T_\omega = \frac{2\pi}{\omega}$.

Løsning:

N2, rot. relativt A: $\vec{\tau}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$.

Dreiemoment relativt A:

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} M g \left(\hat{\rho} \times (-\hat{z})\right) = R_{CM} M g\, \hat{\varphi}$$

($\vec{S}$ har null arm relativt A.)

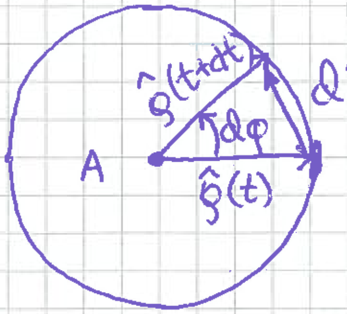
Dreieimpuls relativt A:

$$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M R_{CM}^2 \,\Omega\, \hat{z} + MR^2 \omega \hat{\rho} \approx MR^2 \omega \hat{\rho}$$

når $\omega \gg \Omega$ (og $R_{CM} \approx R$).

Dermed: $d\vec{L}_A/dt \approx MR^2\omega\, d\hat{\rho}/dt$

Sett ned langs z-aksen:



$$d\hat{\rho} = 1 \cdot d\varphi \cdot \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} = \Omega\,\hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \underbrace{R_{CM} M g\,\hat{\varphi}}_{\vec{\tau}_A} \approx \underbrace{MR^2\omega\,\Omega\,\hat{\varphi}}_{d\vec{L}_A/dt}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{R_{CM}\, g}{R^2\,\Omega}$$

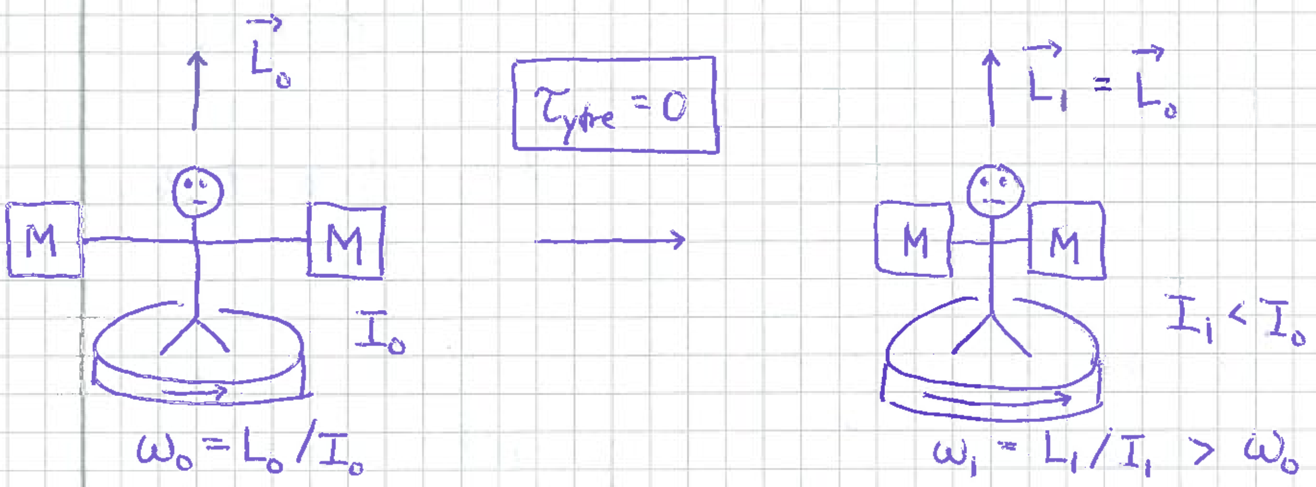
$\Rightarrow$ Hjulets omløpstid:

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \underline{\underline{\frac{(2\pi R)^2}{R_{CM}\, g\, T_\Omega}}}$$

Exp. tallverdi:

$$T_\omega = \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot T_\Omega} \approx \frac{2\ s^2}{T_\Omega} \approx \underline{\underline{0.4\ s}}$$

Eks 4: Piruett [YF 10.6 ; LL 6.5]

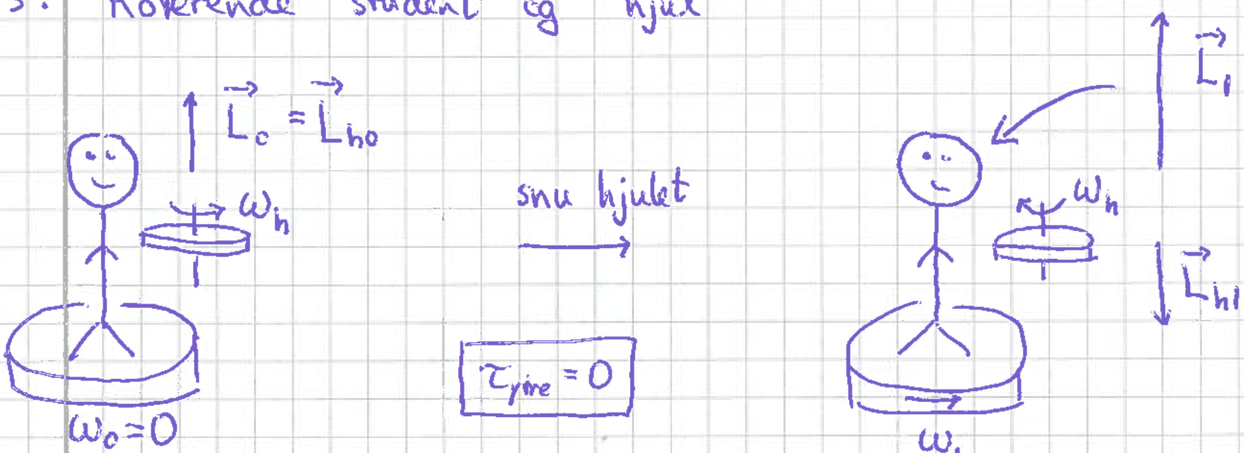


$$\tau_{ytre} = 0 \Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_0 \Rightarrow \omega_1 = L_0 / I_1 = \omega_0 I_0 / I_1 > \omega_0$$

$$K_0 = \tfrac{1}{2} I_0 \omega_0^2 \; ; \; K_1 = \tfrac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \tfrac{1}{2} I_0 \omega_0 \omega_1 = K_0 \, I_0 / I_1 > K_0$$

Utført arbeid tas fra kjemisk energi i musklene

Eks 5: Roterende student og hjul



$$\vec{L}_1 + \vec{L}_{h1} = \vec{L}_0 \quad ; \quad \vec{L}_{h1} = -\vec{L}_0$$

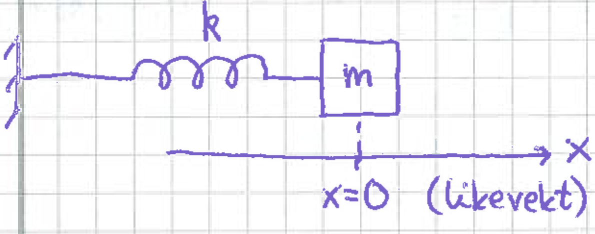
$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{L}_1 = 2\vec{L}_0}}$$

Svingninger [YF 14 ; LL 9]

= oscillasjoner = periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: masse/fjær, pendler, gitarstreng, atomer i molekyler etc

Harmonisk oscillator [YF 14.2 ; LL 9.1-9.3]



x = posisjonen til m

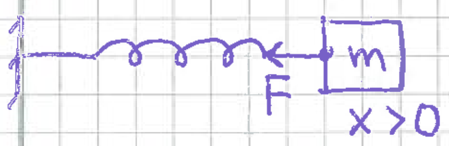
= fjærforlengelsen ($x>0$)

(evt. sammenpressing, $x<0$)

- $x \gtrless 0 \Rightarrow \vec{F} \sim \mp \hat{x}$ (fjæra søker tilbake til likevekt)
- $|\vec{F}| \sim |x|$ (ideell fjær; Hookes lov)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -kx\,\hat{x}}$$

k = fjærkonstanten ; $[k] = \mathrm{N/m}$



N2 : $-kx = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + (k/m)x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

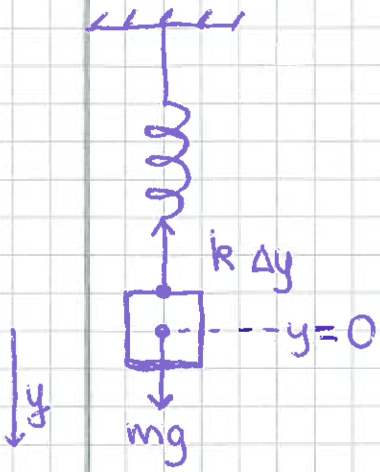
Harmonisk oscillator i 1D, med $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Generell løsning: [Øving: B og C uttrykt ved A og φ]

$x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$ evt $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Konstantene B, C evt A, φ fastlegges via to initialbetingelser, f.eks $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$

Vertikalt i tyngdefeltet:



Strukket fjær i likevekt: $mg = k\Delta y \Rightarrow \Delta y = \frac{mg}{k}$

Anta m (evt (M)) i $y=0$ i strukket likevekt

$$\Rightarrow \sum F = mg - k(\Delta y + y) = -ky$$

$$\overset{N2}{\Longrightarrow} \quad m\ddot{y} = -ky$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

Dvs: Samme ligning, samme $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Størrelser og begreper (jf sirkelbevegelse):

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ = oscillatorens "posisjon"

A = amplitude = max utsving fra likevekt; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkelfrekvens; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ = periode = tid pr hel svingning; $[T] = s$

$f = T^{-1}$ = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet; $[f] = s^{-1} = Hz$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant; $[\varphi] = 1$

Hastighet: $\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$

Akselerasjon: $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x(t)$ (ok!)

$= \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$

$\Rightarrow$ Faseforskjell $\pi/2$ mellom x og $\dot{x}$,

—— " —— π mellom x og $\ddot{x}$ (i motfase)

Energi i harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4]

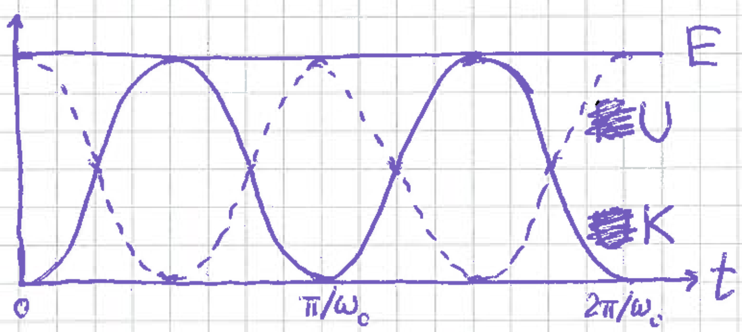
$$K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega_0 t \quad \begin{pmatrix}\text{Antar} \\ \text{her} \\ \varphi = 0\end{pmatrix}$$

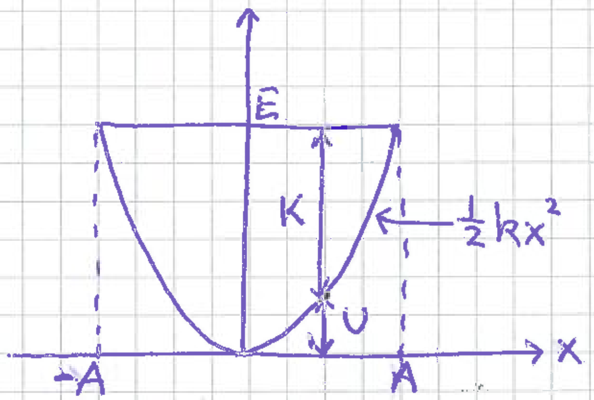
$$U = -\int_0^x F(x)\,dx = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow U(t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$\Rightarrow E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = \text{konstant}$$

$\Rightarrow$ Total mek. energi er bevart; systemet er konservativt

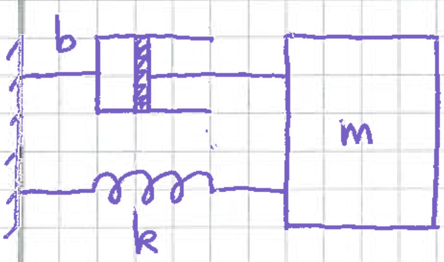




Dempet fri svingning [YF 14.7 ; LL 9.7]

Antar $f = -b\dot{x}$, dvs langsom bevegelse i fluid

[Stor $\dot{x}$ i fluid: $f = -D\dot{x}^2$; Tørr friksjon: $f = \mu_k N$]



N2: $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

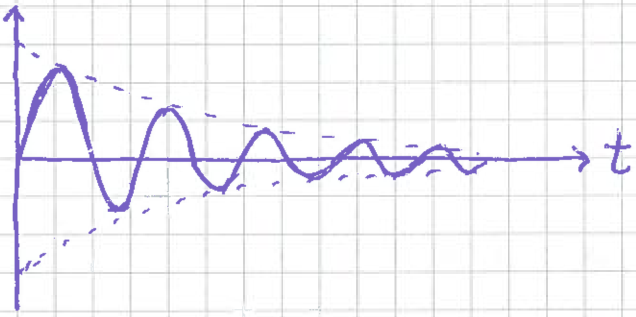
$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$\gamma = b/2m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$[\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$

Underkritisk (svak) demping, $\gamma < \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



---- $\pm A e^{-\gamma t}$

(omhylningskurve)

Dempede svingninger.

Eksponentielt avtagende amplitude, $A e^{-\gamma t}$

$\Rightarrow$ Etter tid $1/\gamma = 2m/b$ er amplituden redusert til $A \cdot e^{-1} \approx 0.37 A$

Overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$

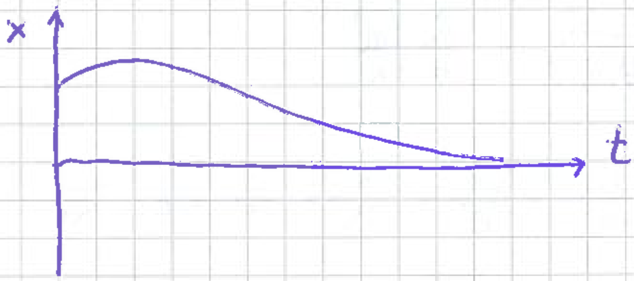
$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad , \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$ $\quad (\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma)$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$

Dvs: $\gamma \geq \omega_0$ gir <u>ikke</u> svingninger.

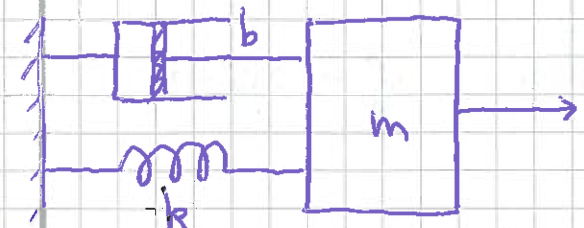


Her: $x(0) > 0$
$\dot{x}(0) > 0$

Eks: Støtdempere har $\gamma \approx \omega_0$,
gir best kjørekomfort

Tvungen svingning. Resonans

[YF 14.8; LL 9.9]



$F(t) = F_0 \cos \omega t$
= ytre harmonisk kraft

N2: $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \qquad \left(2\gamma = \frac{b}{m}, \ \omega_0^2 = \frac{k}{m}\right)$$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen løsning, som s. 53 og 54:

$x_h(t) \sim \exp(-\gamma t) \approx 0$ når $t \gg 1/\gamma$; kun relevant for innsvingningsforløpet

Partikularløsning:

$x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$

Innsetting i $\ddot{x}_p + 2\gamma \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$ gir

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\}^{1/2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\gamma\omega}\right\}$$

Resonans:

Svært stor $A(\omega)$ dersom $\gamma \ll \omega_0$ (svak demping) og $\omega \approx \omega_0$;

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\,\frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{F_0}{k}\,\frac{\omega_0}{2\gamma} = A_0\,\frac{\omega_0}{2\gamma} \gg A_0$$

$A(\omega_0) \to \infty$ hvis $\gamma \to 0$ (jf Tacoma bridge, 1940)

Oscillatorens energi:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad ; \quad E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{F_0^2}{2k}$$

$(\omega_0/\gamma = 20)$

$\Rightarrow Q = 10$

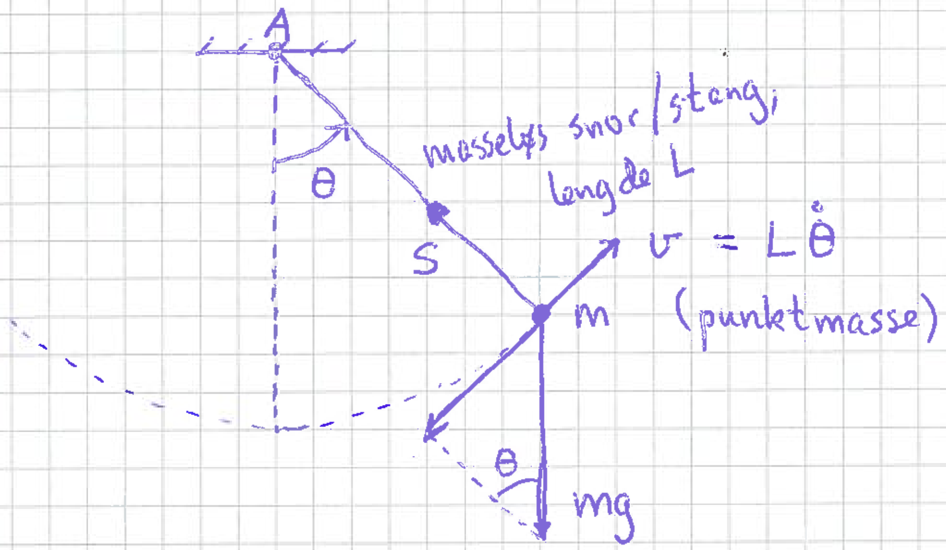
Halvverdibredde: $\Delta\omega \approx 2\gamma$

Q-faktor: $Q = \omega_0/\Delta\omega = \omega_0/2\gamma$

Mål for hvor skarp resonansen er.

Redusert demping γ gir smalere og høyere resonans.

Matematisk pendel [YF 14.5 ; LL 9.6]



Bevegelsen ∥ sirkelbanen:

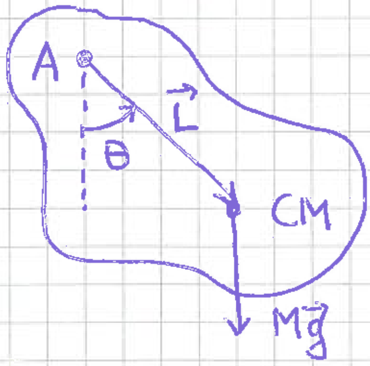
$$\left.\begin{aligned} F_{\parallel} &= -mg\sin\theta \\ a_{\parallel} &= \dot{v} = L\ddot{\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Anta små utsving fra likevekt, $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{g/L}}$$

Fysisk pendel [YF 14.6 ; LL 9.6]



Stivt legeme, masse M, tregh. mom. I mhp aksen A, $\vec{R}_{CM} = \vec{L}$.

N2 for rot. om A: $\tau = I\ddot{\theta}$

med $|\vec{\tau}| = |\vec{L} \times M\vec{g}| = MgL\sin\theta$.

Fortegn: $\vec{\tau}$ gir rot. med klokka når $\theta > 0$

$\Rightarrow \tau = -MgL\sin\theta$

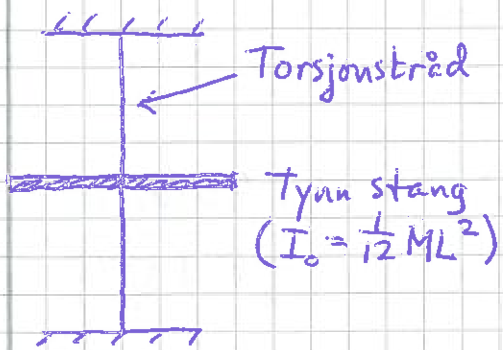
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{MgL}{I}\sin\theta = 0$$

Anta små utsving, $\sin\theta = \theta$: $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \; ; \; \omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{I}}}$

Punktmasse (mat. pendel): $I = ML^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{g/L}$; OK

... $\to I_0$ og $\omega_0 \to 0$; OK

Torsjonspendel [YF 14.4 ; LL 9.6]



Hookes lov: Tråden motsetter seg vridning og virker på stanga med dreiemoment prop. med vridningsvinkelen:

$$\tau = -\kappa \theta$$

med torsjonsstivhet κ

N2, rot. om trådens akse:

$\tau = I_0 \ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad -\kappa\theta = I_0 \ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \; ; \; \omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I_0}}}$

Eks/Exp:

$M = 50\,g$, $L = 11$ cm. M&L $T = 2\pi/\omega_0$ og beregn κ.

$$\kappa = I_0 \omega_0^2 = 4\pi^2 I_0 / T^2 = \pi^2 ML^2 / 3T^2$$

$$= \pi^2 \cdot 0.050\,\text{kg} \cdot (0.11\,\text{m})^2 / 3 \cdot (0.8\,\text{s})^2$$

$$= \underline{3.1 \cdot 10^{-3}}\ \text{kg m}^2/\text{s}^2 \qquad (\text{evt Nm})$$

ELEKTRISITET OG MAGNETISME

YF 21-31 ; LHL 19-27

I. Elektrostatikk. Ledere, isolatorer [YF 21-24; LHL 19-20]
II. Strøm. DC-kretser [YF 25-26; LHL 21-22]
III. Magnetostatikk. Magnetisme [YF 27-28; LHL 23,26]
IV. Elektromagnetisk induksjon. AC-kretser [YF 29-31; LHL 24,25,27]

"Fra Coulombs lov til forståelse av kretselementene motstand, kondensator og spole."

I. Elektrostatikk [YF 21-24; LHL 19-20]

Elektrisk ladning [YF 21.1 ; LHL 19.1]

Materie består av atomer.

Atom = kjerne + elektroner

Kjerne = protoner + nøytroner = kjernepartikler

Kjernepartikkel = tre kvarker

Elementærpartikler = (antatt!) udelelige "byggeklosser" i naturen (elektron, kvarker, foton, nøytrinoer, Higgs osv); disse partiklene har elektrisk ladning, positiv, negativ eller null, og ladningen er kvantisert :

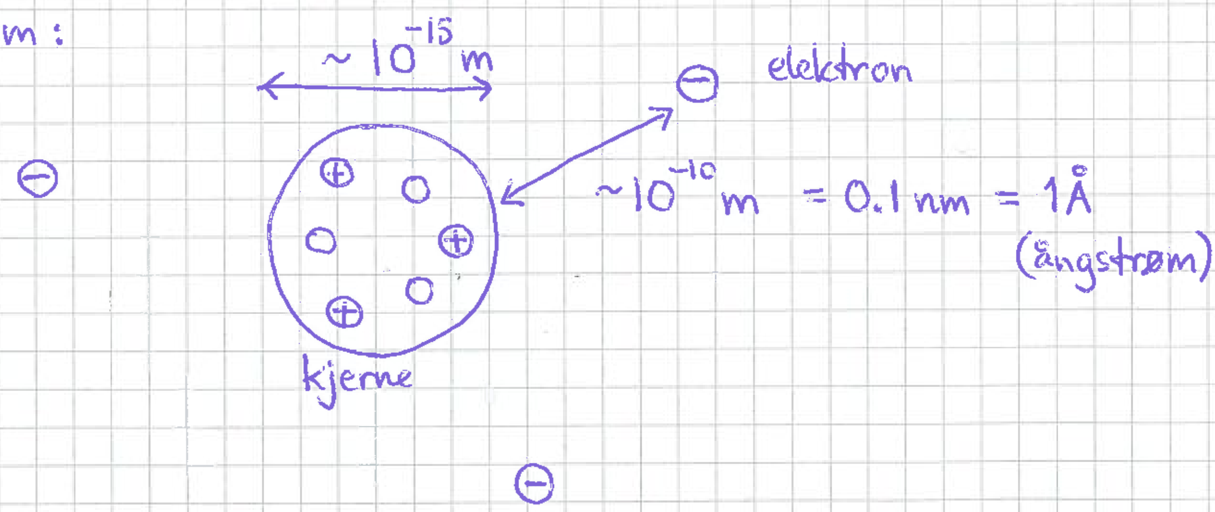
Elementærpartikkel		Ladning
Elektron	(e)	$-e$
Opp-kvark	(u)	$+2e/3$
Ned-kvark	(d)	$-e/3$
Elektron-nøytrino	(ν_e)	0
Foton	(γ)	0

e = elementærladningen; påvist eksperimentelt av R. Millikan med små elektrisk ladede oljedråper i 1909 (NP 1923; NP = nobelpris)

$$\text{Nøytron } (n) = 1u + 2d \Rightarrow q_n = 0$$
$$\text{Proton } (p) = 2u + 1d \Rightarrow q_p = +e$$

[symbol q, Q for elektrisk ladning: "quantity of electricity"]

Atom:



Praktisk talt hele atommassen i kjernen:

$$m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$
$$m_n \approx m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Nøytrale atomer med atomnummer Z har
Z protoner og Z elektroner $\Rightarrow Q = Ze - Ze = 0$

Ioner er atomer og molekyler med flere eller færre elektroner enn protoner.

Eks:
N^{3-} = nitrogenatom med 10 elektroner $(Z=7)$, $q = -3e$
N_2^+ = N_2-molekyl med 13 elektroner, $q = +e$

Ladningsbevarelse:
Netto ladning i et lukket system er konstant.

Eks: β-decay

$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ (f.eks. ${}^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N + e^- + \bar{\nu}_e$)
Q: $0 \rightarrow +e + (-e) + 0 = 0$ antinøytrino

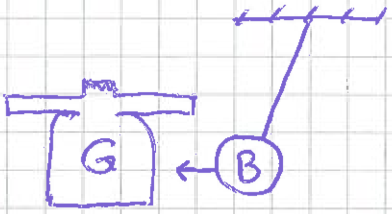
$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ (f.eks. ${}^{23}_{12}Mg \rightarrow {}^{23}_{11}Na + e^+ + \nu_e$)
Q: $+e \rightarrow 0 + e + 0 = e$ positron

Med kvarker:
$n = 1u + 2d \xrightarrow{1d \rightarrow 1u} 2u + 1d = p$ (β^- decay)
$p = 2u + 1d \xrightarrow{1u \rightarrow 1d} 1u + 2d = n$ (β^+ decay)

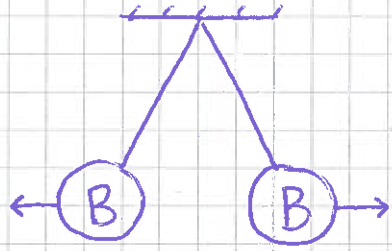
Påvisning av ladning (kvalitativt):

Gni 2 ballonger mot samme genser

$\Rightarrow$



(tiltrekning)

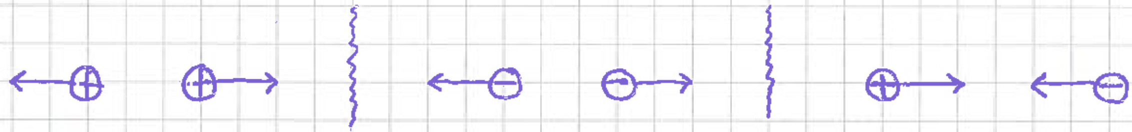


(frastøtning)

Konklusjon:

- Samme type ladning frastøter hverandre
- Ulik type ladning tiltrekker hverandre
- Kaller de to typene ladning positiv og negativ

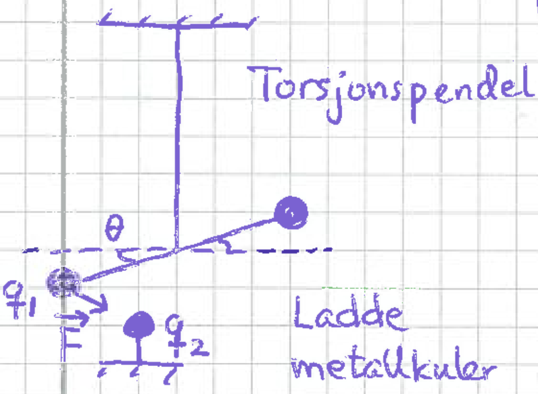
$\Rightarrow$

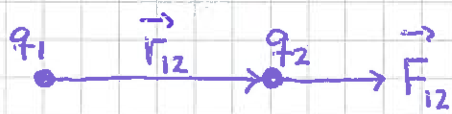


Coulombs lov

[YF 21.3 ; LHL 19.3] (s.8)

(ca 1785)





Coulomb observerte

- $F_{12} \sim q_1 \cdot q_2 / r_{12}^2$
- $\vec{F}_{12} \sim \hat{r}_{12}$

- Samme form som Newtons gravitasjonslov
- $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ (N3)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{12} = K_e \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}}$$

Coulombs lov

Enhet for ladning [YF 21.3 ; LHL 19.1]

$[q] = C$ (coulomb)

- $1C = 1\,As$ = ladning som passerer tverrsnitt av leder pr sekund når strømstyrken er 1A (ampere)

- $1C$ = ladning til hver av to like ladninger som i innbyrdes avstand 1m frastøter hverandre med kraft $8.98755\ldots \cdot 10^9$ N.

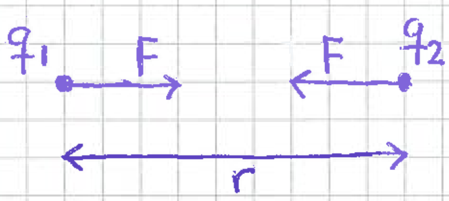
Dvs: $K_e = (4\pi\varepsilon_0)^{-1} = 8.98755\ldots \cdot 10^9 \; m^2N/C^2$, ($\approx 9 \cdot 10^9 \, m^2 N/C^2$)

med $\varepsilon_0 = 8.854\ldots \cdot 10^{-12} \; C^2/m^2N$

= permittiviteten til vakuum (tomt rom)

(mer om dette senere!)

$\Rightarrow \; e = 1.602\ldots \cdot 10^{-19}\,C \approx 1.6 \cdot 10^{-19}\,C$



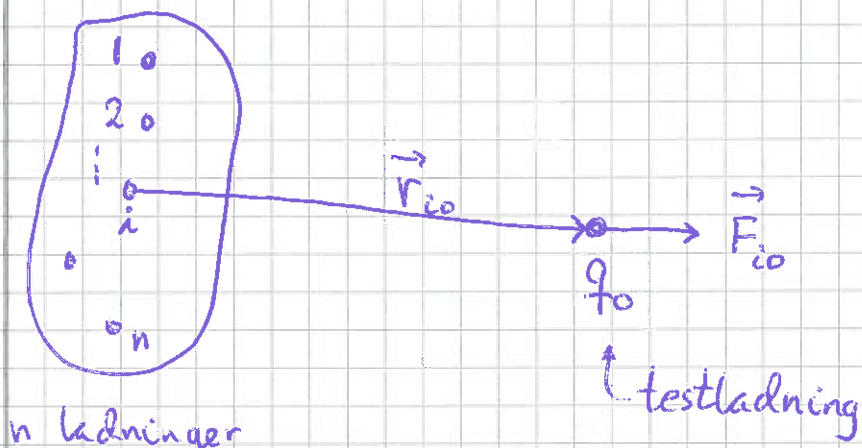
$$\boxed{F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}}$$ Coulombs lov

Elektrisk kraft fra flere ladninger

[YF 21.3 ; LHL 19.3]

Som i mekanikken gjelder superposisjonsprinsippet (SPP):

$$\vec{F}_{tot} = \sum_i \vec{F}_i \quad \text{(total kraft = vektorsum av enkeltkrefter)}$$

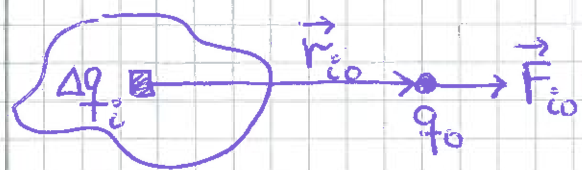


n ladninger
$\{q_1\, q_2 \cdots q_n\}$

$$\vec{F}_o = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{io} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_i \frac{q_i q_o}{r_{io}^2}\, \hat{r}_{io}$$

$$= \text{total kraft på } q_o \text{ fra } \{q_1\, q_2 \cdots q_n\}$$

Med kontinuerlig ladningsfordeling:



$$\vec{F}_o = \sum_i \vec{F}_{io} = \frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o} \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_{io}^2}\, \hat{r}_{io} \rightarrow \frac{q_o}{4\pi\varepsilon_o} \int \frac{\hat{r}\, dq}{r^2}$$

Elektrisk felt [YF 21.4+5 ; LHL 19.4+5]

$q \bullet \xrightarrow{\vec{r}} \bullet_P \; q_0$ (i posisjon P)

elektrisk felt $\stackrel{\text{def}}{=}$ elektrisk kraft pr ladningsenhet

$$\boxed{\vec{E} = \vec{F}/q_0} \qquad [E] = N/C$$

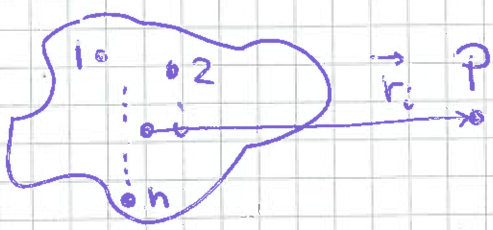
Siden $\vec{F}$ er prop. med q_0, blir $\vec{E}$ uavhengig av q_0:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}}$$

El. felt fra punktladning q i avstand $\vec{r}$

Dvs: Radielt bort fra positiv ladning
— " — inn mot negativ — " —

Med flere ladninger (evt. kontinuerlig ladn. fordeling):



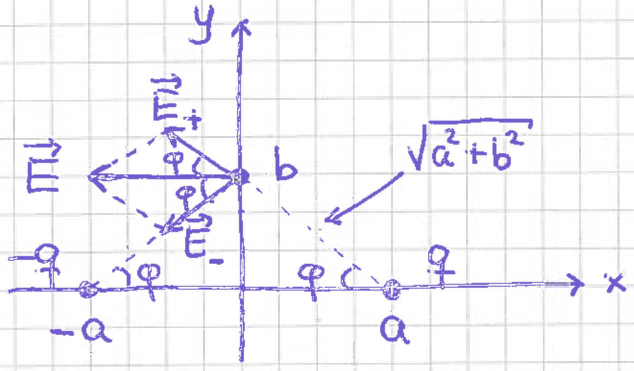
El. felt fra $\{q_1 \cdots q_n\}$ i P:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}$$

(dvs SPP gjelder!)

(evt. $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq \cdot \hat{r}}{r^2}$)

Eks 1: $\pm q$ i $(x,y) = (\pm a, 0)$; finn $\vec{E}$ i $(0,b)$



$$E_+ = E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+b^2)}$$

Symmetri $\Rightarrow$ $E_y = 0$

$E_x = E_+^x + E_-^x$

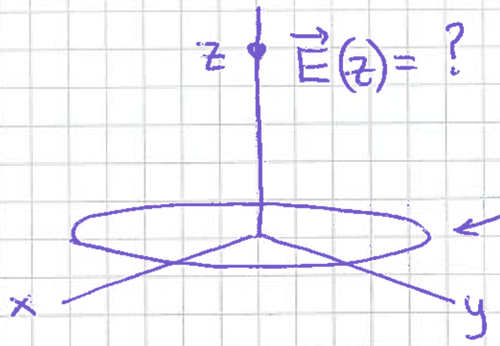
$$E_+^x = E_-^x = E_+ \cos\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{x} \cdot \frac{2qa}{4\pi\varepsilon_0 (a^2+b^2)^{3/2}}$$

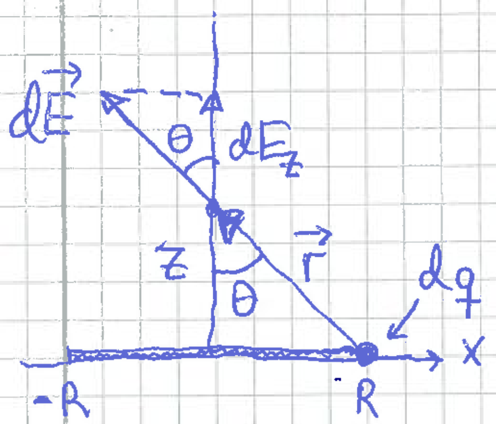
[Langt unna, $b \gg a$, avtar feltstyrken E som $1/b^3$]

[Viktig eksempel; elektrisk dipol; mer om det snart!]

Eks 2: $\vec{E}$ på aksen til jevnt ladet ring



Løsn: Symmetri $\Rightarrow$ $E_x = E_y = 0$; $\vec{E}(z) = E_z(z)\,\hat{z}$



$$d\vec{E} = \frac{dq\,\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = dE \cdot \hat{r}$$

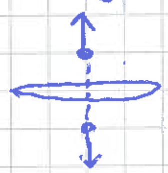
$$dE_z = dE \cdot \cos\theta = dE \cdot z/r$$

$$r = \sqrt{z^2+R^2}$$

$$\Rightarrow E_z = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\int dq = \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+R^2)^{3/2}}$$

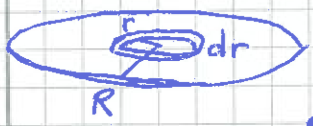
Kontrollerer om svaret er fornuftig:

- $[E_z] = [Q/\varepsilon_0 z^2]$; OK • $E_z(0) = 0$; OK
- $E_z \approx Q/4\pi\varepsilon_0 z^2$ når $z \gg R$; OK, tilsvarer praktisk talt en punktladning Q i origo
- $E_z(z) = -E_z(-z)$; OK



Eks 3: $\vec{E}$ på aksen til jevnt ladet sirkulær skive

$$\updownarrow dE_z = \frac{dq \cdot z}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2}} \quad ; \quad \frac{dq}{Q} = \frac{dA}{A} = \frac{2\pi r \cdot dr}{\pi R^2}$$



$\sigma = Q/\pi R^2$ = skivas ladn. pr flateenhet

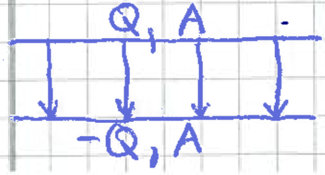
$$E_z = \int dE_z = \int_{r=0}^{R} \frac{Q \cdot 2\pi r \cdot dr \cdot z}{4\pi\varepsilon_0 (r^2+z^2)^{3/2} \cdot \pi R^2} = \frac{Qz}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \Big|_0^R \left(-(r^2+z^2)^{-1/2} \right)$$

$$= \frac{Qz}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \right\} = \underline{\underline{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{z^2}+1}} \right\}}}$$

- $z \gg R \Rightarrow \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{R^2}{2z^2} \Rightarrow E_z \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 z^2}$; OK
- $z \ll R$, dvs svært nær skiva, eller som om skiva var svært stor:

$$E_z \approx \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = \underline{\underline{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}} \quad ; \quad \text{uavhengig av } z \ !$$

Anvendelse: Parallellplatekondensator



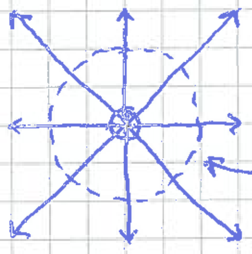
El. feltstyrke mellom platene:

$E = 2 \cdot \sigma/2\varepsilon_0 = \underline{\sigma/\varepsilon_0}$ ($E \approx 0$ utenfor)

Feltlinjer for $\vec{E}$ [YF 21.6 ; LHL 19.6]

- Visuell framstilling av $\vec{E}$ i et område
- $\vec{E} \parallel$ feltlinjene
- Feltstyrken $E = |\vec{E}|$ proporsjonal med tettheten av feltlinjer, dvs antall feltlinjer som krysser en flate, pr flateenhet, $E \sim N/A$

Eks 1: Punktladning



N feltlinjer ut (inn) gjennom kuleflaten når $q > 0$ $(q < 0)$

Feltlinjetetthet på kuleflaten:

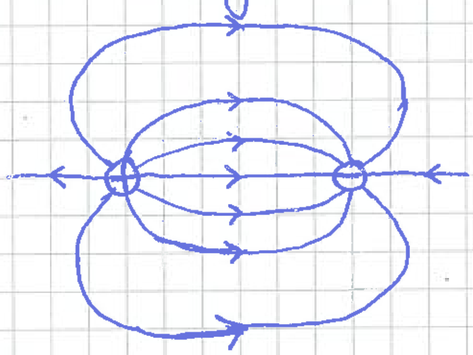
$$\frac{N}{A} = \frac{N}{4\pi r^2} \sim \frac{1}{r^2}$$

Feltstyrke på kuleflaten:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sim \frac{1}{r^2}$$

$\Rightarrow E$ prop. med $\frac{N}{A}$, OK!

Eks 2: To ladninger med motsatt fortegn (= elektrisk dipol)



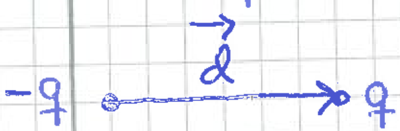
Vi ser at feltlinjer starter på positive ladninger og ender på negative ladninger (eventuelt ∞ langt borte).

Elektrisk dipol og dipolmoment [YF 21.7 ; LHL 19.10]

- De fleste molekyler <u>er</u> elektriske dipoler (H_2O, HCl, ---)
- Hvis ikke, <u>blir</u> de dipoler i et ytre elektrisk felt. Gjelder også gasser, væsker, faste stoffer og enkeltatomer

⇒ <u>Viktig</u> for å forstå materialers elektriske egenskaper

Enkel dipol:

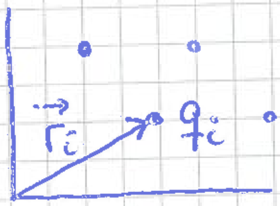


Dipolmoment: $\boxed{\vec{p} = q\vec{d}}$

$[p] = C \cdot m$

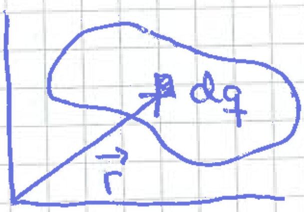
Merk: Netto ladning alltid <u>null</u> for elektrisk dipol.

Flere punktladninger:

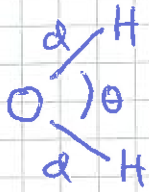


$\boxed{\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i}$ $\quad (\sum_i q_i = 0)$

Kontinuerlig ladningsfordeling:



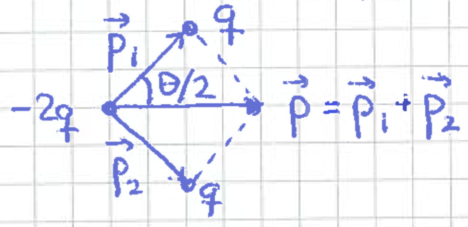
$\boxed{\vec{p} = \int \vec{r}\, dq}$ $\quad (\int dq = 0)$

Eks 1: 

$d = 0.96\,\text{Å}$

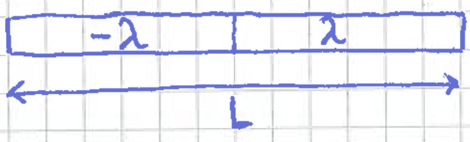
$\theta = 104.5°$

$\longrightarrow$ Modell med punktladn:



$$\Rightarrow p = 2qd\cos\frac{\theta}{2}$$

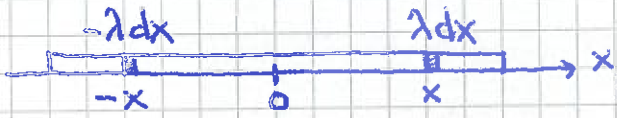
Exp. er $p = 6.2\cdot10^{-30}$ Cm $\Rightarrow q \approx 0.33e$ i vår modell

Eks 2: 

$\pm\lambda$ = ladning pr lengdeenhet

$[\lambda] = C/m$

Lite ladningspar $\pm dq = \pm\lambda\,dx$ i innbyrdes avstand $2x$ har dipolmoment $d\vec{p} = \lambda\,dx\cdot 2x\cdot\hat{x}$:



$\Rightarrow$ Totalt dipolmoment blir :

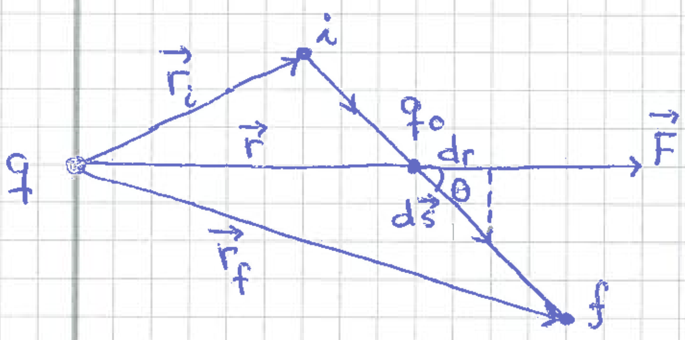
$$\vec{p} = \int d\vec{p} = \int_0^{L/2}\lambda\,dx\,2x\,\hat{x} = 2\lambda\hat{x}\,\Big|_0^{L/2}\frac{1}{2}x^2 = \underline{\underline{\frac{\lambda L^2}{4}\hat{x}}}$$

- $[\lambda L^2] = \frac{C}{m}\cdot m^2 = C\cdot m$; OK
- som om punktladn. $\pm\lambda\cdot\frac{L}{2}$ var plassert i $x = \pm\frac{L}{4}$, dvs med innbyrdes avstand $L/2$; OK

Elektrisk potensial [YF 23.2; LHL 19.9]

Coulombkraften $\vec{F}$ er åpenbart konservativ (samme form som gravitasjonskraften).

Potensiell energi for testladning q_0 i $\vec{E}$-felt fra referanseladning q:



$$\vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cdot ds\cdot\cos\theta = F\cdot dr$$

$$\Delta U = U_f - U_i \overset{\text{def}}{=} -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_{r_i}^{r_f} F\cdot dr$$

$$= -\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_i}^{r_f}\frac{dr}{r^2}$$

$$= \underbrace{\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r_f}}_{U_f} - \underbrace{\frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}_{U_i}$$

Vi velger $U = 0$ for $r \to \infty$.

Da er potensiell energi for ladningsparet q og q_0 i innbyrdes avstand r:

$$\boxed{U(r) = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Elektrisk potensial $\stackrel{\text{def}}{=}$ pot. energi pr ladningsenhet

$$\boxed{V = U/q_0}$$

Enhet: $[V] = \frac{J}{C} = V$ (volt)

$\Rightarrow$ Punktladning q omgir seg med Coulombpotensialet

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Med $\vec{E} = \vec{F}/q_0$, $V = U/q_0$ og $\Delta U = -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s}$ blir

$$\boxed{\Delta V = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

Potensialforskjell $V_f - V_i$ mellom posisjon f (final) og i (initial)

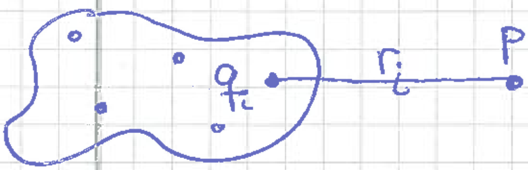
Alternativ enhet for $\vec{E}$: $[E] = V/m$

Alternativ energienhet:

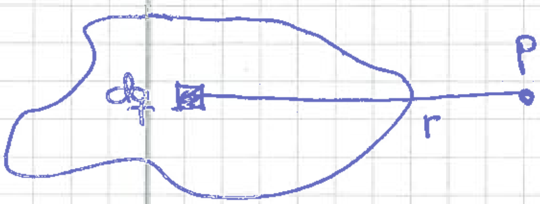
1 eV (elektronvolt) = endringen i potensiell energi når en elementærladning, $q = e$, flyttes fra en posisjon i der potensialet er V_i, til en posisjon f der potensialet er $V_f = V_i + 1\,V$ (dvs $\Delta V = V_f - V_i = 1\,V$)

$$\Rightarrow 1\,eV = \underbrace{1.6\cdot 10^{-19}\,C}_{e} \cdot \underbrace{1\,\frac{J}{C}}_{1\,V} = 1.6\cdot 10^{-19}\,J$$

Potensial fra flere punktladninger, evt. kont. ladn. fordeling:

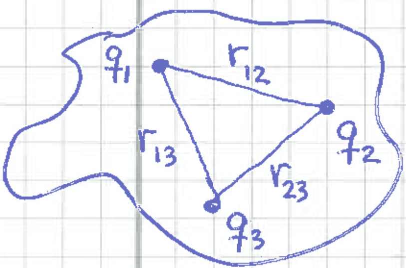


$$V_P = \sum_i V_P^i = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$



$$V_P = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Potensiell energi for flere punktladninger [YF 23.1 ; LHL 19.9, 20.3]



Alle ladningene i systemet vekselvirker parvis.

"Referansesystem": $U = 0$ når alle q_i er uendelig langt fra hverandre

$$\Rightarrow U = U_{12} + U_{13} + \dots + U_{1n}$$

$$+ U_{23} + \dots + U_{2n} + \dots + U_{n-1,n}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} U_{ij} = \sum_{i<j} U_{ij} = \sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

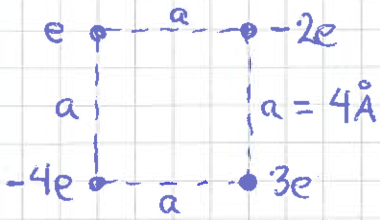
Eks 1: Hva er hvileenergien mc^2 til et elektron? et proton?

Løsning: $m_e c^2 = 9.11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2 = 8.20 \cdot 10^{-14}\,\text{J} \cdot \dfrac{1}{1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{J/eV}}$

$= 5.1 \cdot 10^5\,\text{eV} \approx \underline{0.5\,\text{MeV}}$

$m_p c^2 = 1.67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \cdot (3 \cdot 10^8\,\text{m/s})^2 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^{-1}\,\dfrac{\text{eV}}{\text{J}} \approx \underline{\underline{940\,\text{MeV}}}$

Eks 2:



$U = ?$

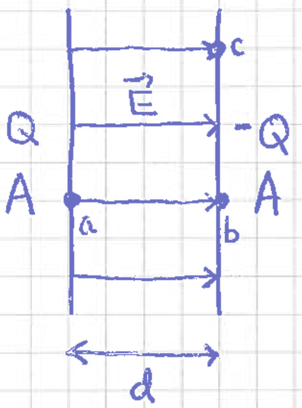
Løsning:

$$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left\{1\cdot(-2) + (-2)\cdot 3 + 3\cdot(-4) + (-4)\cdot 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 1\cdot 3 + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(-2)\cdot(-4)\right\}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}\left\{-24 + \frac{11}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$= 9\cdot 10^9 \cdot \frac{1.6\cdot 10^{-19}}{4\cdot 10^{-10}}\cdot(-16{,}22)\ \text{eV} \approx \underline{\underline{-58\ \text{eV}}}$$

Eks 3: ΔV i uniformt $\vec{E}$ – felt



$$V_a - V_b = -\int_b^a \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{E}\cdot ds = \underline{\underline{E\cdot d}}$$

$$V_c - V_b = -\int_b^c \vec{E}\cdot d\vec{s} = \underline{\underline{0}} \quad (\vec{E}\perp d\vec{s})$$

Anta metallplater, $A = 10\ \text{cm}^2$, $d = 2{,}0\ \text{mm}$, $Q = 2{,}0\ \mu C$.

Da har vi $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/A\varepsilon_0$ og en potensialforskjell mellom platene

$$\Delta V = V_a - V_b = E\cdot d = \frac{Q\cdot d}{A\cdot\varepsilon_0} = \frac{2.0\cdot 10^{-6}\ C\cdot 2{,}0\cdot 10^{-3}\ m}{10\cdot 10^{-4}\ m^2\cdot\varepsilon_0}$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0} = 4\pi\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 4\pi\cdot 9\cdot 10^9\ \frac{Vm}{C}$$

$$\Rightarrow \Delta V = 4.0\cdot 10^{-6-3+3}\cdot 4\pi\cdot 9\cdot 10^9\ V = 144\pi\cdot 10^3\ V$$

$$\approx \underline{\underline{450\ kV}}$$

Beregning av $\vec{E}$ fra V [YF 23.5 ; LHL 19.9]

Generelt, for skalar funksjon $f(\vec{r})$:

$$\vec{r} \xrightarrow{d\vec{s}} \vec{r}+d\vec{s}$$

$$f(\vec{r}) \qquad\qquad f(\vec{r})+df$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \nabla f \cdot d\vec{s}$$

Her er

$d\vec{s} = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz$ = veielement

$\nabla f = \hat{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z}$ = gradienten til f

Fra s.71 :

$dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s}$ = potensialforskjellen mellom $\vec{r}$ og $\vec{r}+d\vec{s}$

Samtidig må vi ha: $dV = \nabla V \cdot d\vec{s}$

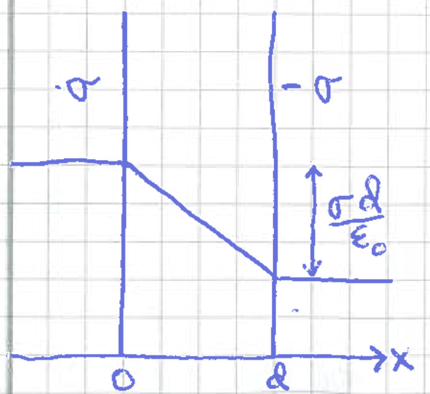
Dermed:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Dessuten:

$$\vec{F} = q_0\vec{E} = -q_0\nabla V = -\nabla U \qquad \text{(som s.18)}$$

Eks:



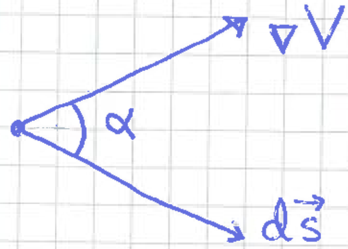
To store metallplater i $x=0$ og $x=d$, ladn. hhv σ og $-\sigma$ pr flateenhet.

Fant at $E=\sigma/\varepsilon_0$ mellom platene

$\Rightarrow$ Må ha potensial

$$V(x)=\begin{cases} V_0 & (x<0) \\ V_0 - x\sigma/\varepsilon_0 & (0<x<d) \\ V_0 - \sigma d/\varepsilon_0 & (x \geq d) \end{cases}$$

Betydning av ∇V:



$$dV = \nabla V \cdot d\vec{s}$$
$$= |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos\alpha$$

$\Rightarrow$ maksimal potensialendring dV når forflytningen $d\vec{s}$ er i samme retning som ∇V ($\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$)

$\Rightarrow$ ∇V er en vektor i <u>retning</u> max økende V, og med <u>absoluttverdi</u> lik endringen i V pr lengdeenhet (og lik den elektriske feltstyrken $|\vec{E}|$)

<u>Ekvipotensialflater</u> [YF 23.4; LHL 19.11]

= flater i rommet (evt. kurver) med konstant V

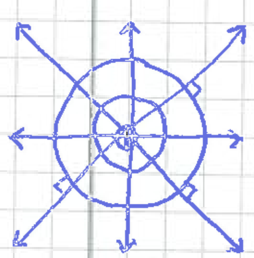
$\Rightarrow$ $dV = 0$ når $d\vec{s}$ er på en ekvipotensialflate

$\Rightarrow$ $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ ——— " ———

$\Rightarrow$ $\vec{E} \perp d\vec{s}$ ——— " ———

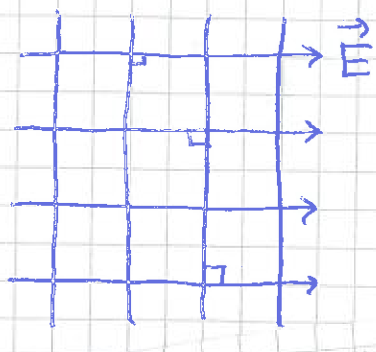
$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} \perp \text{ekvipotensialflatene}}$

Eks 1: Punktladning



Radielt $\vec{E}$ $\Rightarrow$ <u>Kuleskall</u> som ekvipot. flater

Eks 2: Uniformt $\vec{E}$-felt



Ekvipot. flatene er <u>plan</u> ($\perp \vec{E}$)

Materialers elektriske egenskaper

Ledere/Metaller: YF 22.5 ; LHL 19.8
Dielektrika/Isolatorer: YF 24.4, 24.5 ; LHL 20.5

Ledere

Har mobile ladninger (metall: frie elektroner) som kan bevege seg i lederen huis de utsettes for krefter.

- $\vec{E} = 0$ inni et metall (i elektrostatisk likevekt)

[Hvis $\vec{E} \neq 0$, virker kraft $\vec{F} = q\vec{E} \neq 0$ på fri ladning q, og da har vi ikke likevekt]

- All netto ladning ligger på overflaten av et metall

[Skyldes at $F(r) \sim r^{-2}$]

- På en metalloverflate står $\vec{E} \perp$ overflaten, og $|\vec{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

[Hvis $E_{\parallel} \neq 0$, virker kraft $F_{\parallel} = qE_{\parallel} \neq 0$, dvs ikke likevekt.
σ = overflateladning pr flateenhet]

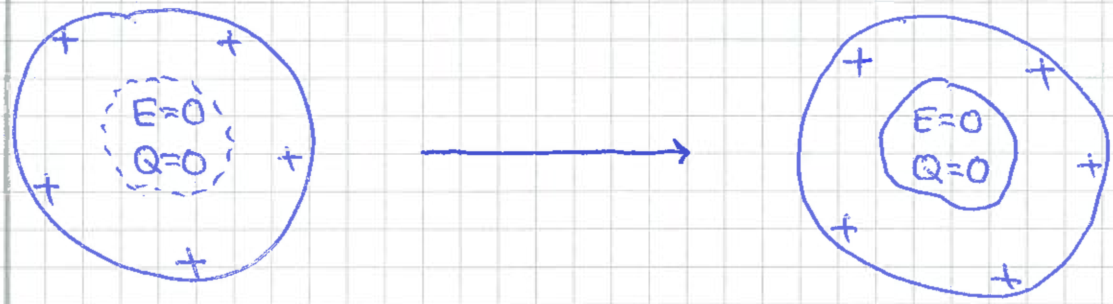
- Et metallstykke i likevekt er et ekvipotensial

[Med $d\vec{s}$ i metallstykket er $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$; inni er $\vec{E} = 0$ og på overflaten er $\vec{E} \perp d\vec{s}$]

- Metallstykke med hulrom har $E=0$ inni hulrommet og all netto ladning på ytre overflate

Bevis:

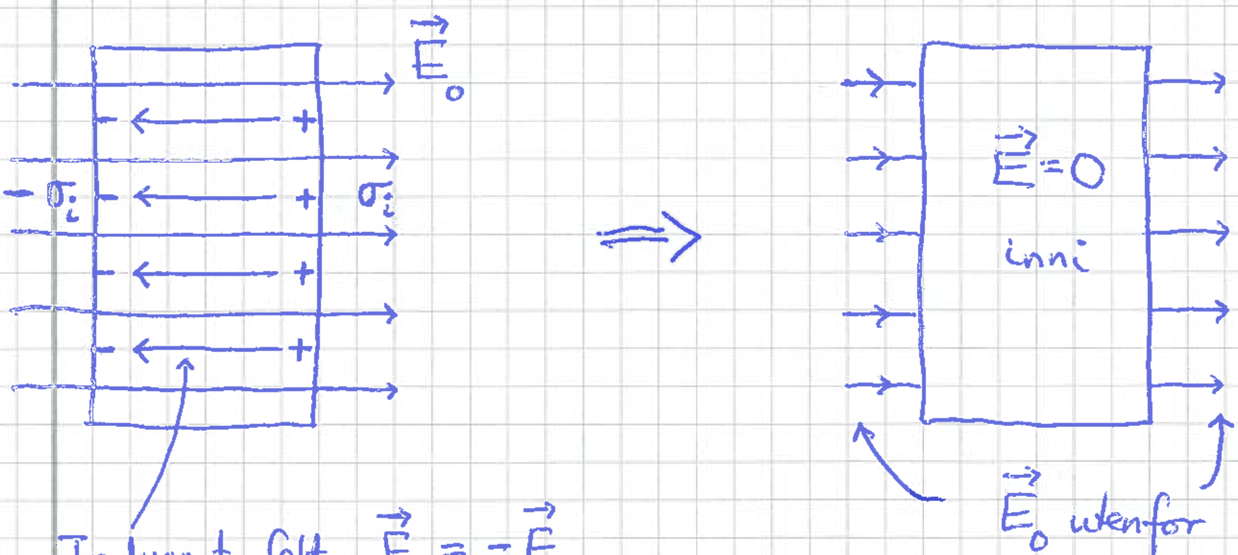
Tenk deg at du fjerner en elektrisk nøytral bit inne i metallstykket, og dermed lager et hulrom:



Intet skjer (fra et elektrostatisk synspunkt)

$\Rightarrow$ fortsatt $E=0$ og $Q=0$ der hulrommet er!

Metall i et ytre elektrisk felt $\vec{E}_0$



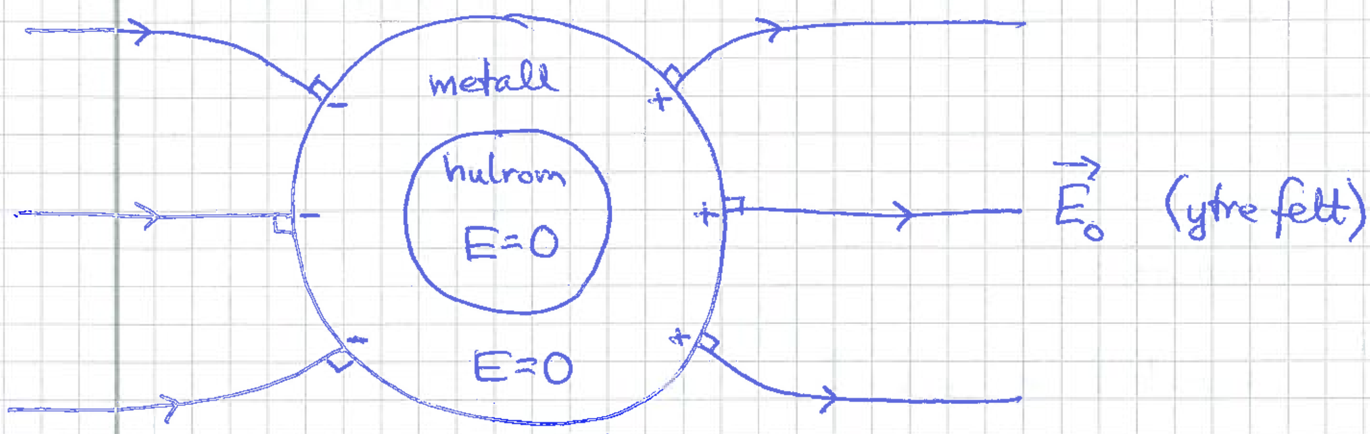
Indusert felt $\vec{E}_i = -\vec{E}_0$

inni metallet pga

indusert overflateladning

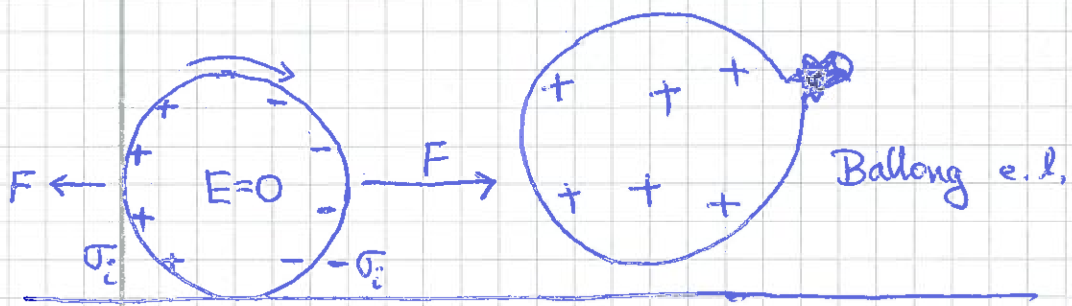
$\pm \sigma_i$

Faradaybur (= leder med hulrom):



Anvendelse: Skjerming mot ytre felt.

Eks/Demo: Ølboks i ytre felt fra ladet objekt



$\Rightarrow$ Netto tiltrekning pga kortere avstand til negativ indusert ladning $-\sigma_i$

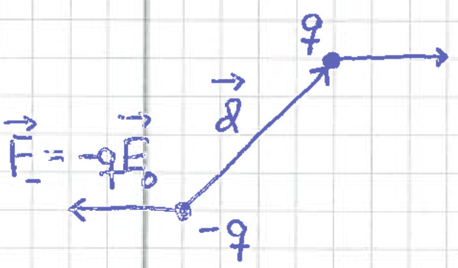
Isolatorer

Ikke frie ladninger, men <u>bundet</u> ladning som <u>polariseres</u> å ytre felt $\vec{E}_0$:

$\vec{E}_0 = 0$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\vec{E}_0 \neq 0$

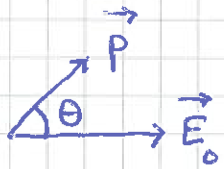
$\sum_i \vec{p}_i \approx 0$ $\qquad\qquad\qquad$ $\Rightarrow \sum_i \vec{p}_i \neq 0$

Molekylære dipoler rettes inn langs det ytre feltet $\vec{E}_0$:



$\vec{F}_+ = q\vec{E}_0$

$\vec{p} = q\vec{d}$

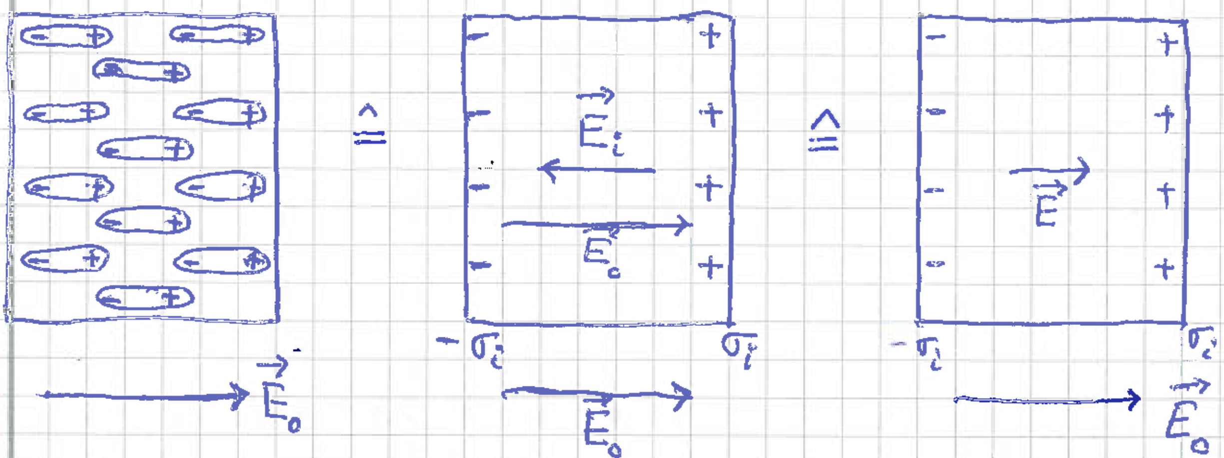


Dreiemoment på dipolen:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \text{..... øving 9, oppg. 3 .....} = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

$$|\vec{\tau}| = p \cdot E_0 \cdot \sin\theta$$

Netto makroskopisk effekt av ytre $\vec{E}_0$:



- null nettoladning inni; indusert ladning pr flateenhet, $\pm\sigma_i$, på overflaten
- indusert felt $\vec{E}_i$ inni $\Rightarrow$ <u>svekket</u> totalt felt inni:

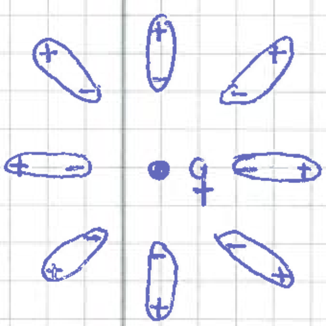
$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i \quad ; \quad |\vec{E}| = |\vec{E}_0| - |\vec{E}_i|$$

- lineær respons: E_i prop. med E_0
- isolatorens <u>relative permittivitet</u> ε_r definert ved

$$\boxed{E = \frac{1}{\varepsilon_r} E_0} \qquad \text{Enhet: } [\varepsilon_r] = 1$$

Stoff:	Vakuum	Tørr luft	Plast	Rent vann	Perfekt metall
ε_r:	1	1.00054	2-6	80	∞

- en isolators permittivitet er $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$;
ser på felt fra ladning q omgitt av dielektrikum med relativ permittivitet ε_r:



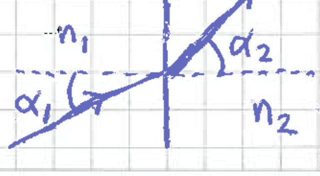
$$E(r) = \frac{1}{\varepsilon_r} E_{vac}(r) = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\,\varepsilon\, r^2}$$

med $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$

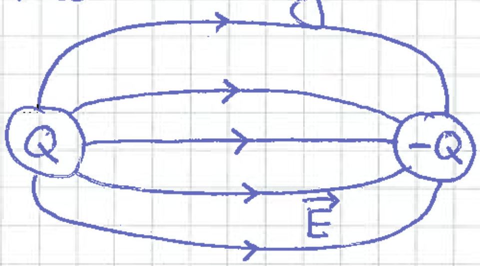
Polarisering av mediet svekker feltet med faktoren $\frac{1}{\varepsilon_r}$

- lysfarten: $c \approx 3 \cdot 10^8\ m/s$ i vakuum ;
$v = c/\sqrt{\varepsilon_r} < c$ i et dielektrikum
- brytningsindeksen til et dielektrikum: $n = \sqrt{\varepsilon_r}$
(Snells lov: $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$)



Kondensator og kapasitans [YF 24; LHL 20]
(capacitor) (capacitance)

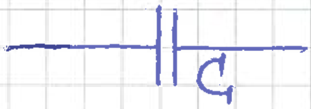
To ledere, med ladning $\pm Q$:



$$V = V_+ - V_- = -\int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$ er prop. med Q,

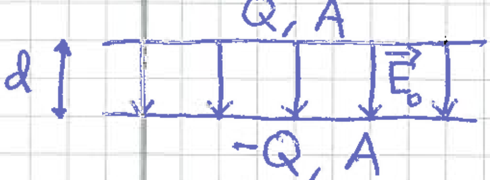
fordi $\vec{E}$ er prop. med Q, pga Coulombs lov.

Kondensatorens kapasitans: $\boxed{C \overset{\text{def}}{=} Q/V}$

- $[C] = [Q/V] = \frac{C}{V} = F$ (farad)
- kretssymbol: 

- lagrer ladning og energi
- C avhenger av utforming/geometri og medium mellom lederne
- beregning av C: anta ladning $\pm Q$ og regn ut V; da er $C = Q/V$

Eks 1: Platekondensator (fylt med luft ≈ vakuum)

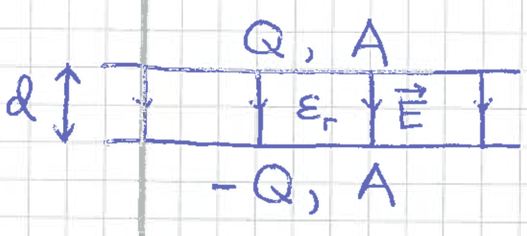


$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{Q/A}{\varepsilon_0} \quad (d \ll \sqrt{A})$$

$$\Rightarrow V_0 = E_0 d = \frac{Qd}{\varepsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow C_0 = Q/V_0 = \underbrace{\varepsilon_0}_{\text{medium}} \cdot \underbrace{\frac{A}{d}}_{\text{geometri}}$$

Eks 2: Platekondensator fylt med dielektrikum



$$E = \frac{1}{\varepsilon_r} E_0 = \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{Q/A}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow V = E \cdot d = \frac{Q \cdot d}{\varepsilon_r \varepsilon_0 A}$$

$$\Rightarrow C = Q/V = \underbrace{\varepsilon_r \varepsilon_0}_{\text{medium}} \cdot \underbrace{\frac{A}{d}}_{\text{geometri}}$$

Dvs, kapasitansen <u>økt</u> med faktor $\varepsilon_r > 1$

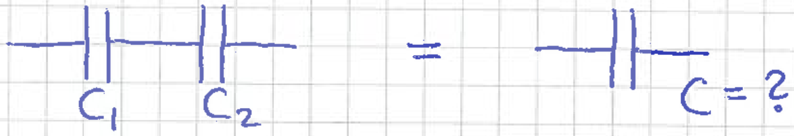
Eks 3: Anta $\varepsilon_r = 5$ og $d = 0.1$ mm. Hvor stor må A være for å gi $C = 1\,F$?

Svar: $A = C \cdot d / \varepsilon_r \varepsilon_0 = 1 \cdot 10^{-4} / 5 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}\ m^2 \approx \underline{\underline{2.3 \cdot 10^6\ m^2}}$

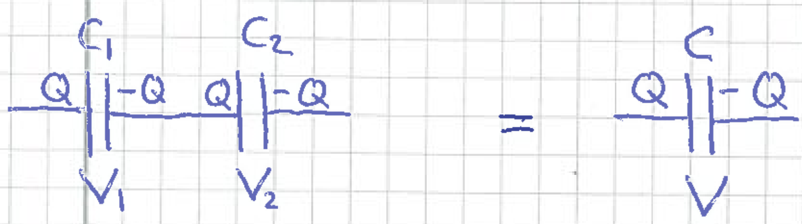
Merk: $[C] = F \Rightarrow [\varepsilon_0] = [\varepsilon_r \varepsilon_0] = [\varepsilon] = [C \cdot \frac{d}{A}] = \underline{F/m}$

Kobling av flere kapasitanser [YF 24.2 ; LHL 20.2]

Seriekobling:



Har <u>lik ladning</u> $\pm Q$ på C_1 og C_2:

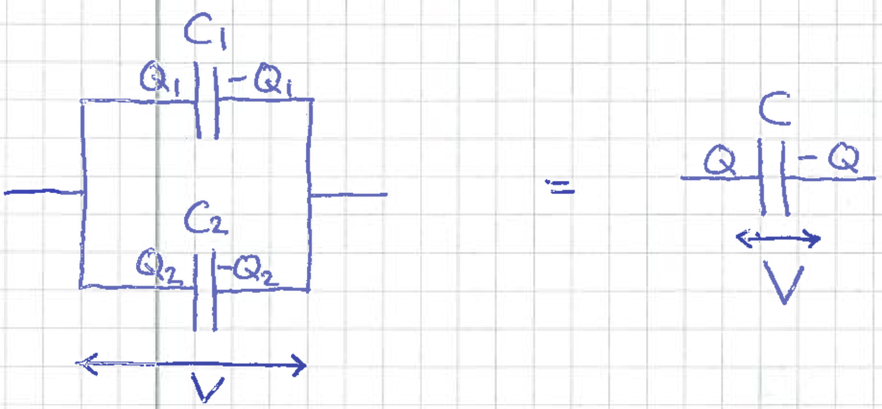


$$\Rightarrow V_1 + V_2 = V \Rightarrow \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Med N stk i serie: $\boxed{C^{-1} = \sum_{j=1}^{N} C_j^{-1}}$

Parallellkobling:

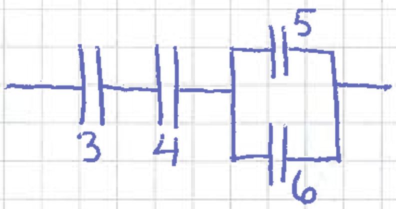
Har <u>likt potensialfall</u> (lik <u>spenning</u>) V over C_1 og C_2:



$$\Rightarrow \quad Q_1 + Q_2 = Q \quad \Rightarrow \quad C_1 V + C_2 V = CV \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = C_1 + C_2}$$

Med N stk i parallell: $\boxed{C = \sum_{j=1}^{N} C_j}$

Eks 1:



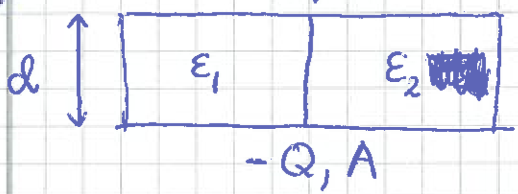
$C_j = 3, 4, 5, 6$ nF

Total C = ?

Løsn: $C_t = \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5+6} \right\}^{-1}$ nF $= \left\{ \frac{44 + 33 + 12}{3 \cdot 4 \cdot 11} \right\}^{-1}$ nF

$$= \underline{\underline{\frac{132}{89} \text{ nF}}}$$

Eks 2:



$C = ?$

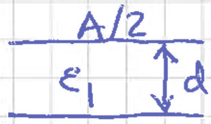
Løsn: Har konstant potensial på gitt leder, og dermed samme totale $\vec{E}$-felt i stoff 1 og 2. Ladningen $\pm Q$ fordeler seg slik at $E_1 = E_2$, dvs $\sigma_1/\varepsilon_1 = \sigma_2/\varepsilon_2$,
dvs $\sigma_1 = Q_1/(A/2) = \sigma_2 \cdot \varepsilon_1/\varepsilon_2 = [Q_2/(A/2)] \cdot \varepsilon_1/\varepsilon_2$,
som med $Q_1 + Q_2 = Q$ gir:

$$\sigma_1 \frac{A}{2} + \sigma_2 \frac{A}{2} = C \cdot V$$

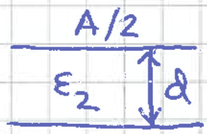
$$\Rightarrow \varepsilon_1 E_1 \frac{A}{2} + \varepsilon_2 E_2 \frac{A}{2} = CV \quad ; \quad E_1 = E_2 = \frac{V}{d}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C = \varepsilon_1 \frac{A/2}{d} + \varepsilon_2 \frac{A/2}{d}}}$$

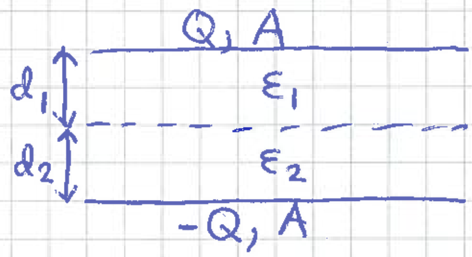
dvs: som parallellkobling av



og



Eks 3:



$C = ?$

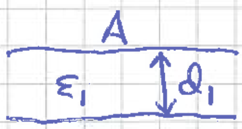
Løsn: Ladningen $\pm Q$ jevnt fordelt over hele A; $\sigma = Q/A$.
El. felt i stoff 1: $E_1 = \sigma/\varepsilon_1$; stoff 2: $E_2 = \sigma/\varepsilon_2$.

$$V = V_1 + V_2 = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

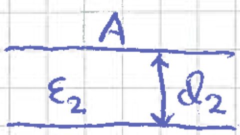
$$\Rightarrow \frac{Q}{C} = \frac{\sigma}{\varepsilon_1} d_1 + \frac{\sigma}{\varepsilon_2} d_2 = \frac{Q d_1}{\varepsilon_1 A} + \frac{Q d_2}{\varepsilon_2 A}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{1}{C} = \frac{d_1}{\varepsilon_1 A} + \frac{d_2}{\varepsilon_2 A}}}$$

dvs: som seriekobling av

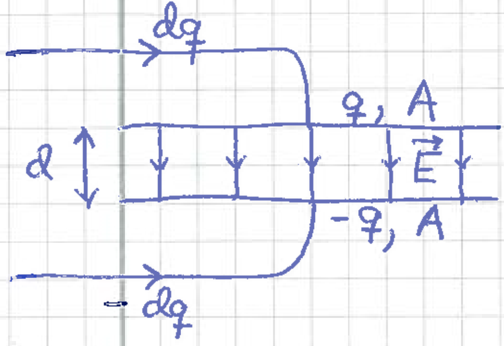


og



Energi i elektrisk felt [YF 24.3; LHL 20.4]

Opplading av en kondensator krever et arbeid og gir en økt potensiell energi U, som lagres i $\vec{E}$-feltet.



Økning av ladning fra $\pm q$ til $\pm(q+dq)$ gir økning i pot. energi

$$dU = v(q)\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

$\Rightarrow$ Opplading fra $q=0$ til $q=Q$ gir pot. energi

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{Q^2}{2C},$$ som med

$C = \frac{Q}{V}$ alternativt kan skrives som $U = \frac{QV}{2} = \underline{\frac{1}{2}CV^2}$

Med $C = \varepsilon_0 A/d$ og $V = E \cdot d$ får vi

$$U = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 \frac{A}{d}\,(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$$

Her er $A \cdot d$ = volumet mellom platene, der $E \neq 0$.

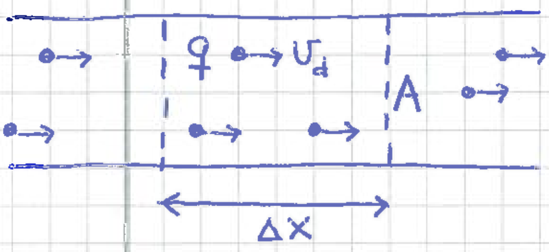
Konklusjon: Energien pr volumenhet (energitettheten) i det elektriske feltet er

$$\boxed{u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

som viser seg å gjelde generelt.

Elektrisk strøm [YF 25,26 ; LHL 21,22]

Strøm, strømtetthet [YF 25.1 ; LHL 21.1]



Leder; n frie ladninger q pr volumenhet, med midlere driftshastighet v_d langs lederen. [Null netto ladning!]

Strøm (strømstyrke) $\stackrel{\text{def}}{=}$ mengden ladning som passerer et tverrsnitt av lederen pr tidsenhet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{dQ}{dt}$$

Enhet: $[I] = C/s = A$ (ampere)

I figuren ovenfor: Alle frie ladninger ΔN i volumet $\Delta V = \Delta x \cdot A$ passerer tverrsnittet med areal A i løpet av tiden $\Delta t = \Delta x / v_d$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{q \cdot \Delta N}{\Delta x / v_d} = \frac{q \cdot n \cdot \Delta x \cdot A}{\Delta x / v_d} = n q v_d A$$

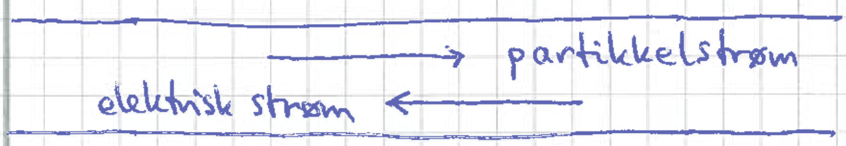
Strømtetthet $\stackrel{\text{def}}{=}$ strøm pr flateenhet

$$j = I/A \quad , \quad [j] = A/m^2$$

Her: $j = nqv_d$; mer presist $\boxed{\vec{j} = nq\vec{v}_d}$

Metall: Frie elektroner gir elektrisk strøm

$\Rightarrow$ $q = -e$; $\vec{j} = -ne\vec{v}_d$



Ohms lov [YF 25.2, 25.6 ; LHL 21.2, 21.4]

Uten kollisjoner ("friksjon") ville frie ladninger få konstant akselerasjon i et konstant elektrisk felt:

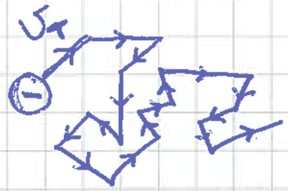
$$q\vec{E} \overset{N2}{=} m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E} \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{q}{m}\vec{E}\cdot t$$

Men frie elektroner kolliderer (ustanselig!) i metallet:

$\vec{E} \longleftarrow$

$\longrightarrow \vec{F} = -e\vec{E}$

$-e$
m_e



$\longrightarrow \vec{v}_d$

$\longleftarrow \vec{j} = -ne\vec{v}_d$

$\overleftrightarrow{d}$

d = midlere avstand mellom kollisjoner

$\tau = d/v_T$ = midlere tid —— 〃 ——

v_T = midlere elektronhastighet ved temperatur T

$$\vec{v}_d \approx \vec{a}\cdot\tau = -\frac{e}{m_e}\vec{E}\cdot\tau$$

[Paul Drude, ca 1900]

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{j} = \sigma\vec{E}}$ med $\sigma = ne^2\tau/m_e$ = materialets konduktivitet

OHMS LOV

(kalles også elektrisk ledningsevne)

Tallverdier (estimater):

Ekvipartisjonsprinsippet sier at ved (absolutt) temperatur T bidrar hvert kvadratiske ledd i energien med $\frac{1}{2}k_B T$. Her er $k_B \approx 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K ; Boltzmanns konstant.

[$R = k_B \cdot N_A \approx 8.314$ J/mol·K ; gasskonstanten.
$N_A \approx 6.022 \cdot 10^{23}$ (partikler pr mol) ; Avogadros konstant]

Dermed:

$$\langle K_e \rangle = \langle \tfrac{1}{2} m_e (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \rangle = \tfrac{1}{2} m_e v_T^2 = \tfrac{3}{2} k_B T$$

$$\Rightarrow \quad v_T = \sqrt{3k_B T / m_e} \sim 10^5 \text{ m/s} \quad \text{ved } T = 300\,K$$

ℓ = midlere fri veilengde $\sim$ avstand mellom atomene $\sim 10^{-9}$ m

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{\ell}{v_T} \sim 10^{-14}\text{ s} \quad \text{(midlere tid mellom kollisjoner)}$$

Kobber (Cu): $m_{Cu} \simeq 63$ g/mol ; massetetthet 8.96 g/cm^3

$\Rightarrow 8.5 \cdot 10^{28}$ Cu-atomer pr m^3

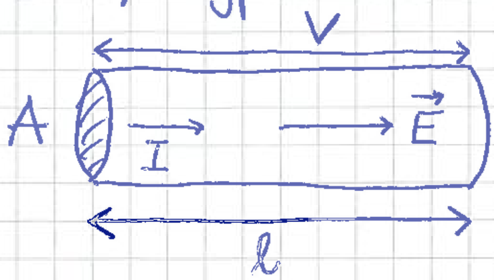
Anta ett fritt elektron pr Cu-atom, dvs $n = 8.5 \cdot 10^{28}$ m^{-3}

$$\Rightarrow \sigma_{Drude}^{Cu} = ne^2\tau/m_e \simeq 2.4 \cdot 10^7 \frac{A}{V \cdot m}$$

(mens $\sigma_{Exp}^{Cu} \approx 6 \cdot 10^7 \frac{A}{V\cdot m}$ ved 20°C)

$$v_d \simeq e\tau E/m_e \sim 10^{-6} \text{ m/s} \quad \text{hvis } E = 1 \text{ mV/m}$$

En <u>motstand</u> er en <u>komponent</u> med tverrsnitt A og lengde ℓ, typisk med liten ledningsevne σ:



$$V = E \cdot \ell$$

$$j = \frac{I}{A} = \sigma E = \sigma \frac{V}{\ell}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{\sigma A}{\ell} V = G V$$

$$V = \frac{\ell}{\sigma A} I = R I$$

$G = \frac{\sigma A}{\ell}$ = lederens <u>konduktans</u>

$R = G^{-1} = \frac{\ell}{\sigma A} = \rho \ell / A$ = lederens <u>resistans</u>/<u>motstand</u>

$\rho = \sigma^{-1}$ = materialets <u>resistivitet</u>

Enheter:

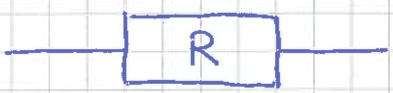
$[R] = \frac{V}{A} = \Omega$ (ohm) ; $[G] = \Omega^{-1}$ (= S, siemens)

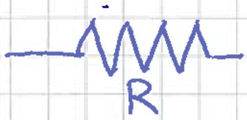
$[\rho] = \Omega m$; $[\sigma] = \Omega^{-1} m^{-1}$ (= S/m)

Merk: σ, ρ er <u>materialegenskaper</u>

G, R er også avhengige av lederens dimensjoner

Kretssymbol:



(evt. )

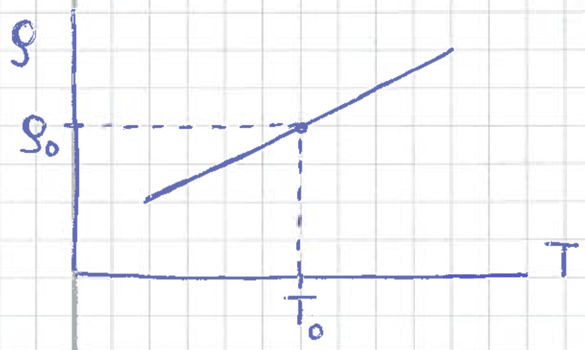
Resistivitet og temperatur [YF 25.2; LHL 21.2, 21.5]

Drudemodellen: $\rho = \frac{m_e}{ne^2\tau}$, dvs $\rho \sim \frac{1}{n \cdot \tau}$

Metaller:

- stor n, påvirkes lite av økt T
- økt T gir hyppigere kollisjoner, dvs redusert τ, dvs større resistivitet ρ

Empirisk:



$$\rho(T) = \rho_0 \left[1 + \alpha (T - T_0) \right]$$

$$\alpha_{Al} \approx \alpha_{Cu} \approx \alpha_{Ag} \approx 0.004 \text{ K}^{-1}$$

$[T] = \text{K}$ (kelvin)

$(\Rightarrow \tau \sim 1/T)$

Halvledere: (Si, Ge, GaAs, GaN [blå LED; NP 2014], organiske, ...)

- isolator ved $T = 0$ $(n \approx 0)$
- økt T gir (sterk!) økning i n, dvs redusert ρ

$$\tau \sim \frac{1}{T}, \quad n \sim e^{-T_g/T}$$

$$\Rightarrow \rho(T) \sim T\, e^{T_g/T}$$

Energigap (båndgap): $E_g = 2k_B T_g$ = påkrevd energi for å løsrive elektroner fra "moderatomet" = energi til utsendt foton når fritt elektron "fanges inn" igjen av et atom

Eks:

Halvleder	Si	GaAs	GaN	AlGaAs	InGaN
E_g (eV)	1.12	1.43	3.44	1.4 − 2.2	2 − 3.4
λ (nm)	(1100)	870	360	560 − 870	360 − 620

Foton: $E = hf = hc/\lambda$

$h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Js = Plancks konstant

$c = 3 \cdot 10^8$ m/s = lyshastigheten i vakuum (og luft)

Elektromagnetisk spektrum:

$\lambda > 700$ nm : IR (infrarødt)

700 nm $> \lambda >$ 400 nm : synlig lys (R-O-G-G-B-I-F)

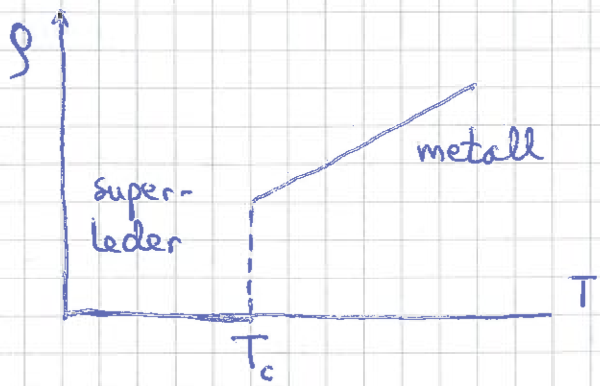
400 nm $> \lambda$: UV (ultrafiolett)

⇒ LED med rødt / gult lys med AlGaAs (f.eks.)

— " — blått / fiolett — " — InGaN (f.eks.)

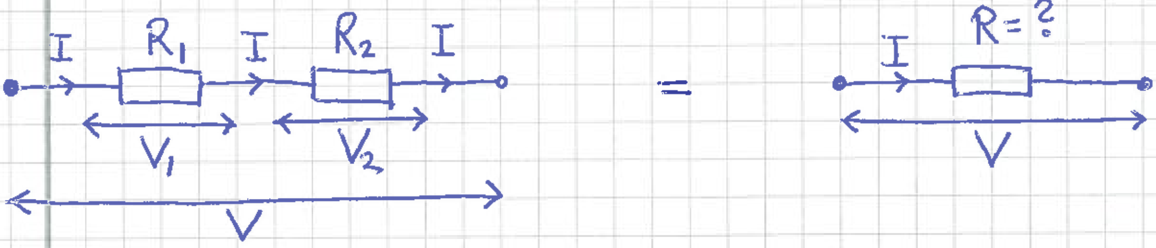
Superledere:

- normalt metall for $T > T_c$
- $\rho = 0$ for $T < T_c$ = materialets kritiske temperatur
- 1911 : Hg , $T_c = 4.12$ K
- 2015 : H_3S (?), $T_c = 203$ K (høyt trykk, $p = 150$ GPa)



Kobling av flere motstander [YF 26.1; LHL 21.3]

Seriekobling:



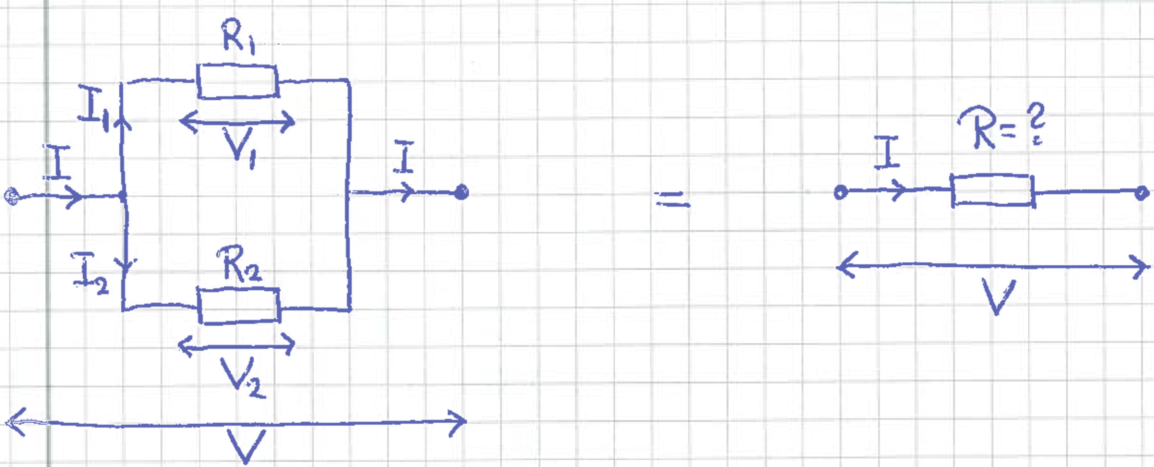
<u>Lik strøm</u> I gjennom de to motstandene

$$\Rightarrow \quad V = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I = RI$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = R_1 + R_2}$$

Med N stk. i serie: $\boxed{R = \sum_{j=1}^{N} R_j}$

Parallellkobling:



<u>Lik spenning</u> over de to motstandene; $V_1 = V_2 = V$

$$\Rightarrow \quad I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = \frac{V}{R}$$

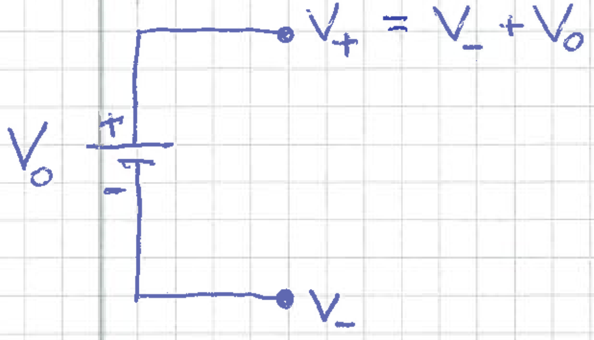
$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Med N stk i parallell: $\boxed{R^{-1} = \sum_{j=1}^{N} R_j^{-1}}$

Likestrømkretser [YF 26 (25) ; LHL 22]

DC = direct current = likestrøm

Likespenningskilde:



Sørger for konstant <u>spenning</u> (= potensialforskjell)

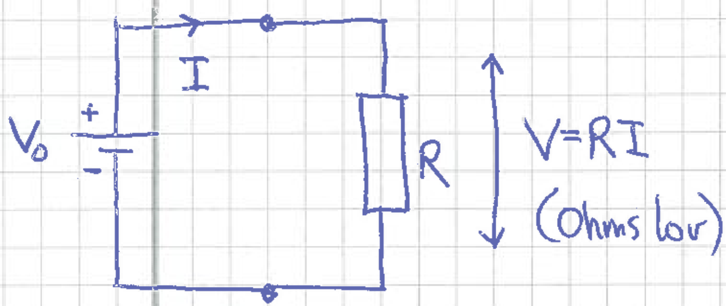
$$V_0 = V_+ - V_-$$

mellom <u>polene</u>

Eks: Kjemisk batteri, Solcelle, ...

Kobler til (f.eks.) motstand R

$\Rightarrow$ får <u>lukket krets</u>, og <u>strøm</u>:



$I = ?$

Kirchhoffs regler [YF 26.2 ; LHL 22.3]

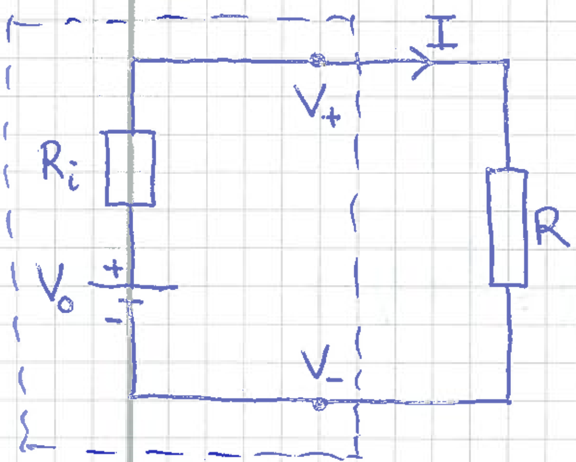
Pga ladningsbevarelse: $\boxed{\sum_j I_j = 0 \text{ i alle knutepunkt}}$ ("K1")

Pga energibevarelse: $\boxed{\sum \text{potensialendringer} = 0 \text{ for alle sløyfer}}$ ("K2")

Dermed (pga K2): $V_0 - RI = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{I = V_0/R}}$$

<u>Reell</u> spenningskilde har en viss <u>indre</u> motstand R_i:



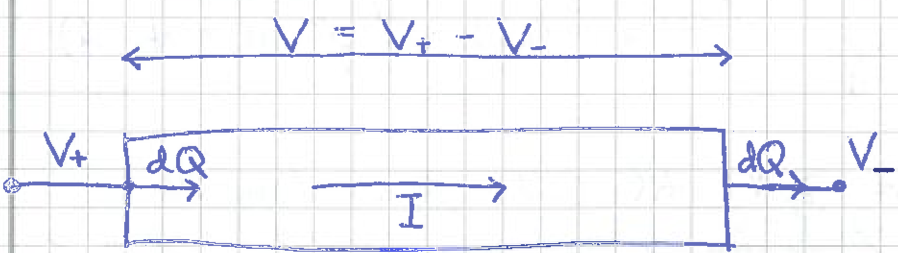
$$K2 \Rightarrow V_0 - R_i I - RI = 0$$

$$\Rightarrow \underline{I = \frac{V_0}{R_i + R}}$$

og spenningen "levert" til den "ytre kretsen" (R) er

$$V_+ - V_- = V_0 - R_i I < V_0 \quad \text{når } I > 0$$

<u>Elektrisk effekt</u> [YF 25.5 ; LHL 22.2]



$$dU_{inn} = V_+ \cdot dQ \qquad dU_{ut} = V_- \cdot dQ$$

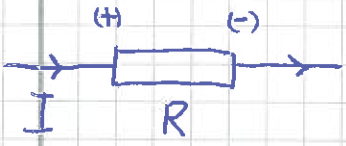
Effekttap (dvs el.energi "tapes" som varmeenergi):

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{dU_{inn} - dU_{ut}}{dt} = \frac{V_+ dQ - V_- dQ}{dt} = V \cdot \frac{dQ}{dt} = \underline{\underline{V \cdot I}}$$

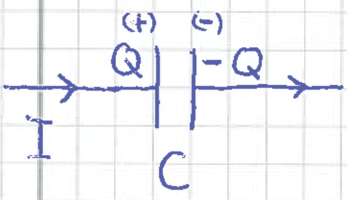
Hvis det er en <u>ohmsk motstand</u>, er $V = R \cdot I$, slik at

$$P = V \cdot I = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

RC-krets [YF 26.4; LHL 22.4]

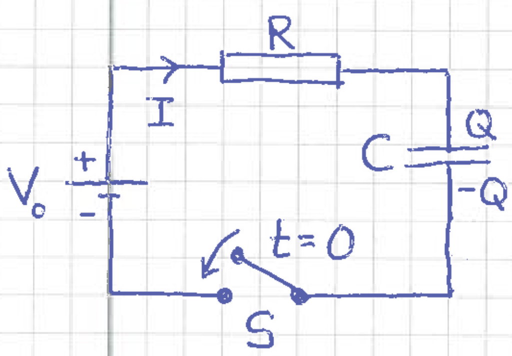


$$V = RI$$



$$V = \frac{Q}{C} \quad ; \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

Opplading av kondensator i RC-krets:



- $Q(0) = 0$
- Lukker kretsen ved $t = 0$ (S = "switch"; bryter)
- Bestem $Q(t)$ og $I(t)$

K2: $$V_0 - RI - \frac{Q}{C} = 0$$

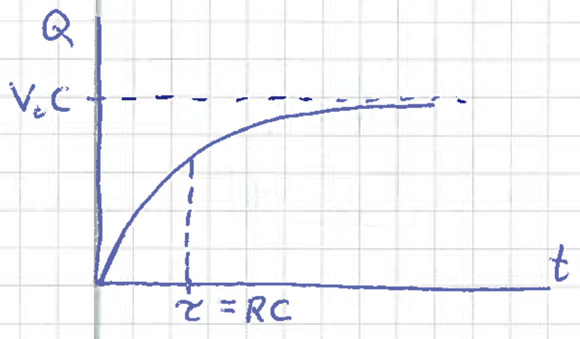
$$\Rightarrow \quad -R\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{C} - V_0 = \frac{Q - V_0 C}{C}$$

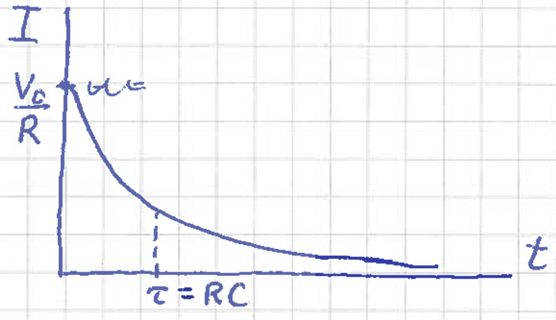
$$\Rightarrow \quad \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = -\int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{Q - V_0 C}{-V_0 C}\right) = -\frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{Q(t) = V_0 C\left(1 - e^{-t/RC}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{V_0}{R}\, e^{-t/RC}}$$

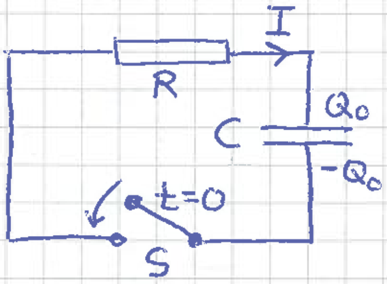




RC-kretsens <u>tidskonstant</u>: $\tau = RC$ = karakteristisk tid for opplading (og utlading) av kondensator i en RC-krets

$$Q(\tau) = V_0C(1 - 1/e) \approx 0.63\, V_0C, \qquad Q(3\tau) = V_0C(1 - 1/e^3) \approx 0.95\, V_0C$$

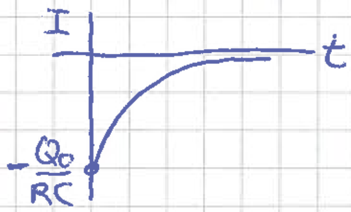
Utlading:



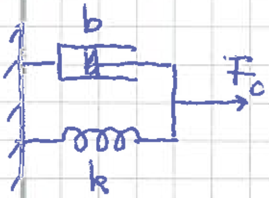
- $Q(0) = Q_0$
- Bestem $Q(t)$ og $I(t)$

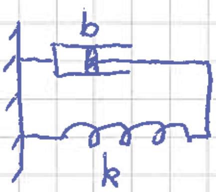
$$K2: \quad -\frac{Q}{C} - R\frac{dQ}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{Q_0}^{Q} \frac{dQ}{Q} = -\int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0\, e^{-t/RC}, \qquad I(t) = -\frac{Q_0}{RC}\, e^{-t/RC}$$



Mekanisk analogi:





F_0 skrus av
$x(0) = x_0$

$$F_0 - b\dot{x} - kx = m\ddot{x} \xrightarrow{m \to 0} 0$$

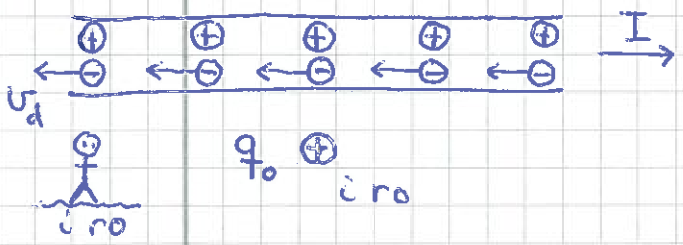
$$\Rightarrow x(t) = \frac{F_0}{k}\left(1 - e^{-kt/b}\right)$$

$$-kx - b\dot{x} = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0\, e^{-kt/b}$$

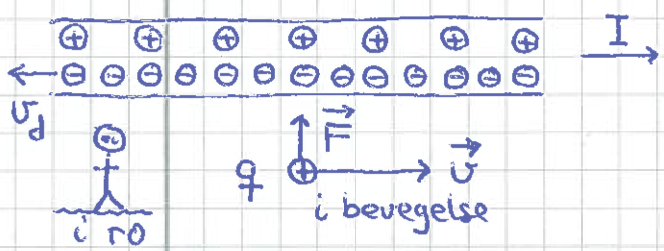
Magnetostatikk [YF 27, 28 ; LHL 23]

Coulombs lov og Einsteins relativitetsteori nødvendiggjør magnetfelt og magnetisk kraft:



q_0 i ro ser nøytral strømførende leder

$\Rightarrow$ $F = 0$; og vi er enige



Ladning q i bevegelse ser negativt ladet strømførende leder, fordi elektronene ⊖ har større relativ hastighet ($u_- \approx v + v_d$) enn atomkjernene ⊕ ($u_+ = v$).

Dermed er det størst lengdereduksjon for avstanden mellom ⊖ :

$$\Delta x_- = \Delta x_0 \sqrt{1 - u_-^2/c^2} \quad < \quad \Delta x_+ = \Delta x_0 \sqrt{1 - u_+^2/c^2}$$

Konklusjon: q påvirkes av en elektrisk kraft $\vec{F}$

Motsatt rettet $\vec{v}$ $\Rightarrow$ $u_- \approx v - v_d < u_+ = v$

$\Rightarrow$ $\Delta x_- > \Delta x_+$ $\Rightarrow$ positivt ladet leder

$\Rightarrow$ motsatt rettet $\vec{F}$

Vi er i ro relativt den strømførende lederen og måler ingen elektrisk kraft på q. Vi måler en magnetisk kraft $\vec{F}_m$. Denne uttrykkes via et magnetfelt $\vec{B}$. Magnetfeltet $\vec{B}$ skapes av strømmen I.

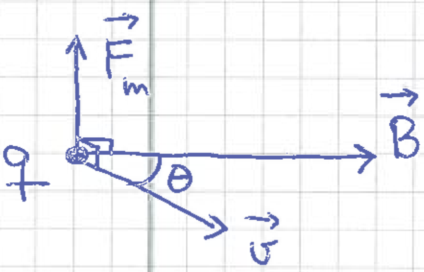
Magnetisk kraft [YF 27.2 ; LHL 23.4]

Ladning(er) omgir seg med elektrisk felt $\vec{E}$

$\Rightarrow$ elektrisk kraft $\vec{F}_e = q\vec{E}$ på ladning q

Strøm omgir seg med magnetfelt $\vec{B}$

$\Rightarrow$ magnetisk kraft $\vec{F}_m = q\,\vec{v} \times \vec{B}$ på ladning q i bevegelse med hastighet $\vec{v}$



$$F_m = qvB\sin\theta$$

$$\vec{F}_m \perp \vec{B} \quad \text{og} \quad \vec{F}_m \perp \vec{v}$$

Enhet for magnetfelt:

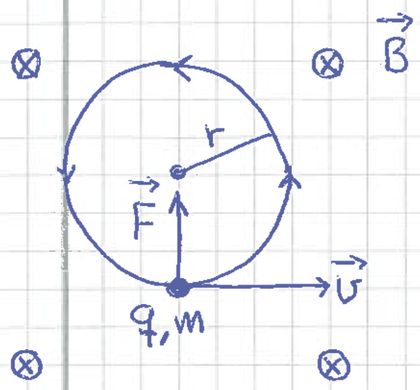
$$[B] = \frac{N}{C \cdot \frac{m}{s}} = \frac{N}{A \cdot m} = T \quad \text{(tesla)}$$

Med både $\vec{E}$ og $\vec{B}$ til stede:

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}}$$

Lorentzkraften

Ladning i uniformt magnetfelt [YF 27.4; LHL 23.1+4]



⊗ inn i planet

⊙ ut av — " —

Anta $\vec{v} \perp \vec{B}$

$\Rightarrow \quad F = qvB$

$\vec{F} \perp \vec{v} \quad \Rightarrow$ tilført effekt $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$

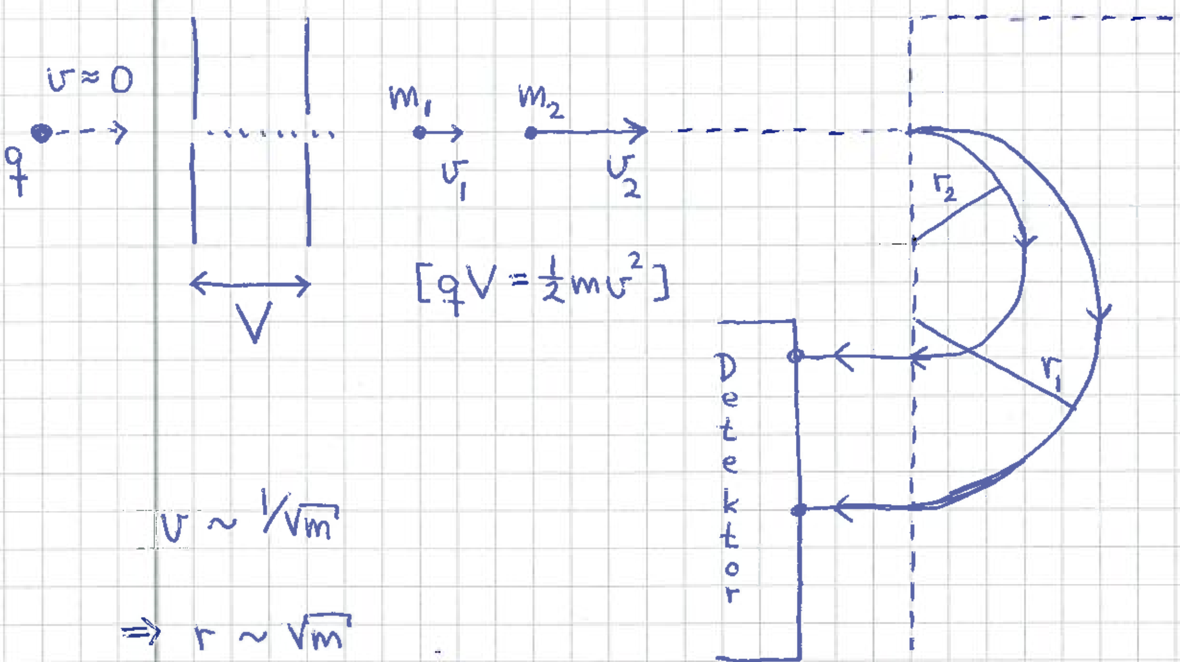
$\Rightarrow$ kinetisk energi $K = \frac{1}{2} m v^2 =$ konstant

$\Rightarrow$ uniform sirkelbevegelse

N2: $qvB = mv^2/r \quad \Rightarrow \quad r = mv/qB$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{v}{r} = qB/m}$$ Syklotronfrekvensen

Eks: Massespektrometer (Øving 12)

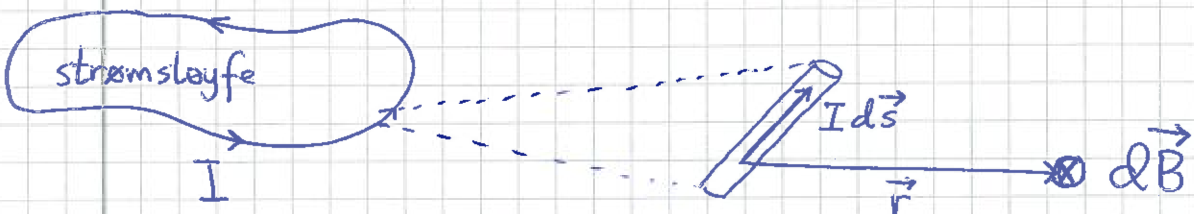


$[qV = \frac{1}{2} m v^2]$

$v \sim 1/\sqrt{m}$

$\Rightarrow \quad r \sim \sqrt{m}$

Biot-Savarts lov [YF 28.2 ; LHL 23.5]



Magnetfelt $d\vec{B}$ fra lederbit med lengde og retning gitt ved $d\vec{s}$, og strøm I, i avstand gitt ved $\vec{r}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\,d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

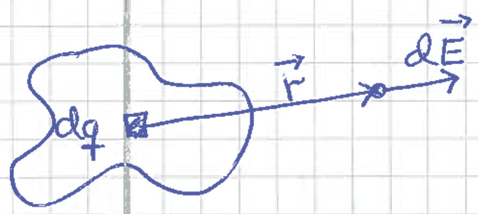
$\Rightarrow$ Feltet fra hele den lukkede strømsløyfa : (I=konst.)

$$\boxed{\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}}$$

Biot-Savarts lov (1820)

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T\cdot m}{A}$ = vakuumpermeabiliteten (eksakt)

Jf. Coulombs lov :



$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{dq\;\hat{r}}{r^2}$$

ε_0 = vakuumpermittiviteten

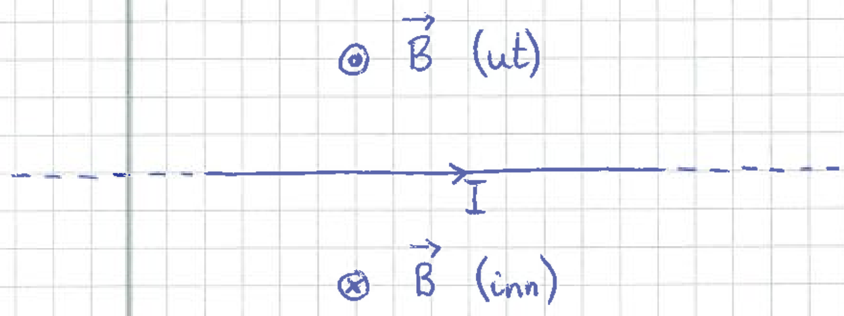
$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$ = hastigheten til elektromagnetiske bølger i vakuum

$= 299792458$ m/s (eksakt)

$\Rightarrow \varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$ (eksakt)

Tre viktige eksempler, med kvalitativ argumentasjon, uten matematiske detaljer.

Eks 1: $\vec{B}$ fra lang, rett strømførende leder [YF 28.3; LHL 23.5]



$d\vec{B} \sim I\, d\vec{s} \times \vec{r}$

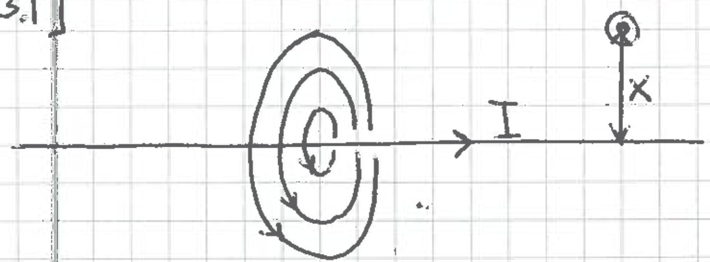
$\Downarrow$

$\vec{B}$ er tangent til sirkel med sentrum på lederen

$\Rightarrow$ Feltlinjer for $\vec{B}$ er sirkler med sentrum på lederen.

↳ [Linjer $\parallel \vec{B}$; Linjetetthet prop. med $\vec{B}$]

[YF 27.3
LHL 23.1]



Biot-Savart gir

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

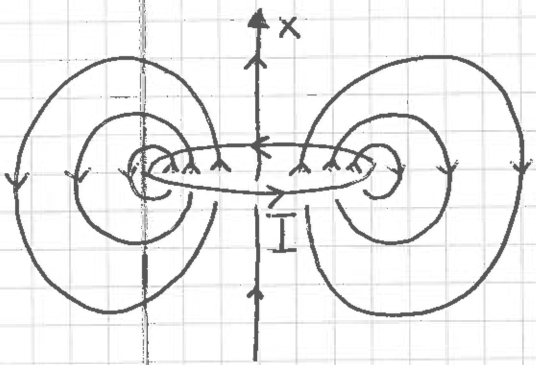
[Detaljert utregning av $B(x)$ på hjemmesiden, s 127B]

- Høyrehåndsregel:

  Tommel langs I, resten av fingrene krummer i retningen til $\vec{B}$.

- Har alltid lukkede feltlinjer for $\vec{B}$.

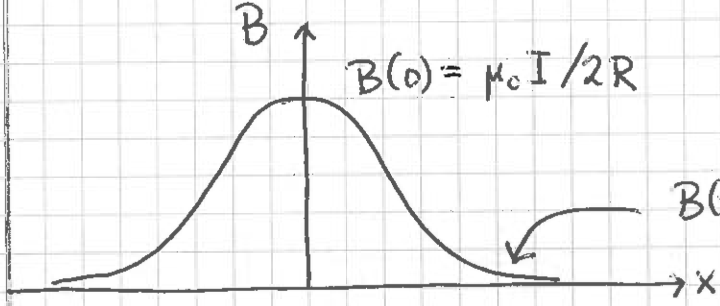
Eks 2: $\vec{B}$ fra sirkulær strømsløyfe [YF 28.5; LHL 23.6]



- strømsløyfe, strøm I, radius R, i yz-planet $(x=0)$
- nær lederen: $\vec{B}$ omtrent som for lang rett leder
- på x-aksen: $\vec{B} \parallel \hat{x}$ pga symmetri

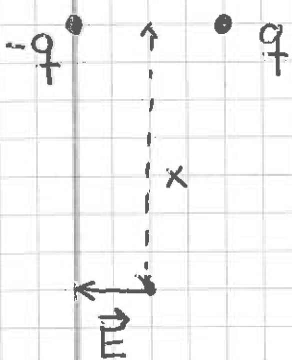
Biot-Savart gir [s 128B]

$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2+R^2)^{3/2}}$$ på x-aksen (sløyfas akse)



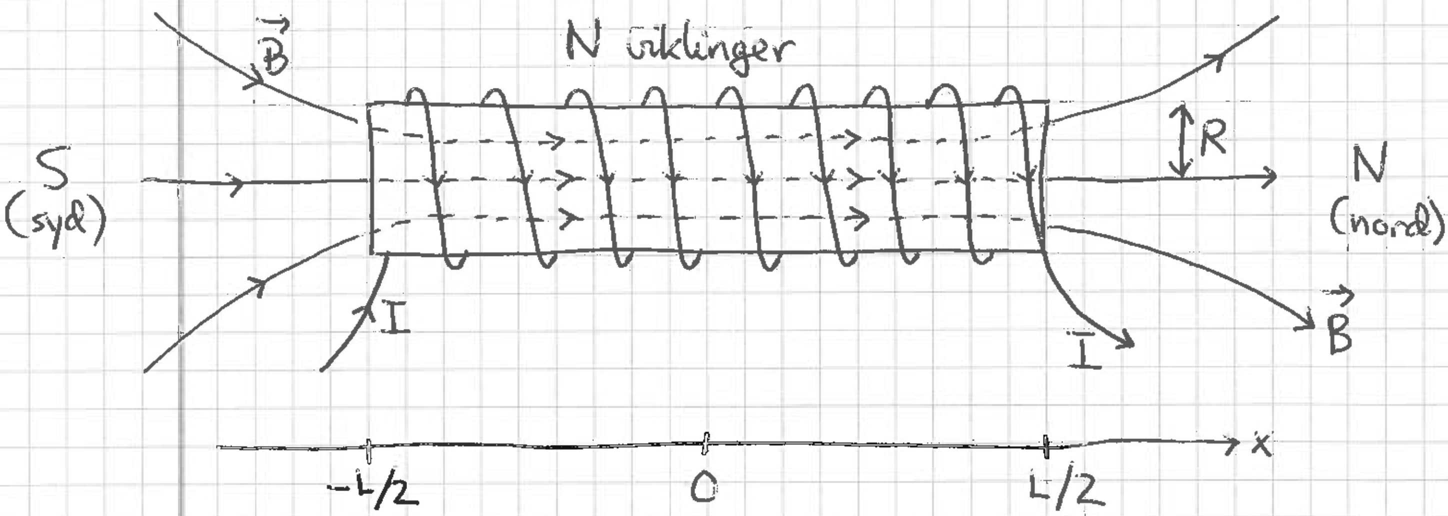
$$B(x) \overset{x \gg R}{\approx} \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} \sim \frac{1}{x^3}$$

Fra før (s. 65):



- $E(x) \sim \frac{1}{x^3}$ langt unna <u>elektrisk dipol</u>.
- Den sirkulære strømsløyfa er en <u>magnetisk dipol</u>.

Eks 3: $\vec{B}$ fra strømførende spole [YF 28.7 ; LHL 23.6]



- $n = N/L$ = viklinger pr lengdeenhet (= viklingstetthet)
- tettliggende viklinger, slik at $\vec{B}$ blir omtrent som for N sirkulære strømsløyfer jevnt fordelt på lengden L

Biot-Savart gir [s 129 B, C, D] for feltstyrken $B(x)$ på spolens akse (radius R):

$$B(x) = \frac{1}{2}\mu_0 n I \left\{ \frac{\frac{L}{2} - x}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}-x\right)^2 + R^2}} + \frac{\frac{L}{2} + x}{\sqrt{\left(\frac{L}{2}+x\right)^2 + R^2}} \right\}$$

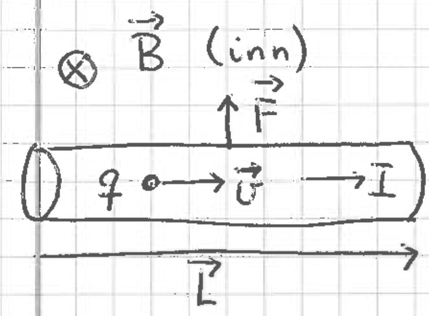
Hvis spolen er <u>lang</u>, dvs $L/2 \gg R$:

$B \approx \frac{1}{2}\mu_0 n I$ nær spolens ender $\left(x = \pm \frac{L}{2}\right)$

$\boxed{B \approx \mu_0 n I}$ inne i spolen $\left(|x| \ll \frac{L}{2}\right)$

$B \approx 0$ utenfor spolen

Magnetisk kraft på strøm [YF 27.6; LHL 23.2]



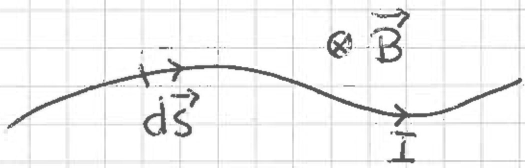
Lederbit med N frie ladninger q; driftshastighet $\vec{v}$, lengde $\vec{L}$

$$\Rightarrow \vec{F} = Nq\vec{v}\times\vec{B} \quad \text{(oppover)}$$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{Nq}{L/v} = \frac{1}{L}Nqv \Rightarrow Nq\vec{v} = I\vec{L}$$

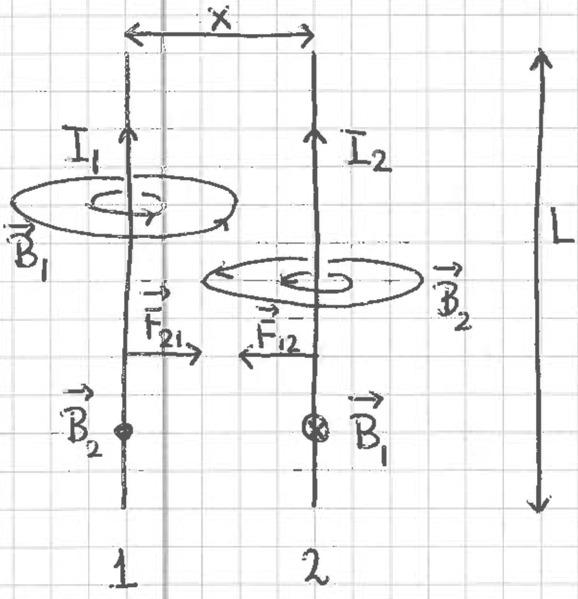
$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B}}$$

Generelt:



$$d\vec{F} = I\,d\vec{s}\times\vec{B} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = I\int d\vec{s}\times\vec{B}}$$ (= total kraft på lederen)

Eks: Kraft mellom parallelle strømmer [YF 28.4; LHL 23.5]



Innbyrdes kraft på lengde L:

$$F_{12} = F_{21} = F$$

$$F = I_1 L B_2 = I_1 L \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x}$$

$$(= I_2 L B_1)$$

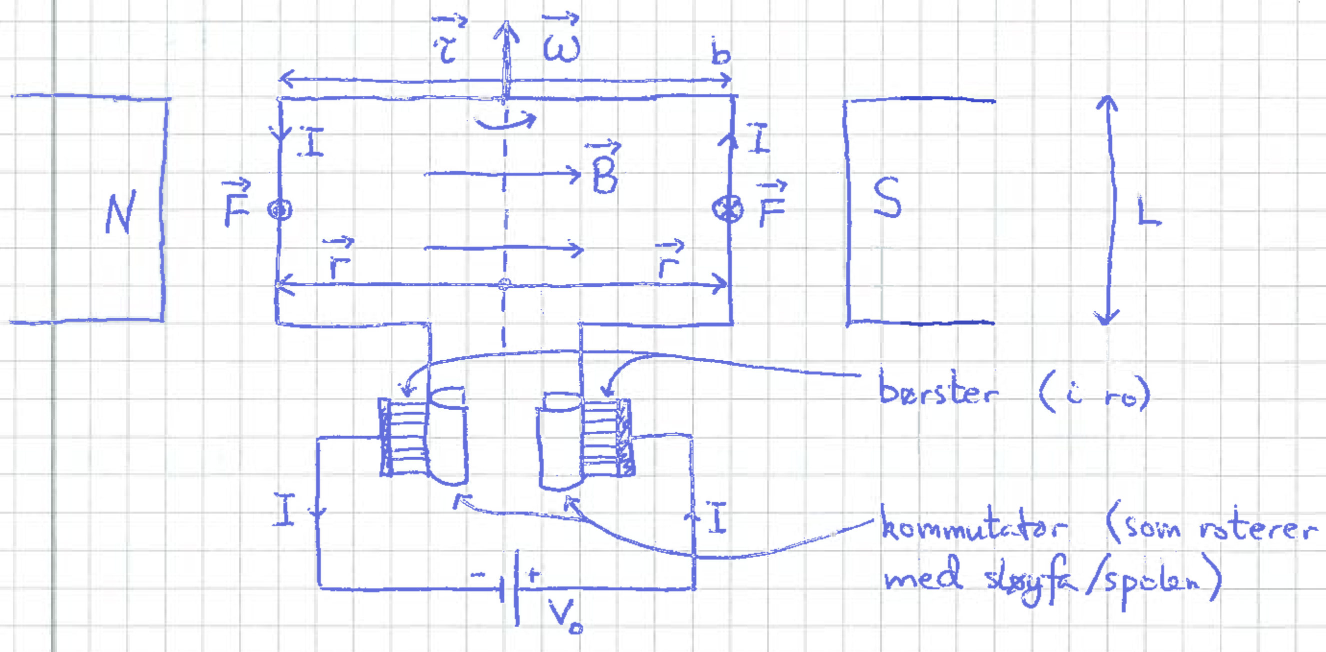
Kraft pr lengdeenhet:

$$f = F/L = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}$$

$I_1 \parallel I_2 \Rightarrow$ Tiltrekning ; $I_1 \parallel -I_2 \Rightarrow$ Frastøtning

Med $x = L = 1\,\text{m}$ og $I_1 = I_2 = 1\,\text{A}$ blir $F = 2\cdot 10^{-7}\,\text{N} = 0{,}20\,\mu\text{N}$

Eks: DC – motor [YF 27.8; LHL 26.3]



Dreiemoment på strømsløyfa (evt: pr vikling av en spole)

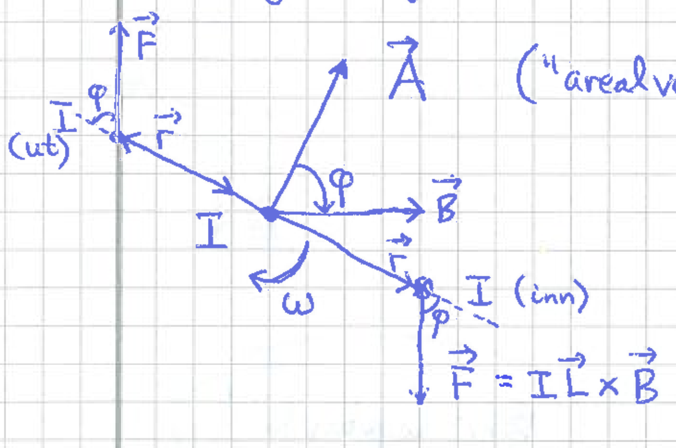
$$\tau = |\vec{\tau}| = \left|\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i\right| = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot ILB \cdot \sin\varphi$$

[φ = vinkel mellom $\vec{r}$ og $\vec{F}$; $\varphi = 90°$ i figuren]

$$\Rightarrow \quad \tau = IA \cdot B \cdot \sin\varphi \quad ; \quad A = bL = \text{omsluttet areal}$$

dvs $\vec{\tau} = I\vec{A} \times \vec{B}$

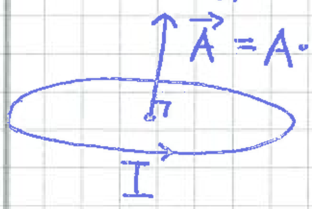
Sett med langs rotasjonsaksen:



<u>Kommutatoren</u> sørger for strømretning i sløyfa/spolen slik at $\vec{\tau}$ hele tiden peker i samme retning.

Magnetisk dipol og dipolmoment [YF 27.7; LHL 23.3, 26.2]

ei strømsløyfe er en magnetisk dipol:



- $\hat{n}$ er enhetsvektor $\perp$ omsluttet areal
- A = omsluttet areal
- fortegn på $\vec{A}$ med h.h. regel

strømsløyfas magnetiske dipolmoment: $\boxed{\vec{m} = I\vec{A}}$

$[m] = A \cdot m^2 = \frac{N \cdot m}{T} = \frac{J}{T}$ (siden $[\tau] = [IAB] = [mB]$)

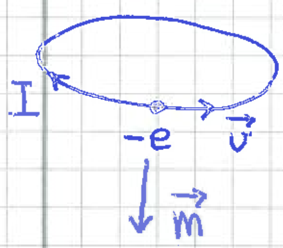
[Generelle definisjoner av dipolmoment:

$\vec{m} = \frac{1}{2}\int (\vec{r} \times \vec{j})\, dV$; $\vec{j}$ = strømtetthet ; dV = volumelement

$\vec{p} = \int \vec{r} \rho\, dV$; ρ = ladningstetthet ; —— " ——]

Eksempler på små og store magnetiske dipoler:

Eks 1: Atom med 1 elektron i sirkulær bane, $r = 1 Å$, $v = 10^6$ m/s.



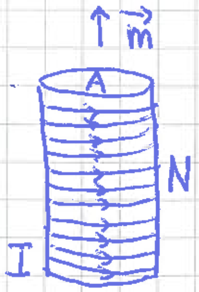
$m = IA = \frac{e}{T} \cdot \pi r^2$; $T = \frac{2\pi r}{v}$

$\Rightarrow m = \frac{evr}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^6 \cdot 10^{-10}$ Am^2

$= \underline{8 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2}$ (evt. J/T)

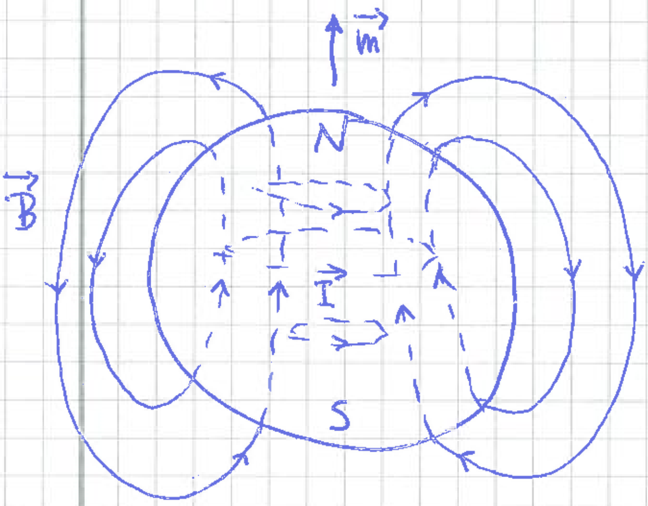
Kvantemekanikk gir at elektronet har et spinn ("andre dreieimpuls") som tilsvarer et magnetisk dipolmoment $\mu_B = e \cdot h / 4\pi m_e \approx 9.274 \cdot 10^{-24}$ J/T, et såkalt Bohr magneton. (h = Plancks konstant)

Eks 2: Spole med $N = 100$ viklinger, strøm $I = 1\,A$, tverrsnitt $A = 10\ cm^2$.



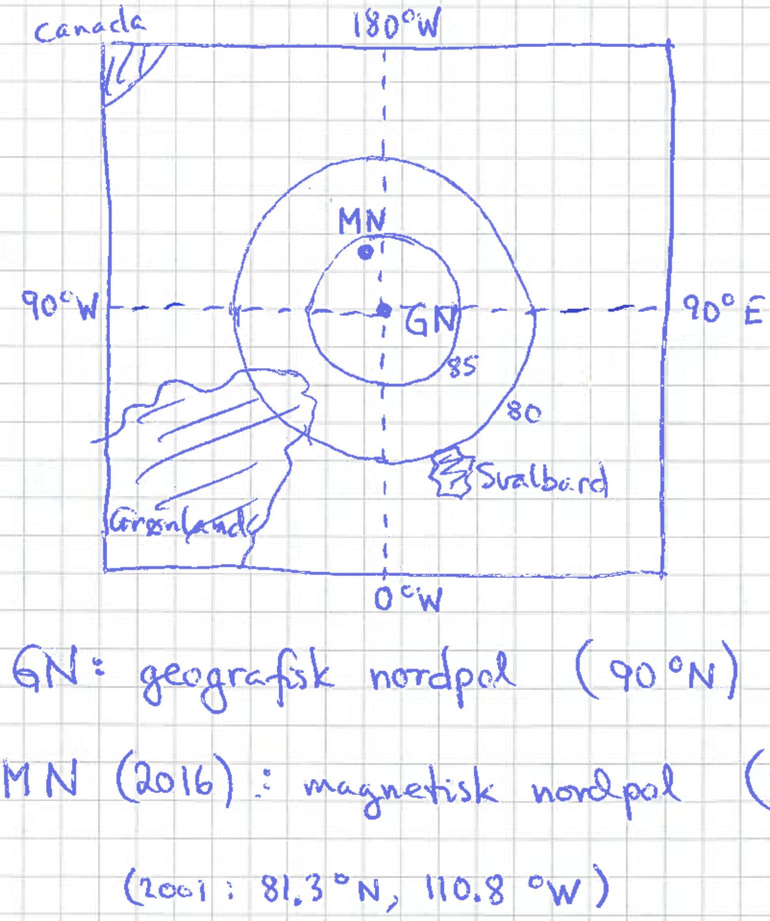
$$m = N \cdot IA = 100 \cdot 1 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^{-4}\ Am^2$$
$$\underline{\approx 0.3\ Am^2}$$

Eks 3: Jorda



$m \approx 8 \cdot 10^{22}\ Am^2$;

(tilsvarer (f.eks.) strømsløyfe med $I = 2 \cdot 10^{10}\ A$ og $A = 4 \cdot 10^{12}\ m^2$)



GN: geografisk nordpol (90°N)

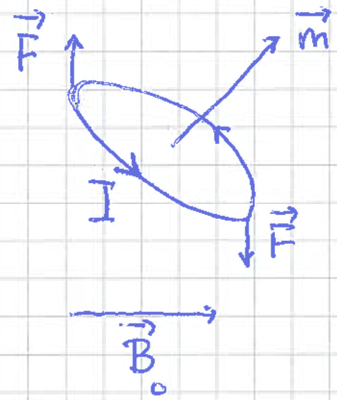
MN (2016): magnetisk nordpol (86.4°N, 166.3°W)

(2001: 81.3°N, 110.8°W)

Materialers magnetiske egenskaper; magnetisme

[Jf. isolatorers dielektriske egenskaper s. 79–80]

Fra Eks 1 s 106: Atomære magnetiske dipoler med dipolmoment $\vec{m}$ kan rettes inn langs ytre felt $\vec{B}_0$ (jf. DC-motor s 105):



$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0 \quad ; \quad U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

(se Øving 13; jf. øving 9 for elektrisk dipol,

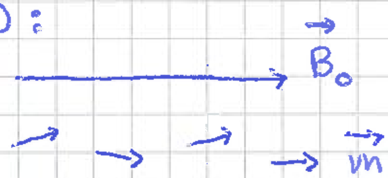
$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0 \quad ; \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0 \;)$$

⇒ Materialer kan magnetiseres i et ytre felt $\vec{B}_0$:

$B_0 = 0$:

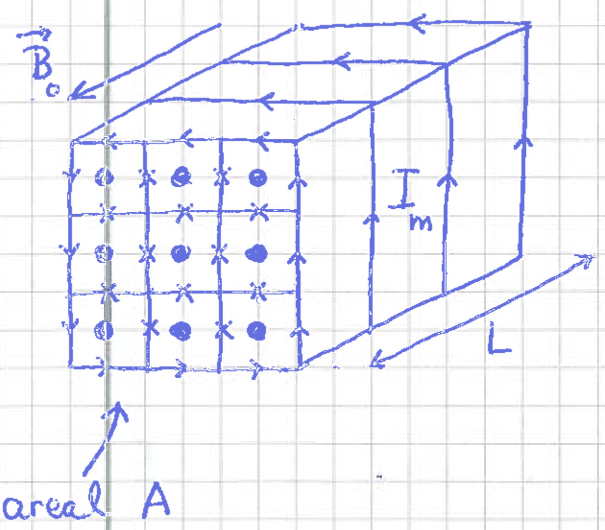
$$\sum_i \vec{m}_i \approx 0$$

$\vec{B}_0 \neq 0$:



$$\sum_i \vec{m}_i \neq 0$$

Netto makroskopisk effekt av ytre $\vec{B}_0$:



- innretting av atomære $\vec{m}$ langs $\vec{B}_0$; bundet strøm i hvert atom
- alle indre strømmer kansellerer (x)
- indusert overflatestrøm I_m, pr lengdeenhet $i_m = I_m / L$
- materialet blir som en spole!
- magnetfeltet styrkes i materialet, $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$

Stoffets relative permeabilitet μ_r defineres ved

$$\boxed{B = \mu_r B_0}$$ jfr $E = \frac{1}{\varepsilon_r} E_0$ for dielektrikum (s.80)

Stoff	Stoffets permeabilitet $\mu = \mu_r \mu_0$	Type magnetisme
Vakuum	μ_0	—
Luft	$1.0000004\ \mu_0$	Paramagnet
Aluminium	$1.00002\ \mu_0$	—"—
Rent jern	$5000\ \mu_0$	Ferromagnet
Kobber	$0.999994\ \mu_0$	Diamagnet
Vann	$0.999992\ \mu_0$	—"—

Paramagnetisme : Svak innretting av $\vec{m}$ langs ytre $\vec{B}_0$

Diamagnetisme : Ytre $\vec{B}_0$ induserer motsatt rettet $\vec{m}$.

Bare målbart hvis $\vec{m} = 0$ i null ytre felt.

Ferromagnetisme : Vekselvirkende atomære $\vec{m}$, lavest energi når "alle" $\vec{m}$ peker samme vei : $\ldots \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \underset{\vec{m}_i}{\uparrow} \uparrow \ldots$

Dette skjer i magneter (Fe, Ni, Co, ...).

Tilsvarende i ferroelektriske materialer : Spontan innretting av elektriske dipoler : $\ldots \uparrow \uparrow \underset{\vec{p}_i}{\uparrow} \uparrow \ldots$

($BaTiO_3$, $PbTiO_3$)

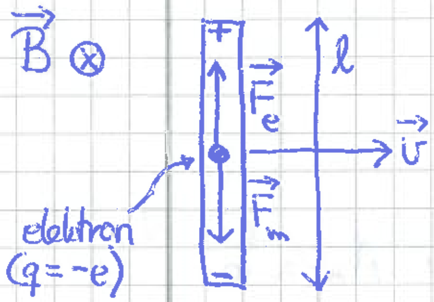
Eks: Bestem B inni spole med 1000 viklinger på lengde 25 cm, fylt med jern med $\mu_r = 2000$, strøm 1 A i spoletråden.

Løsn: $B = \mu n I = \mu_r \mu_0 \frac{N}{L} I = 2000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1000}{0.25} \cdot 1 \text{ T} \approx \underline{\underline{10\text{ T}}}$

Elektrodynamikk [YF 29-31 ; LHL 24,25,27]

Faradays induksjonslov [YF 29.1+2+4 ; LHL 24.1]

Ser på en leder i bevegelse i et uniformt $\vec{B}$-felt:



Magn. kraft på frie elektroner i lederen:

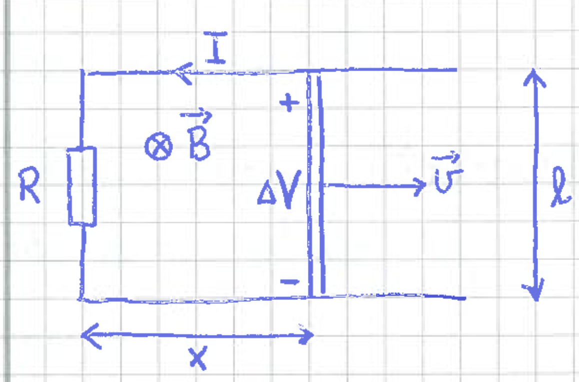
$$\vec{F}_m = -e\vec{v} \times \vec{B} \quad \text{(nedover)}$$

Gir indusert ladning på endene; dermed et indusert elektrisk felt $\vec{E}$, og en spenning $\Delta V = E \cdot \ell$ i lederen.

Likevekt når $\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0$; $\vec{F}_e = -e\vec{E}$

$$\Rightarrow \quad eE = evB \quad \Rightarrow \quad \underline{\Delta V = vB\ell}$$

Den induserte spenningen ΔV kan drive en strøm i en lukket krets:

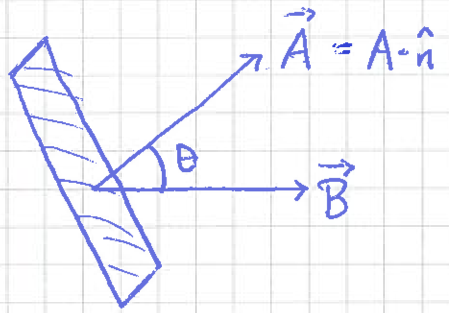


Ohms lov $\Rightarrow I = \dfrac{\Delta V}{R} = \dfrac{vB\ell}{R}$

Vi ser at $\Delta V = vB\ell = \dfrac{dx}{dt} B\ell = \dfrac{d}{dt}(B\ell x) = \dfrac{d}{dt}(B \cdot A)$

der $A = \ell \cdot x$ = arealet som omsluttes av strømsløyfa.

Magnetisk fluks [YF 27.3 ; LHL 23.7 (19.7)]



Magnetisk fluks Φ gjennom flaten med areal A:

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{A} = B\cdot A\cdot\cos\theta$$

$\Rightarrow$ Faradays induksjonslov:

$$\boxed{\Delta V = -\frac{d\Phi}{dt}}$$

Indusert spenning = endring i omsluttet magnetisk fluks pr tidsenhet

Fortegnet (Retningen) på ΔV finner vi ved hjelp av

Lenz' lov [YF 29.3 ; LHL 24.1]

Indusert strøm I får retning slik at tilhørende indusert magnetfelt $\vec{B}_I$ og tilhørende indusert magnetisk fluks

$$\Phi_I = \vec{B}_I\cdot\vec{A} \qquad (\text{evt. generelt } \Phi_I = \int \vec{B}_I\cdot d\vec{A})$$

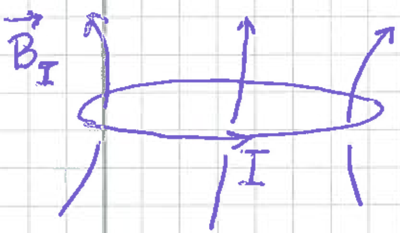
motvirker den påtvungne endringen $\Delta\Phi$.

Kortform:

Naturen motvirker påtvungne endringer!

Induktans [YF 30.2 ; LHL 25.1]

Selvinduktans:



Pga Biot-Savarts lov blir $\vec{B}_I$ prop. med I. Dermed blir også omsluttet fluks

$$\Phi = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$$

prop. med I.

$\Rightarrow$ $\boxed{\Phi = L \cdot I \; ; \quad L = \text{sløyfas selvinduktans}}$

Enhet: $[L] = \left[\frac{B \cdot A}{I}\right] = \frac{T \cdot m^2}{A} = H$ (henry)

Eks: Spole, $N = 1000$ viklinger, $\ell = 25\,cm$, $A = 10\,cm^2$. Bestem L.

Løsn: $B = \mu n I = \mu_r \mu_0 \frac{N}{\ell} I$

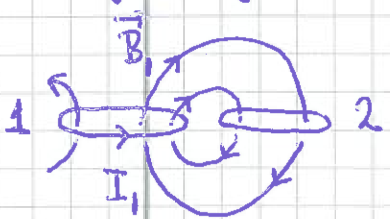
$\Rightarrow \Phi = NBA = N^2 \mu_r \mu_0 A I / \ell = LI$

$\Rightarrow \underline{L = N^2 \mu_r \mu_0 A / \ell}$

Luftfylt ($\mu_r = 1$) : $L = 0.005\ H$

Jernkjerne med f.eks. $\mu_r = 1000$: $L = 5\ H$

Gjensidig induktans:



Strøm I_1 i sløyfe 1 gir fluks Φ_2 omsluttet av sløyfe 2 $(\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2)$, prop. med I_1 : $\Phi_2 = M_{21} I_1$

Tilsvarende: I_2 i sløyfe 2 $\Rightarrow \Phi_1 = \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1$ omsluttet av sløyfe 1 : $\Phi_1 = M_{12} I_2$

$M_{12} = M_{21} = M$ = sløyfenes gjensidige induktans ; $[M] = H$

Induksjon ("selvinduksjon"):

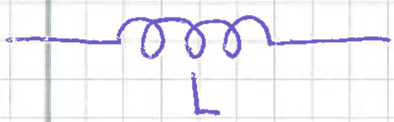
Hvis $\dot{I} \neq 0$, blir $\dot{\Phi} \neq 0$, og vi får indusert spenning

$$V = -\dot{\Phi} = -L\dot{I}$$

Gjensidig induksjon:

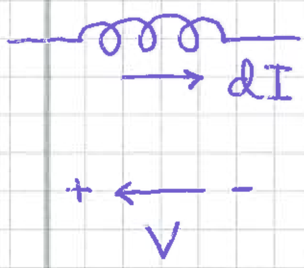
$$\dot{I}_1 \neq 0 \Rightarrow V_2 = -\dot{\Phi}_2 = -M\dot{I}_1 \; ; \quad \dot{I}_2 \neq 0 \Rightarrow V_1 = -\dot{\Phi}_1 = -M\dot{I}_2$$

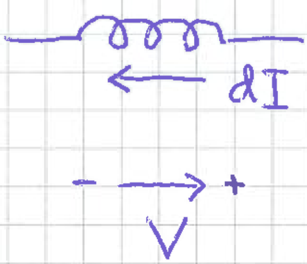
Spole (Induktans) som kretselement:



$$V = -L\frac{dI}{dt}$$

Retning på V med Lenz' lov:





Energi i $\vec{B}$-feltet [YF 30.3; LHL 25.3]

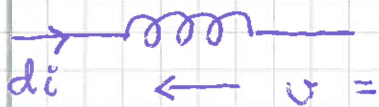
Må gjøre arbeid mot den induserte spenningen for å øke strømmen fra $i = 0$ til $i = I$ i en spole.
Tilført energi lagres i magnetfeltet, med energi pr volumenhet

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2 \qquad \text{(som gjelder generelt)}$$

Total energi i et "elektromagnetisk felt" (dvs $\vec{E}$ og $\vec{B}$) blir dermed

$$\boxed{u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2}$$

Bevis for u_B:



$$v = -L\frac{di}{dt}$$

Energi/Arbeid som trengs for å øke strømmen fra i til $i+di$:

$$dU = P\cdot dt = -v\cdot i\cdot dt = L\frac{di}{dt}\cdot i\cdot dt = L\cdot i\cdot di$$

For å øke strømmen fra $i=0$ til $i=I$:

$$U = \int dU = \int_0^I L\,i\,di = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}LI^2}}$$

Med lang, tettviklet spole, lengde ℓ, tverrsnitt A, N viklinger:

$$B = \mu_0 n I = \mu_0\frac{N}{\ell}I \Rightarrow \underline{I = \frac{B}{\mu_0 N/\ell}}$$

$$\Phi = \underline{NAB} = \underline{LI}$$

$$\Rightarrow U = \tfrac{1}{2}\cdot LI\cdot I = \tfrac{1}{2}\cdot NAB\cdot\frac{B}{\mu_0 N/\ell} = \frac{1}{2\mu_0}B^2\cdot A\cdot\ell$$

Her er $A\cdot\ell$ volumet inni spolen, dvs der vi har $B\neq 0$

$\Rightarrow$ Energien pr volumenhet i magnetfeltet er

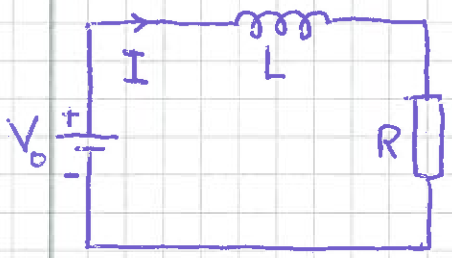
$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

Elektriske kretser og anvendelser ; DC og AC

[YF 30.4+5+6 ; LHL 25.2 ; 27.1+2+3+5]

① RL - krets ; DC

Tilkobling av V_0 ved $t=0$: $(I(0)=0)$

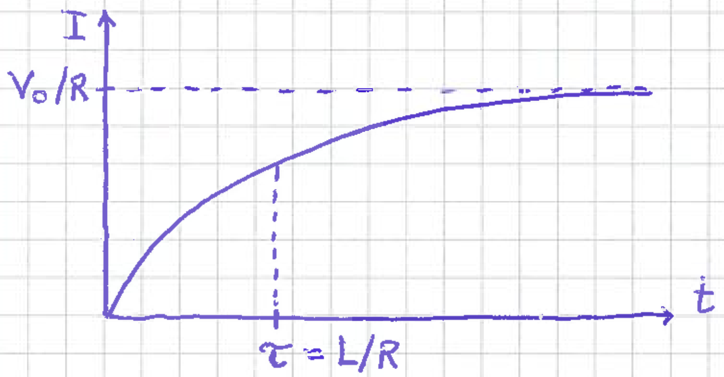


$$K2 \Rightarrow \quad V_0 - L\frac{dI}{dt} - RI = 0$$

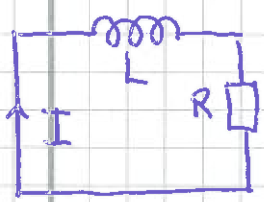
Dvs samme lign. for I som for Q i RC-kretsen s. 95

$$\Rightarrow \quad I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \; ;$$

$$\tau = L/R = \text{RL-kretsens tidskonstant}$$

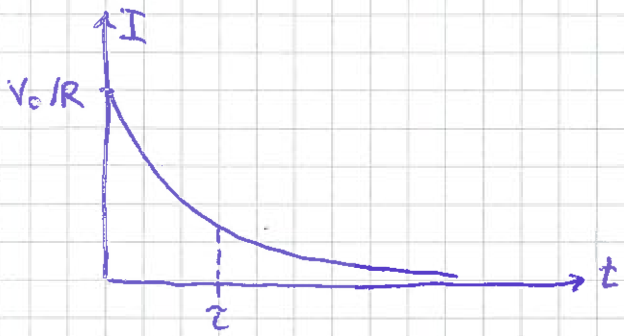


Frakobling av V_0 ved "nytt $t=0$" $(I(0) = V_0/R)$



$$K2 \Rightarrow -L\frac{dI}{dt} - RI = 0$$

$$\Rightarrow \quad I(t) = \frac{V_0}{R}e^{-t/\tau} \quad ; \quad \tau = L/R$$



Gnist når støpselet dras ut av stikk-kontakten:

I tvinges raskt fra $\frac{V_0}{R}$ til 0 $\Rightarrow$ stor $\left|\frac{dI}{dt}\right|$ $\Rightarrow$ stor indusert spenning $|L \cdot dI/dt|$ $\Rightarrow$ kortvarig strøm over luftgapet mellom stikk-kontakt og støpsel (overslag)

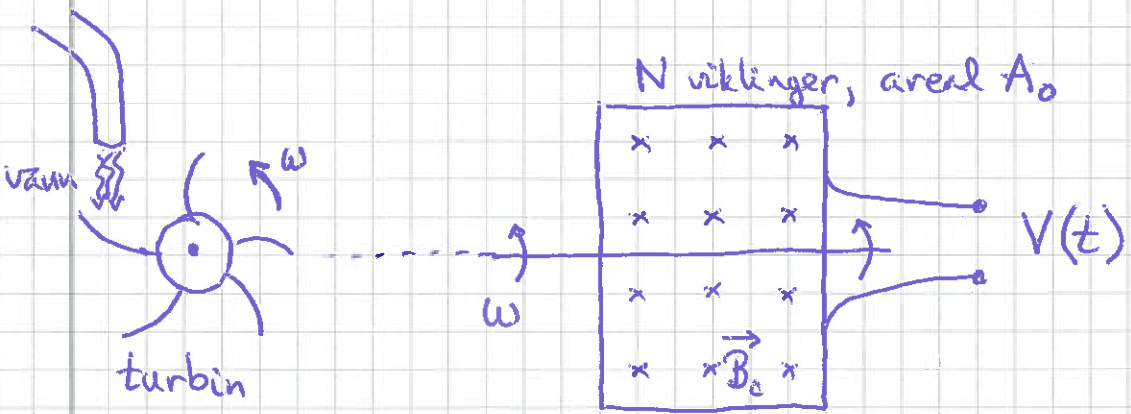
AC spenningskilde

(AC = vekselstrøm)

$V(t) = V_0 \cos \omega t$; Frekvens $f = \frac{\omega}{2\pi}$ (= 50 Hz i strømnettet)

(evt. $V_0 \sin \omega t$)

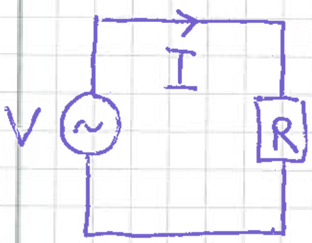
Prinsipp for AC-generator (vannkraft!):



$$\Phi(t) = N B_0 A_0 \cos \omega t$$

$$V(t) = -\dot{\Phi} = V_0 \sin \omega t \; ; \quad V_0 = N B_0 A_0 \omega$$

2



K2: $V_0 \sin \omega t - RI = 0$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} \sin \omega t = I_0 \sin \omega t$$

$$P(t) = V(t) \cdot I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$$

Midlere effekt:

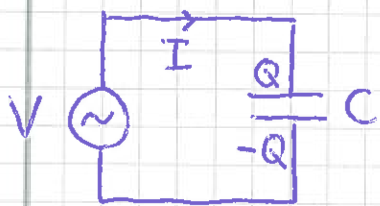
$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_0}{\sqrt{2}} = V_{rms} \cdot I_{rms} \quad (\text{"root mean square"})$$

Husholdningsnettet: $V_0 = 311$ V $\Rightarrow V_{rms} = \underline{220 \text{ V}}$

Energitap på tid t i overføringsnett med gitt motstand R:

$W = P \cdot t = R I^2 \cdot t \Rightarrow$ Fordel med lav I og høy spenning V. (Norge: 10 – 400 kV)

3

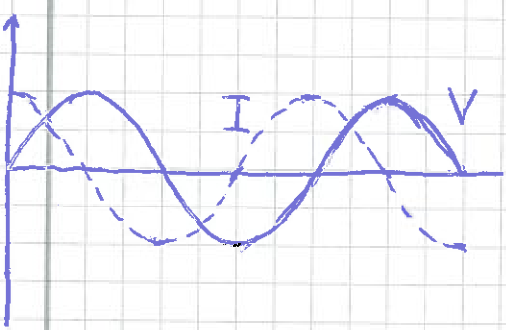


K2: $V_0 \sin \omega t - \frac{Q}{C} = 0$

$$\Rightarrow Q = V_0 C \sin \omega t$$

$$\Rightarrow I(t) = V_0 \omega C \cos \omega t$$

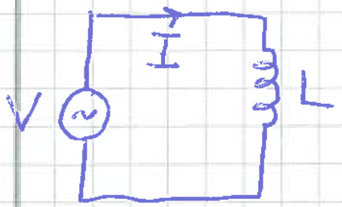
$$= V_0 \omega C \sin(\omega t + \pi/2)$$



- Faseforskjell $\frac{\pi}{2}$ mellom $V(t)$ og $I(t)$
- Strømmens amplitude $I_0(\omega) = V_0 \omega C$ øker med økende frekvens

- Midlere effekttap er null. $(\langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle = 0)$

(4)

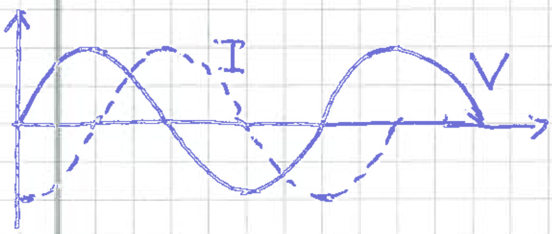


K2: $V_0 \sin \omega t - L\dot{I} = 0$

$$\Rightarrow \dot{I} = \frac{V_0}{L} \sin \omega t$$

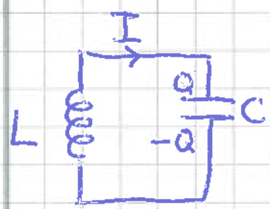
$$\Rightarrow I(t) = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t$$

$$= \frac{V_0}{\omega L} \sin(\omega t - \pi/2)$$



- Faseforskjell $-\pi/2$
- Strømampl. $I_0(\omega) = V_0/\omega L$ avtar med økende frekvens
- Null midlere effekttap

(5) LC-krets



Anta $Q(0) = Q_0$

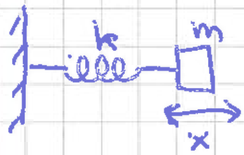
K2: $-L\dot{I} - Q/C = 0$; $I = \dot{Q}$

$$\Rightarrow \ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Dvs enkel harmonisk oscillator,

med løsning $Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Mekanisk analogi:



$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0 \; ; \; \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Analoge størrelser: $Q \leftrightarrow x$; $I \leftrightarrow \dot{x}$; $L \leftrightarrow m$; $C \leftrightarrow \frac{1}{k}$

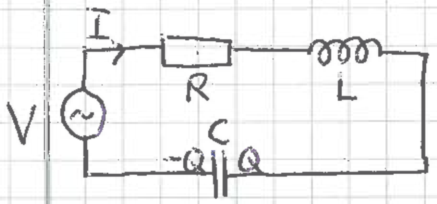
$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \longleftrightarrow \frac{1}{2} L I^2$ = energien i $\vec{B}$-feltet i induktansen

$U = \frac{1}{2} k x^2 \longleftrightarrow \frac{Q^2}{2C}$ = energien i $\vec{E}$-feltet i kapasitansen

$$\Rightarrow \frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{Q_0^2}{2C} = \text{konstant;}$$

OK!!

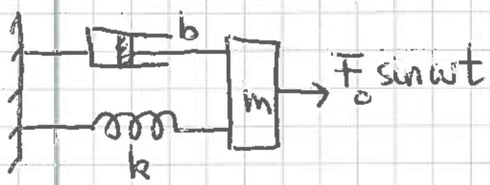
RLC resonanskrets



$$K2: \; V_0 \sin\omega t - RI - L\dot{I} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \sin\omega t$$

Mekanisk analogi:



$$N2: \; m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$$

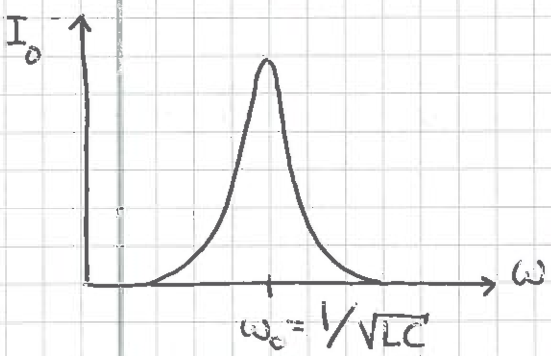
dvs $b \leftrightarrow R$ og $F_0 \leftrightarrow V_0$

$\Rightarrow$ Resonans i RLC-kretsen når $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, og alle sammenhenger s. 55 kan "oversettes" direkte:

$$Q(t) = Q_0(\omega)\sin(\omega t + \varphi) \; ; \quad Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

med $2\gamma = R/L$. Dermed:

$$I(t) = \omega Q_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi), \quad \text{dvs} \quad I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$$

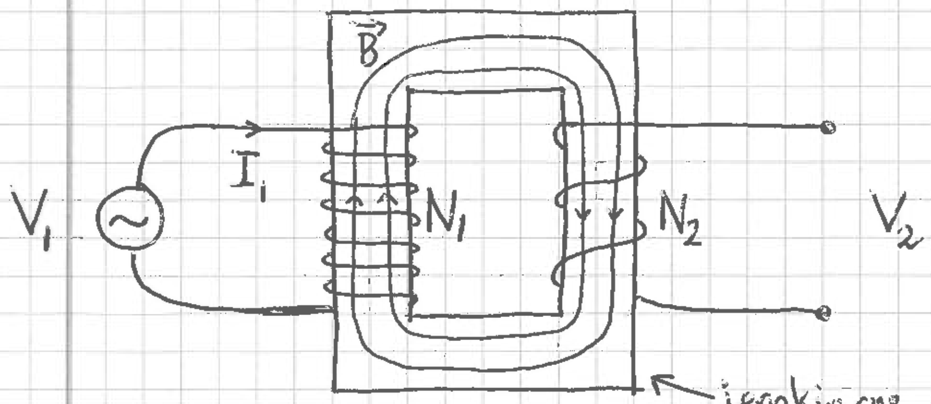


Halvverdibredde: $\Delta\omega \approx 2\gamma = R/L$

Kvalitetsfaktor: $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$

Kan måle $I_0(\omega)$ ved å måle spenningen $V_R = RI$ over motstanden med et voltmeter.

7 Transformator



jernkjerne $\Rightarrow$ $\vec{B}$-feltlinjene følger jernet

$$V_1 = \dot{\Phi}_1 = L_1 \dot{I}_1$$

$$V_2 = \dot{\Phi}_2 = M \dot{I}_1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{N_1 N_2}{N_1^2} = \frac{N_2}{N_1}$$

$\Rightarrow$ Spenning "inn" (V_1) kan transformeres til spenning "ut" (V_2) som enten er lavere ($N_2 < N_1$) eller høyere ($N_2 > N_1$) enn V_1.