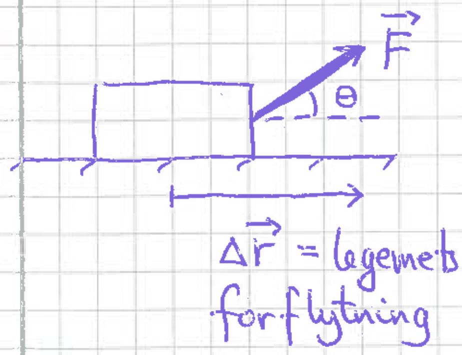
Arbeid og energi [YF 6,7 ; LL 4]

Arbeid [YF 6.1 - 6.3 ; LL 4.1]



arbeid $\stackrel{def}{=}$ kraft × forflytning

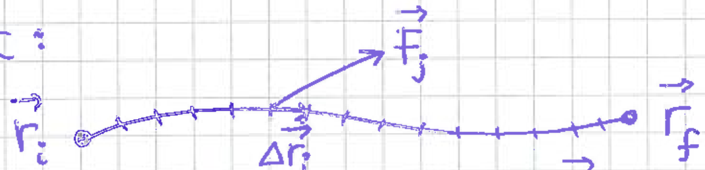
$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta$$

= arbeidet utført av ytre kraft $\vec{F}$ på legemet

Enhet: $[W] = N \cdot m = J$ (joule)

Generelt:

[i : initial, f : final]



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_j \stackrel{\Delta r_j \to 0}{=} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arb. utført av $\vec{F}$ ved forflytn. fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$

Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

effekt $\stackrel{def}{=}$ arbeid (energi) pr tidsenhet

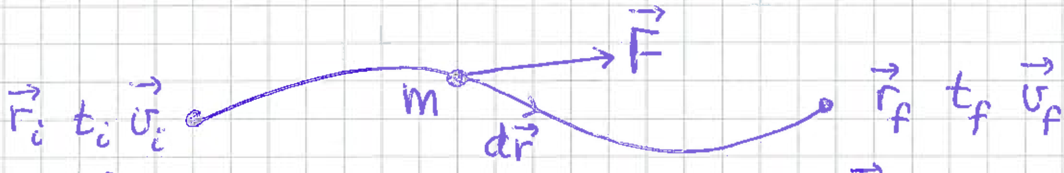
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad ; \quad [P] = \frac{J}{s} = W \text{ (watt)}$$

Eks: Typisk husholdning bruker 30 MWh el. energi pr år.
Hvor mange J er dette? Hva er gjennomsnittlig effekt $\langle P \rangle$?

Løsn: $30 \text{ MWh} = 30 \cdot 10^6 (J/s) \cdot 3600 s = 1{,}08 \cdot 10^{11} J = \underline{108 \text{ GJ}}$

$\langle P \rangle = 30 \cdot 10^6 \text{ Wh} / 365 \cdot 24 h = 3425 \text{ W} \simeq \underline{3{,}4 \text{ kW}}$

Kinetisk energi [YF 6.2 ; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = m\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f}\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$= m\cdot\frac{1}{2}\int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f}\underbrace{(\vec{v}\cdot d\vec{v} + d\vec{v}\cdot\vec{v})}_{=d(\vec{v}\cdot\vec{v}) = dv^2} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Kinetisk energi : $K \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2$

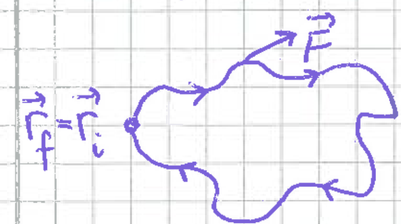
$$\Rightarrow \boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

Arbeidet W som utføres på et legeme tilsvarer endringen ΔK i legemets kinetiske energi.

Konservativ kraft (og system) [YF 7.3; LL 4.4]

I kons. system virker kun kons. krefter, og mekanisk energi tapes ikke til andre energiformer (varme etc).

Anta $\vec{r}_f = \vec{r}_i$ (lukket kurve) :



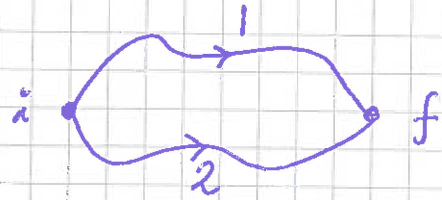
Hvis $K_f = K_i$, er $W = \Delta K = 0$, dvs

$$\boxed{\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0}$$

Da er $\vec{F}$ en konservativ kraft.

[$\oint \ldots$ = integral rundt lukket kurve]

Hvis $\vec{F}$ er konservativ, er arbeidet W uavhengig av veien:



$$W_1 = \left(\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)_1$$

$$W_2 = \left(\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)_2 = -\left(\int_f^i \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)_2$$

$$\Rightarrow 0 = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)_1 + \left(\int_f^i \vec{F}\cdot d\vec{r}\right)_2 = W_1 - W_2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{W_1 = W_2} \qquad \text{(qed)}$$

Potensiell energi [YF 7.1-7.4 ; LL 4.3-4.4]

Når $\vec{F}$ er konservativ, er

$$\boxed{U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

den potensielle energien i posisjon $\vec{r}$, der vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$.

NB: Kun forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

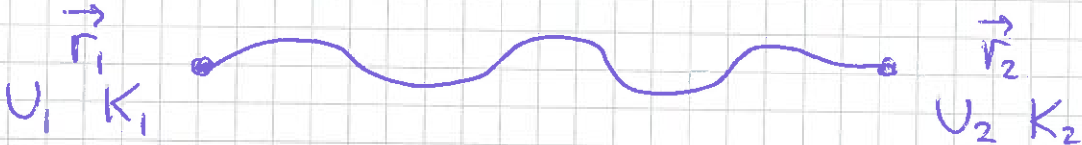
Fra Matematikk 2:

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \vec{F} = 0$$

$$U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -\nabla U$$

Bevarelse av mekanisk energi [YF 7.1–7.3; LL 4.5]

Anta konservativt system.



$$U_1 - U_2 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \left(-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}\right) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$K_2 - K_1 = W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$\Rightarrow$

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

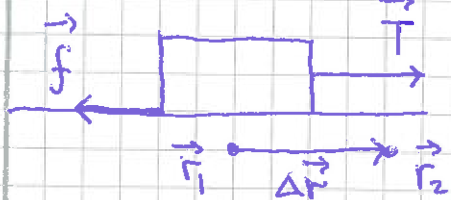
Dvs:

> I et kons. system er total mekanisk energi
> $$E = K + U$$
> konstant (bevart).

Friksjonskrefter er ikke konservative.

Tyngdekraften og coulombkraften er konservative.

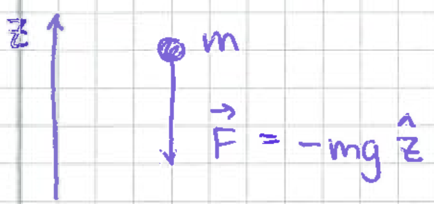
Friksjonsarbeid [YF 7.3; LL 4.5]



$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f}\cdot d\vec{r} < 0$, siden $\vec{f}$ alltid rettet mot $d\vec{r}$; mek. energi "tapes" som varme, lyd etc.

Med $\vec{f}\cdot d\vec{r} < 0$ blir $\oint \vec{f}\cdot d\vec{r} < 0$, alltid. Dermed kan $\vec{f}$ ikke være en kons. kraft.

Eks 1: Fall i tyngdefeltet



- Anta $U(0)=0$ og $v(0)=0$, og finn $U(z)$ og $v(z)$
- Vurder effekten av luftmotstand

Løsn: Først uten luftmotstand.

$$U(z) = -\int_0^z (-mg\hat{z})\cdot(\hat{z}\,dz) = \underline{\underline{mgz}}$$

E bevart $\Rightarrow U(z)+K(z) = U(0)+K(0) = 0$

$$\Rightarrow mgz + \tfrac{1}{2}mv(z)^2 = 0$$

$$\Rightarrow v(z) = \underline{\underline{\sqrt{-2gz}}} \qquad (z<0)$$

Luftmotstand: $\vec{f} = -Dv^2\hat{v}$; $D = \frac{1}{2}\rho A C_d$

Bordtennisball i luft: $\rho \approx 1.3\ \mathrm{kg/m^3}$; $C_d \approx 0.5$;

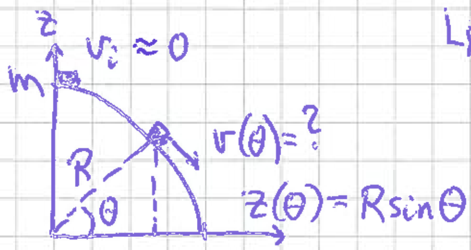
$A = \pi\cdot(0.020\ \mathrm{m})^2 \Rightarrow D \approx 4\cdot 10^{-4}\ \mathrm{kg/m}$

Terminalhastighet v_t når $\sum_i \vec{F}_i = 0$

$$\Rightarrow D\cdot v_t^2 = mg \Rightarrow v_t = (mg/D)^{1/2} = \left(0.0027\ \mathrm{kg}\cdot 9.8\ \tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} / 4\cdot 10^{-4}\ \tfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}}\right)^{1/2}$$

$$\approx \underline{\underline{8\ \mathrm{m/s}}}$$

Eks 2: Glatt kuppel



Løsn: Velger $U(0)=0 \Rightarrow E = U(R) = mgR$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}mv(\theta)^2 + mg\,z(\theta) = mgR$$

$$\Rightarrow v(\theta) = \underline{\underline{\sqrt{2gR(1-\sin\theta)}}}$$

- Øv. 3: Hvor mistes kontakten med underlaget?
- Hvordan hensynta friksjon? Numerikk?!
- Hva med rullende evt. "skurende" objekter

Impuls [YF 8 ; LL 5]

(= bevegelsesmengde = linear momentum)

N2: $\vec{F} = m\, d\vec{v}/dt = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ når $m = \text{konst.}$

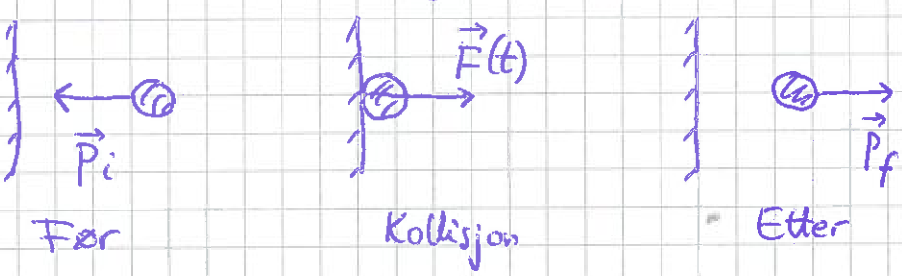
impuls $\stackrel{\text{def}}{=}$ masse × hastighet

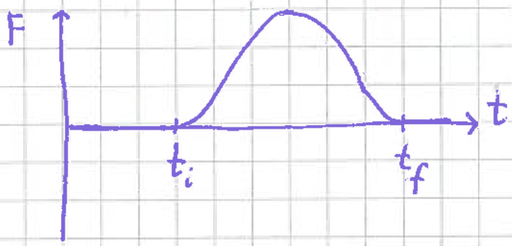
$\vec{p} = m\vec{v}$; $[p] = \text{kg} \cdot \text{m/s}$

Dermed: $\boxed{\vec{F} = d\vec{p}/dt}$ N2

Impulsbevarelse: Hvis $\sum \vec{F}_{ytre} = 0$, er legemets (eller systemets) impuls bevart

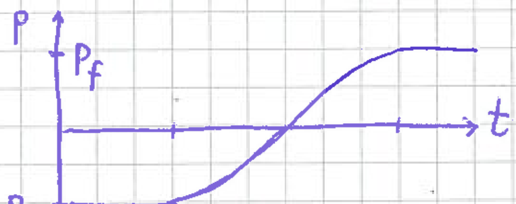
Eks: Ball mot vegg





$d\vec{p} = \vec{F}(t)\, dt$

$$\Rightarrow \vec{p}(t) = \vec{p}_i + \int_{t_i}^{t} \vec{F}(t)\, dt$$



Ballens totale impulsendring:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt$$

Talleks: Bordtennis, $v_i \sim -10$ m/s, $v_f \sim +40$ m/s, $\Delta t \sim 2$ ms, anta $F \approx$ konstant

$$\Rightarrow F/G = m(\Delta v/\Delta t)/mg \approx 50 \text{ m/s} / 2\cdot 10^{-3}\text{ s}\cdot 10 \text{ m/s}^2 = \underline{2500}$$

Lærdom: Ofte store krefter med kort varighet i kollisjoner; dermed OK å neglisjere evt. ytre krefter (som G) i kollisjonen.

Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL S.3]

Elastisk : Mek. energi bevart ($\Delta K = 0$)

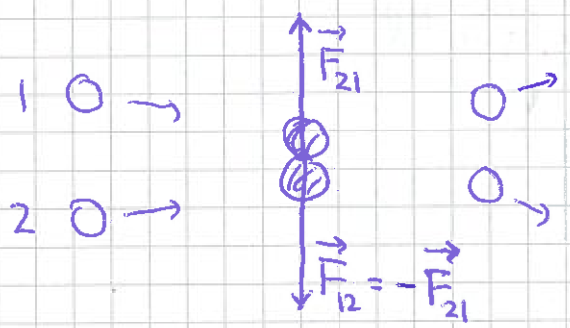
Uelastisk : —"— ikke bevart ($\Delta K < 0$)

(Kortvarig $\Rightarrow \Delta U \approx 0$)

Fullstendig uelastisk : Sammenhengende legemer etter kollisjon, med felles hastighet. Gir max $|\Delta K|$.

Tapt K → deformasjon, varme, lyd

Pga N3 vil indre krefter ikke endre $\vec{P}_{tot}$:



$$N2, N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} = d\vec{p}_1/dt, \quad \vec{F}_{12} = d\vec{p}_2/dt = -d\vec{p}_1/dt$$

$$\Rightarrow d\vec{P}_{tot}/dt = 0 \quad ; \quad \vec{P}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\Rightarrow \vec{P}_{tot} = \text{konst.}$$

Sentralt støt [YF 8.2–8.4 ; LL 5.3]

Før: $m \oslash \longrightarrow v \qquad V \longleftarrow \oslash M \qquad (i) \qquad - \longleftrightarrow +$

Etter: $v' \longleftarrow \oslash m \qquad M \oslash \longrightarrow V' \qquad (f)$

$\Delta p = 0 \Rightarrow mv + MV = mv' + MV'$

(a) Fullstendig uelastisk: $v' = V' = (mv + MV)/(m+M)$

(b) Delvis uelastisk: 1 ligning, 2 ukjente ⇒ Må ha 1 opplysning til.

(c) Elastisk, $\Delta K = 0$: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$

$$\Rightarrow m(v+v')(v-v') = M(V'+V)(V'-V) \qquad (1)$$

$$\Delta p = 0 \Rightarrow m(v-v') = M(V'-V) \qquad (2)$$

$$(1)/(2) \Rightarrow v + v' = V' + V \qquad (3)$$

$$M\cdot(3) - (2) \Rightarrow v' = \frac{M}{m+M}\left(2V + v\,\frac{m-M}{M}\right)$$

$$V' = \frac{m}{M+m}\left(2v + V\,\frac{M-m}{m}\right)$$

Eks: Ball mot vegg, elastisk

$m \oslash \longrightarrow v \quad \Big| \; V=0,\ M \gg m \qquad\qquad v' \longleftarrow \oslash m \quad \Big| \; V'$

$$\Rightarrow v' = \frac{M}{m+M}\left(0 + v\,\frac{m-M}{M}\right) \approx \frac{M}{M}\cdot v \cdot \left(-\frac{M}{M}\right) = -v$$

$$V' = \frac{m}{M+m}(2v + 0) \approx \frac{m}{M}\cdot 2v \qquad (\approx 0)$$

Impuls: $p = mv,\ P = MV = 0,\ p' = mv' = -mv,$
$P' = MV' \approx M(m/M)2v = 2mv$ $\Big\} \Rightarrow \underline{\Delta p = 0}$ (ok)

Energi: $K_m = \frac{1}{2}mv^2,\ K_M = \frac{1}{2}MV^2 = 0,\ K'_m = \frac{1}{2}mv^2,$
$K'_M = \frac{1}{2}MV'^2 \approx \frac{1}{2}M(2mv/M)^2 = 2m^2v/M \approx 0$ $\Big\} \Rightarrow \underline{\Delta K = 0}$ (ok)