Bevaringslover oppsummert

- For et *isolert* system (*ingen* ytre krefter) er total energi E, impuls $\vec{p}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ bevart
- I et *konservativt* system er mekanisk energi $K+U$ bevart
- Hvis netto ytre kraft på et system er null, er total impuls $\vec{p}$ bevart
- Hvis netto ytre dreiemoment på et system er null, er total dreieimpuls $\vec{L}$ bevart

Spesialtilfelle: *Statisk likevekt* [YF 11.1-11.3; LL 7.1]

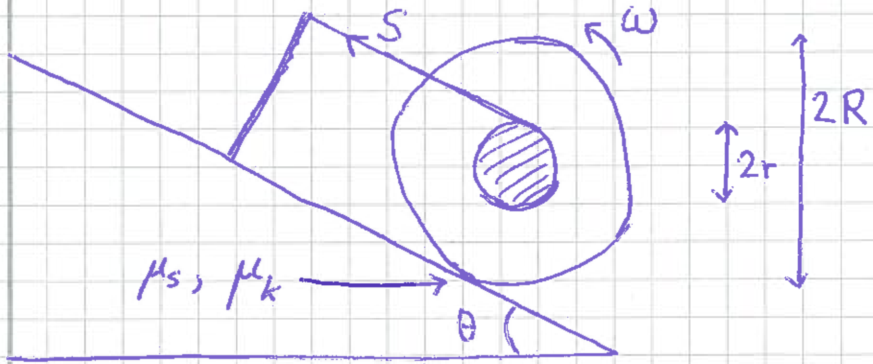
Et stivt legeme forblir i ro (dvs $\vec{p}=0$ og $\vec{L}=0$) bare når netto ytre kraft og netto ytre dreiemoment er null:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konstant} \quad (\text{f.eks. } \vec{p}=0)$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{konstant} \quad (\text{f.eks. } \vec{L}=0)$$

Eksempler, rotasjon

Eks 1: Snelle på skråplan (Øving 6)

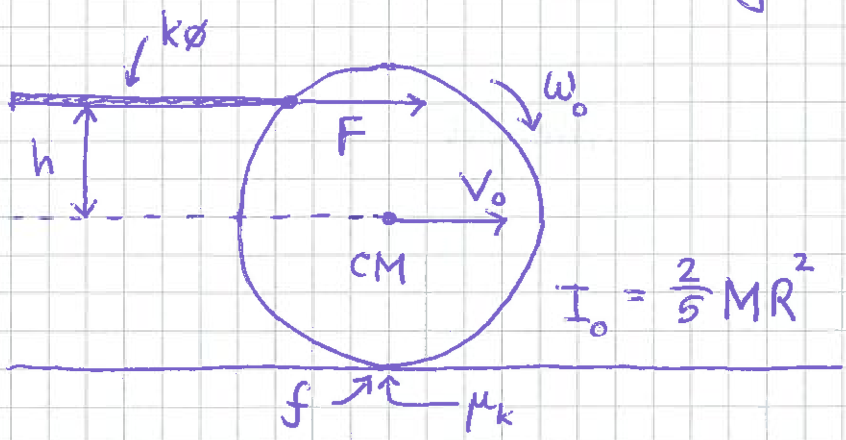


- Ved hvilken vinkel θ_0 begynner snella å "skure baklengs" nedover skråplanet?
- Hva er snordraget S og akselerasjonen a når $\theta > \theta_0$?

Tips:

- N1 langs skråplanet og N1 for rotasjon om CM gir θ_0 ved å sette $f = f_{max} = \mu_s N$
- N2 langs skråplanet og N2 for rotasjon om CM gir S og a; nå er $f = \mu_k N$

Eks 2: Snooker [LL 6.7 ; øving 6]



Kortvarig støt med køen i høyde h over senterlinjen.
$F \gg f \Rightarrow$ neglisjerer f i selve støtet.
Finn kulas bevegelse.

Tips:
Støtet (F ; $\tau = F \cdot h$ med CM som referanse)
gir V_0 og ω_0 bestemt av N2 og N2, rotasjon:

$$F \cdot \Delta t = \Delta p = MV_0 \; ; \quad \tau \cdot \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$$

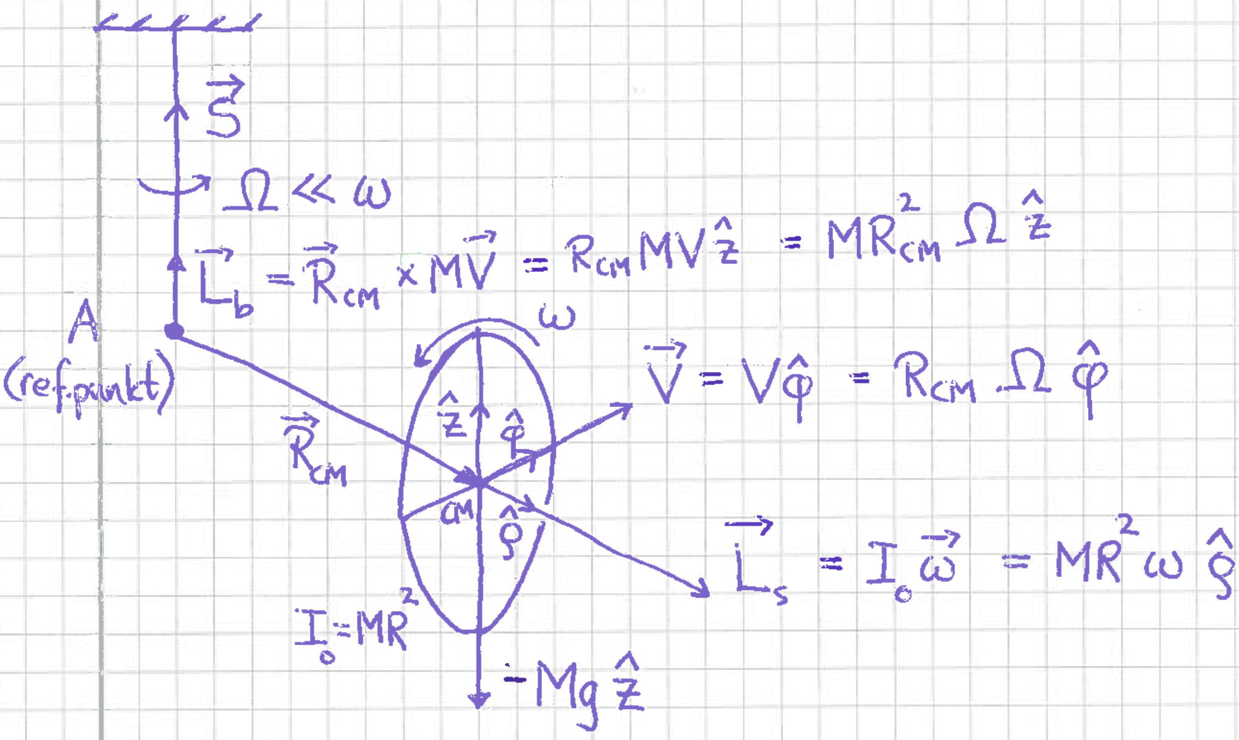
Stor h $\Rightarrow \omega_0 > V_0/R \Rightarrow$ sluring, $\vec{f}$ mot høyre

Liten h $\Rightarrow$ omvendt

h= ..... $\Rightarrow \omega_0 = V_0/R \Rightarrow$ ren rulling umiddelbart

Eller hvert : ren rulling uansett (og $f=0$)

Eks 3: Presesjon [YF 10.7; LL 6.10]



Exp: $M = 5\,kg$, $R = 0.3\,m$, $R_{CM} = 0.2\,m$, $T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx \underline{4.7}$

Oppgave: Finn sammenheng mellom T_Ω og $T_\omega = \frac{2\pi}{\omega}$.

Løsning:

N2, rot. relativt A: $\vec{\tau}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$.

Dreiemoment relativt A:

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} M g \left(\hat{\varrho} \times (-\hat{z})\right) = R_{CM} M g \,\hat{\varphi}$$

($\vec{S}$ har null arm relativt A.)

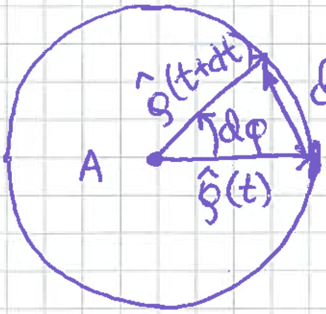
Dreieimpuls relativt A:

$$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M R_{CM}^2 \,\Omega\, \hat{z} + M R^2 \omega\, \hat{\varrho} \approx M R^2 \omega\, \hat{\varrho}$$

når $\omega \gg \Omega$ (og $R_{CM} \approx R$).

Dermed: $d\vec{L}_A/dt \approx MR^2\omega\, d\hat{\varrho}/dt$

Sett ned langs z-aksen:



$$d\hat{\varrho} = 1 \cdot d\varphi \cdot \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{\varrho}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} = \Omega\hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \underbrace{R_{CM} M g \hat{\varphi}}_{\vec{\tau}_A} \approx \underbrace{MR^2\omega\Omega\hat{\varphi}}_{d\vec{L}_A/dt}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{R_{CM}\, g}{R^2\,\Omega}$$

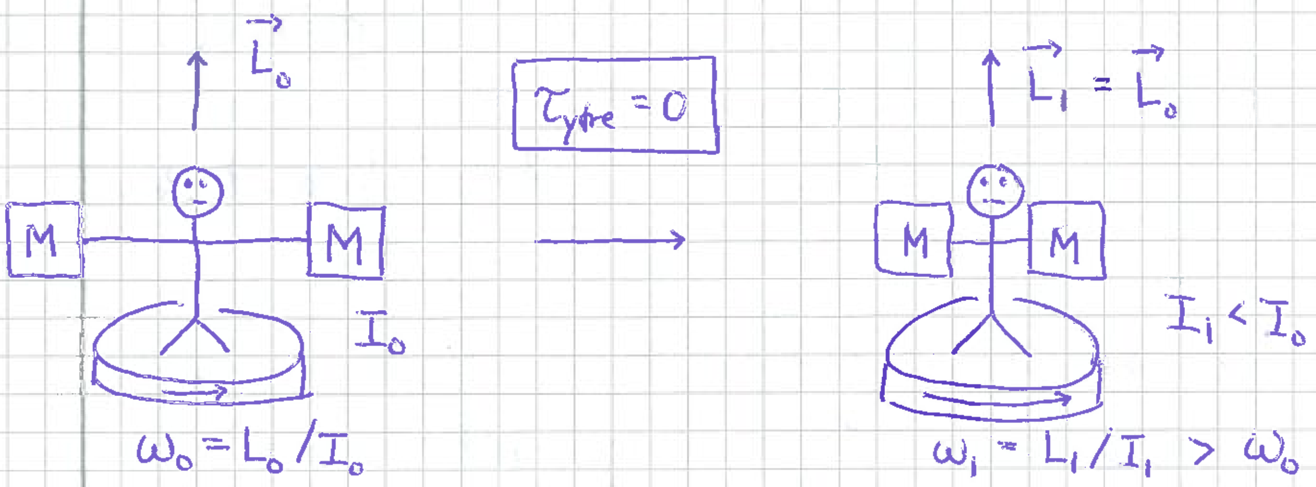
$\Rightarrow$ Hjulets omløpstid:

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{(2\pi R)^2}{R_{CM}\, g\, T_\Omega}$$

Exp. tallverdi:

$$T_\omega = \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot T_\Omega} \approx \frac{2\ s^2}{T_\Omega} \approx \underline{\underline{0.4\ s}}$$

Eks 4 : Piruett [YF 10.6 ; LL 6.5]

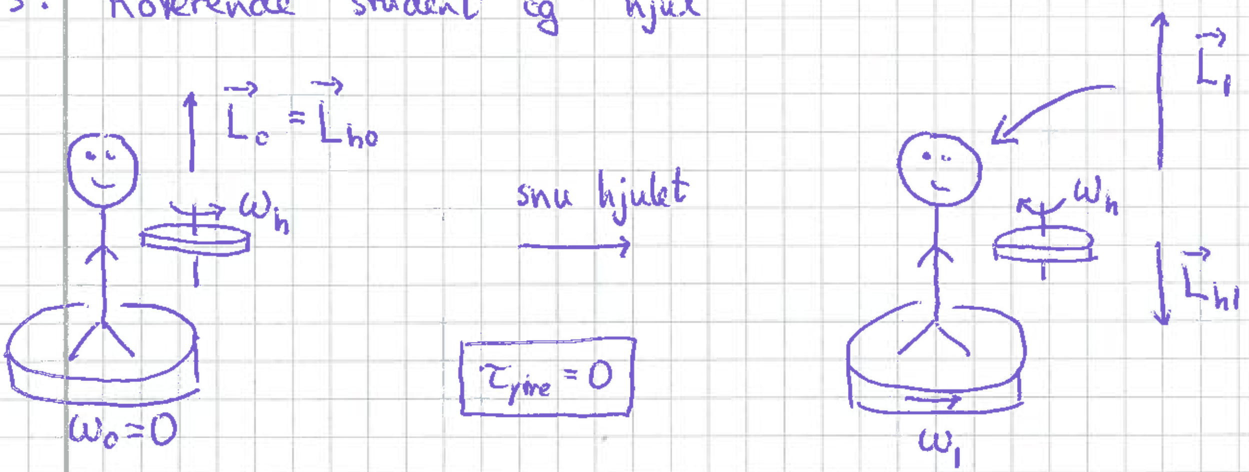


$$\tau_{ytre} = 0 \Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_0 \Rightarrow \omega_1 = L_0/I_1 = \omega_0 I_0/I_1 > \omega_0$$

$$K_0 = \tfrac{1}{2} I_0 \omega_0^2 \; ; \; K_1 = \tfrac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \tfrac{1}{2} I_0 \omega_0 \omega_1 = K_0 I_0/I_1 > K_0$$

Utført arbeid tas fra kjemisk energi i musklene

Eks 5 : Roterende student og hjul



$$\vec{L}_1 + \vec{L}_{h1} = \vec{L}_0 \quad ; \quad \vec{L}_{h1} = -\vec{L}_0$$

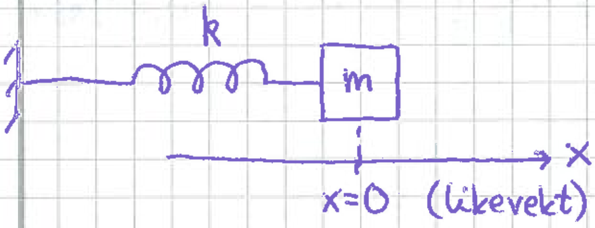
$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{L}_1 = 2\vec{L}_0}}$$

Svingninger [YF 14 ; LL 9]

= oscillasjoner = periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: masse/fjær, pendler, gitarstreng, atomer i molekyler etc

Harmonisk oscillator [YF 14.2 ; LL 9.1–9.3]



x = posisjonen til m
= fjærforlengelsen ($x>0$)
(evt. sammenpressing, $x<0$)

- $x \gtrless 0 \Rightarrow \vec{F} \sim \mp \hat{x}$ (fjæra søker tilbake til likevekt)
- $|\vec{F}| \sim |x|$ (ideell fjær; Hookes lov)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -kx\,\hat{x}}$$

k = fjærkonstanten ; $[k] = N/m$

N2 : $-kx = m\ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} + (k/m)x = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

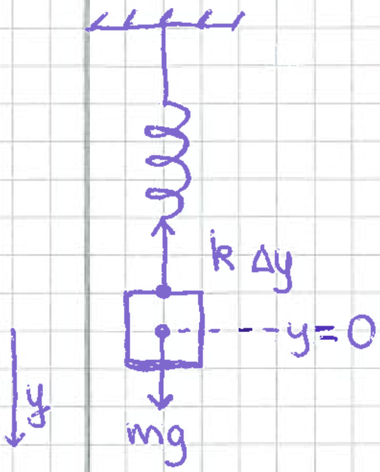
Harmonisk oscillator i 1D, med $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Generell løsning: [Øving: B og C uttrykt ved A og φ]

$x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$ evt $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

Konstantene B, C evt A, φ fastlegges via to initialbetingelser, f.eks $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$

Vertikalt i tyngdefeltet:



Strukket fjær i likevekt: $mg = k\,\Delta y \Rightarrow \Delta y = \dfrac{mg}{k}$

Anta m (evt (M)) i $y=0$ i strukket likevekt

$$\Rightarrow \sum F = mg - k(\Delta y + y) = -ky$$

$$\overset{N2}{\Longrightarrow} \quad m\ddot{y} = -ky$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

Dvs: Samme ligning, samme $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Størrelser og begreper (jf sirkelbevegelse):

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ = oscillatorens "posisjon"

A = amplitude = max utsving fra likevekt; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkelfrekvens; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ = periode = tid pr hel svingning; $[T] = s$

$f = T^{-1}$ = frekvens = antall svingn. pr tidsenhet; $[f] = s^{-1} = Hz$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant; $[\varphi] = 1$

Hastighet: $\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0 A \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$

Akselerasjon: $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x(t)$ (ok!)

$= \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$

$\Rightarrow$ Faseforskjell $\pi/2$ mellom x og $\dot{x}$,

— " — π mellom x og $\ddot{x}$ (i motfase)

Energi i harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4]

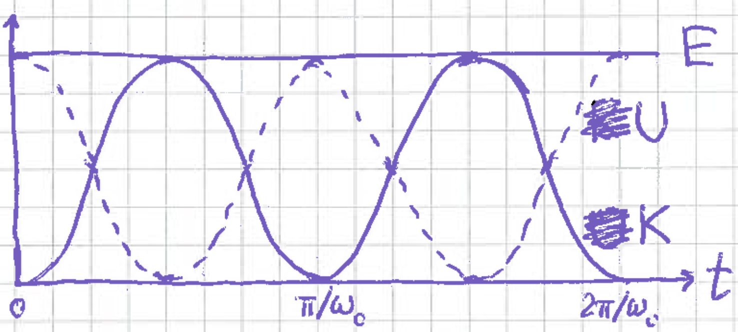
$$K(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2 \omega_0 t$$ (Antar her $\varphi = 0$)

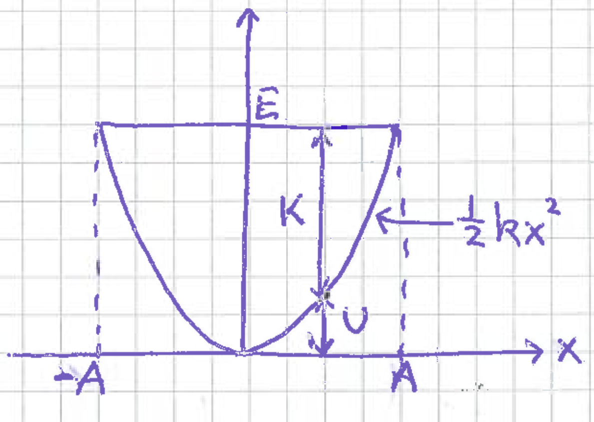
$$U = -\int_0^x F(x)\,dx = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\Rightarrow U(t) = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$\Rightarrow E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = \text{konstant}$$

⇒ Total mek. energi er bevart; systemet er <u>konservativt</u>

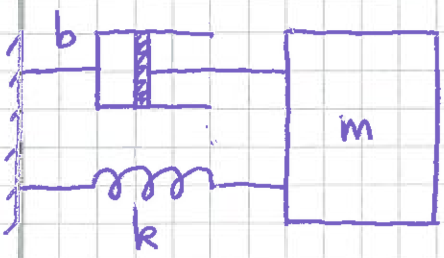




Dempet fri svingning [YF 14.7 ; LL 9.7]

Antar $f = -b\dot{x}$, dvs langsom bevegelse i fluid

[Stor $\dot{x}$ i fluid: $f = -D\dot{x}^2$; Tørr friksjon: $f = \mu_k N$]



N2: $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

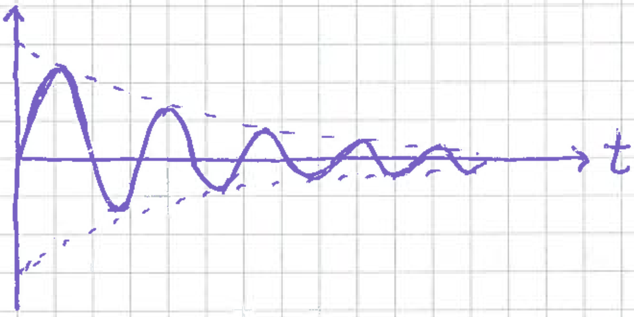
$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\gamma = b/2m, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$[\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$$

Underkritisk (svak) demping, $\gamma < \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



---- $\pm A e^{-\gamma t}$

(omhyllingskurve)

Dempede svingninger.

Eksponentielt avtagende amplitude, $A e^{-\gamma t}$

$\Rightarrow$ Etter tid $1/\gamma = 2m/b$ er amplituden redusert til $A \cdot e^{-1} \approx 0.37\,A$

Overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$ (54)

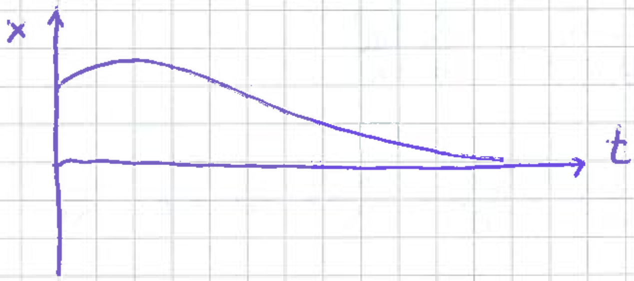
$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$ $\quad (\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma)$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$

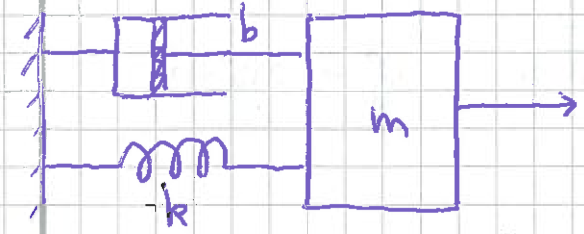
Dvs: $\gamma \geq \omega_0$ gir <u>ikke</u> svingninger.



Her: $x(0) > 0$
$\dot{x}(0) > 0$

Eks: Støtdempere har $\gamma \approx \omega_0$,
gir best kjørekomfort

Tvungen svingning. Resonans [YF 14.8; LL 9.9]



$F(t) = F_0 \cos \omega t$
= ytre harmonisk kraft

N2: $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \qquad \left(2\gamma = \frac{b}{m}, \ \omega_0^2 = \frac{k}{m}\right)$$

Generell løsning : $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen løsning, som s. 53 og 54:

$x_h(t) \sim \exp(-\gamma t) \approx 0$ når $t \gg 1/\gamma$; kun relevant for innsvingningsforløpet

Partikulærløsning :

$x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$

Innsetting i $\ddot{x}_p + 2\gamma \dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$ gir

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\}^{1/2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\gamma\omega}\right\}$$

Resonans:

Svært stor $A(\omega)$ dersom $\underline{\gamma \ll \omega_0}$ (svak demping) og $\underline{\omega \approx \omega_0}$;

$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{F_0}{k} \frac{\omega_0}{2\gamma} = A_0 \frac{\omega_0}{2\gamma} \gg A_0$$

$A(\omega_0) \to \infty$ hvis $\gamma \to 0$ (jf Tacoma bridge, 1940)

Oscillatorens energi :

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad ; \quad E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{F_0^2}{2k}$$

$(\omega_0/\gamma = 20)$

$\Rightarrow Q = 10$

Halvverdibredde : $\Delta\omega \approx 2\gamma$

Q-faktor : $Q = \omega_0/\Delta\omega = \omega_0/2\gamma$

Mål for hvor skarp resonansen er.

Redusert demping γ gir smalere og høyere resonans.