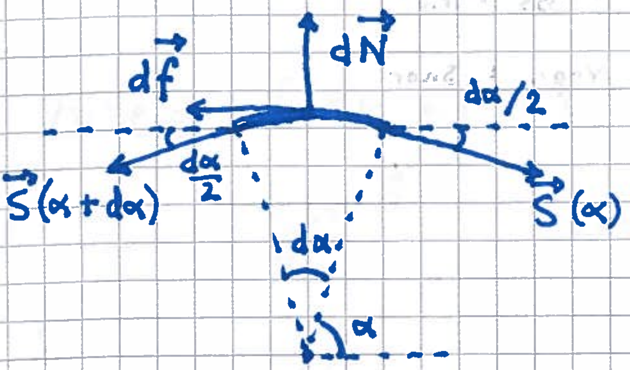
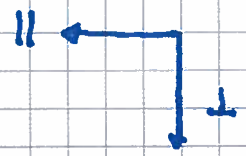
Løsning: N1 på snorbit over vinkel $d\alpha$





$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{S}(\alpha+d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$$

der $\vec{S}$ = snordrag (fra resten av snora)

$d\vec{N}$ = normalkraft fra røret

$d\vec{f}$ = friksjonskraft —"— ; minimal m når

$df = df_{max} = \mu\, dN$

Tangentielt: $S(\alpha+d\alpha)\cdot\cos\frac{d\alpha}{2} - S(\alpha)\cdot\cos\frac{d\alpha}{2} + \mu\, dN = 0$

Normalt på: $S(\alpha+d\alpha)\cdot\sin\frac{d\alpha}{2} + S(\alpha)\cdot\sin\frac{d\alpha}{2} - dN = 0$

Liten $d\alpha \Rightarrow \cos\frac{d\alpha}{2} \approx 1, \quad \sin\frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$

Dessuten: $S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) = dS, \quad S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha) = 2S$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} dS &= -\mu\, dN \\ S\, d\alpha &= dN \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dS}{S} = -\mu\, d\alpha \Rightarrow \int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\mu \int_0^{\varphi} d\alpha$$

$$\Rightarrow \underline{S(\varphi) = S(0)\, e^{-\mu\varphi}}$$

Tallverdier (plastrør, nylonsnor): $\mu \approx 0.17$

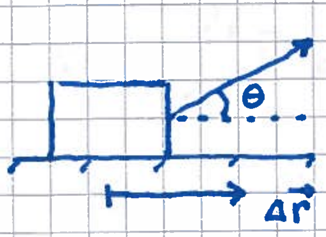
$M = 500\text{g}, \quad \varphi = 7\pi \quad \Rightarrow m = M\cdot\exp(-0.17\cdot 7\pi) = 12\text{g}$

Omvendt: Minimum kraft for å heise M opp: $S(\varphi) = S(0)\, e^{\mu\varphi}$

$\Rightarrow m = M\cdot\exp(+0.17\cdot 7\pi) \approx 21$ kg

Arbeid og energi [YF 6,7 ; LL 4]

Arbeid [YF 6.1 – 6.3 ; LL 4.1]



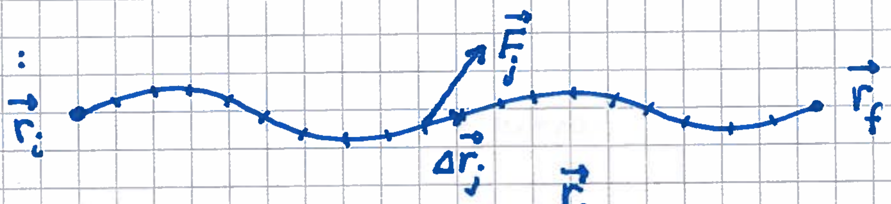
arbeid $\overset{\text{def}}{=}$ kraft × forflytning

$$\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F\cdot\Delta r\cdot\cos\theta$$

$=$ arbeid utført av ytre kraft $\vec{F}$

$$[W] = N\cdot m = J \quad \text{(joule)}$$

Generelt:



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j\cdot\Delta\vec{r}_j \overset{\Delta r_j\to 0}{=} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$=$ arbeidet utført av $\vec{F}$ ved forflytning fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_f$

Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

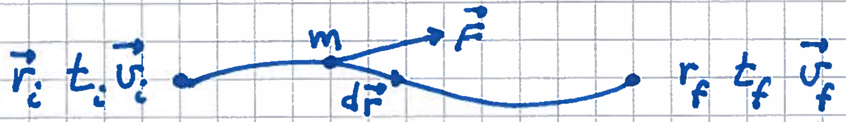
effekt $\overset{\text{def}}{=}$ arbeid (evt energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$[P] = J/s = W \quad \text{(watt)}$$

$$1\ \text{kWh} = 1\cdot 10^3\ \frac{J}{s}\cdot 3600\ s = 3.6\cdot 10^6\ J = 3.6\ MJ$$

Kinetisk energi [YF 6.2 ; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = m \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \tfrac{1}{2}(\vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \tfrac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \tfrac{1}{2} d v^2$$

$$\Rightarrow \quad W = \tfrac{1}{2} m \int_{v_i}^{v_f} dv^2 = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2} m v^2 = \text{kinetisk energi}$$

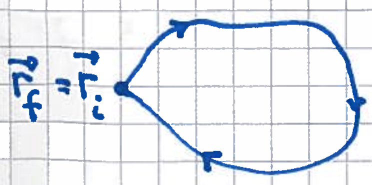
Dermed:

$$\boxed{W = K_f - K_i = \Delta K}$$

Arbeidet W utført på legemet tilsvarer endringen ΔK i legemets kinetiske energi.

Konservativ kraft [YF 7.3 ; LL 4.4]

Anta at $\vec{r}_f = \vec{r}_i$ (dvs lukket kurve).



Anta at $K_f = K_i$.

Da er $W = \Delta K = 0$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

Da er $\vec{F}$ en konservativ kraft, og W er vei-uavhengig:

$$0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(\int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r}\right)_1 + \left(\int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r}\right)_2 = W_1 - W_2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{W_1 = W_2}$$

Potensiell energi [YF 7.1–7.4 ; LL 4.3–4.4]

Definisjon:

$$\boxed{U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}} \qquad (\text{konservativ } \vec{F})$$

= pot. energi i posisjon $\vec{r}$, der vi har valgt $U(\vec{r}_0) = 0$.

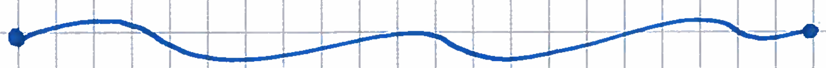
Dvs: Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

[Kommentar: Fra Matte 2

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \Leftrightarrow \nabla\times\vec{F} = 0 \; ; \quad U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{r} \Leftrightarrow \vec{F} = -\nabla U \;]$$

Bevarelse av mekanisk energi [YF 7.1–7.3 ; LL 4.5]

La oss "regne ut" ΔU og ΔK i et konservativt system:

$U_1 \; K_1 \; \vec{r}_1$  $\vec{r}_2 \; U_2 \; K_2$

Fra før: $\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$$U_2 - U_1 = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \left[-\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}\right] = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -W$$

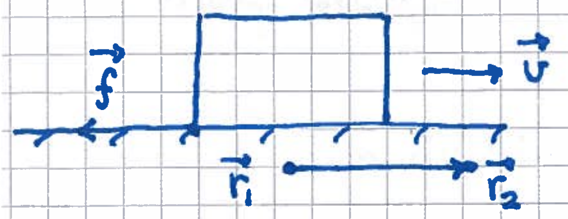
$$\Rightarrow \quad K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Dvs: $\boxed{\text{I kons. system er total mekanisk energi } E = K + U \text{ bevart}}$

Kons. krefter: Tyngdekraft, Coulombkraft

Ikke-kons. kraft: Friksjon

Friksjonsarbeid [YF 7.3 ; LL 4.5]

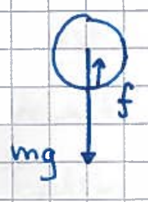


$$W_f = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec f \cdot d\vec r < 0$$ fordi $\vec f$ alltid er rettet mot $d\vec r$

$\Rightarrow$ Mek. energi "tapes" som varme, lyd osv.

$$\vec f \cdot d\vec r < 0 \quad \Rightarrow \quad \oint \vec f \cdot d\vec r < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec f$$ er ikke konservativ

Eks: Terminalhastighet for bordtennisball ($m = 2.7\,g$, $r = 20$ mm)



Anta at ballen slippes med null starthastighet. I starten er $f \ll mg \Rightarrow$ mek. energi $E = K + U$ er bevart

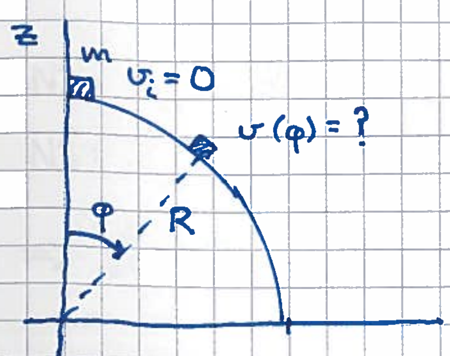
$\Rightarrow$ hastighet etter å ha falt høyde h:

$$v = \left\{ \div \frac{2}{m} \cdot \Delta U \right\}^{1/2} = \sqrt{2gh} \quad \text{da} \quad \Delta U = \div mg \cdot h$$

Når $v \gtrsim 1.5$ m/s, er luftmotstanden $f = (\frac{1}{2} \rho A C_d) v^2$, med $\rho \approx 1.2$ kg/m^3, $A = \pi \cdot (0.020\,m)^2$ og $C_d \approx 0.5$. Terminalhastighet, v_t, oppnådd når $\Sigma \vec F = 0$, dvs $f = mg$, dvs

$$v_t = \{2mg / \rho A C_d\}^{1/2} = \{2 \cdot 0.0027 \cdot 9.81 / 1.2 \cdot \pi \cdot 0.020^2 \cdot 0.5\}^{1/2} \approx \underline{8.4 \text{ m/s}}$$

Eks: Vertikal sirkelbane



Anta null friksjon; velg $U = 0$ ved $z = 0$.

$E = mgR$

$$\frac{1}{2} m v(\varphi)^2 + mg z(\varphi) = mgR \quad ; \quad z(\varphi) = R\cos\varphi$$

$$\underline{v(\varphi) = \sqrt{2gR(1 - \cos\varphi)}}$$

Impuls [YF 8 ; LL 5]

= bevegelsesmengde = linear momentum

N2: $\vec{F} = m\, d\vec{v}/dt = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ når $m = $ konst.

Impuls $\stackrel{\text{def}}{=}$ masse × hastighet

$\vec{p} = m\vec{v}$; $[p] = $ kg m/s

$$\boxed{\text{Dersom } \Sigma \vec{F}_{\text{ytre}} = 0, \text{ er legemets (systemets) impuls bevart}}$$

Kollisjoner (Støt) [YF 8.3, 8.4 ; LL 5.3]

Elastisk støt dersom mekanisk energi er bevart ($\Delta K = 0$)

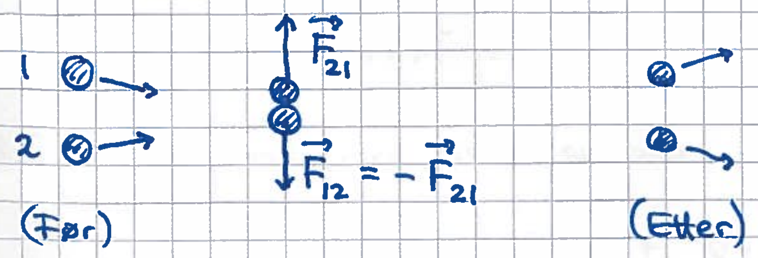
Uelastisk ——— " ——— ikke bevart ($\Delta K < 0$)

Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen etter kollisjonen med felles hastighet. Gir maksimal $|\Delta K|$.

Har typisk kortvarige kollisjoner $\Rightarrow \Delta U \approx 0$ i kollisjonen

Tapt kin. energi $\longrightarrow$ deformasjon, lyd, varme

Indre krefter endrer ikke systemets totale impuls:



N2: $\vec{F}_{21} = d\vec{p}_1/dt$, $\vec{F}_{12} = d\vec{p}_2/dt$

N3: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = -d\vec{p}_1/dt$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}\{\vec{p}_1 + \vec{p}_2\} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = $ konstant

Sentralt støt [YF 8.2–8.4 ; LL 5.3]

(= kollisjon i én dimensjon)

$\longrightarrow +$

Før: $\quad m \bullet\!\!\longrightarrow v \qquad\qquad V \longleftarrow\!\!\bullet M$

Etter: $\quad v' \longleftarrow\!\!\bullet m \qquad\qquad M \bullet\!\!\longrightarrow V'$

[⇒ V og v' negative i figuren]

Ingen ytre krefter (evt. neglisjerbare i den kortvarige kollisjonen)

$$\Rightarrow \Delta p = 0 \quad \Rightarrow \quad mv + MV = mv' + MV'$$

(a) Fullstendig uelastisk: $\quad v' = V' = \dfrac{mv + MV}{m+M}$

(b) Delvis uelastiske: En ligning, to ukjente ⇒ Må ha en opplysning ekstra

(c) Elastisk kollisjon: $\quad \Delta K = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$

Skriver om ligningene for impulsbevarelse ($\Delta p = 0$) og energibevarelse ($\Delta K = 0$):

$$m(v - v') = M(V' - V) \qquad (1)$$

$$m(v - v')(v + v') = M(V' - V)(V' + V) \qquad (2)$$

Dividerer (2) med (1):

$$v + v' = V' + V \qquad (3)$$

Mult. (3) med M og trekk fra (1); dette fjerner V'; løser mhp v':

$$v' = \frac{M}{m+M}\left\{ 2V + v \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$

Ombytte av alle små med store symboler må gi samme løsning. Dermed:

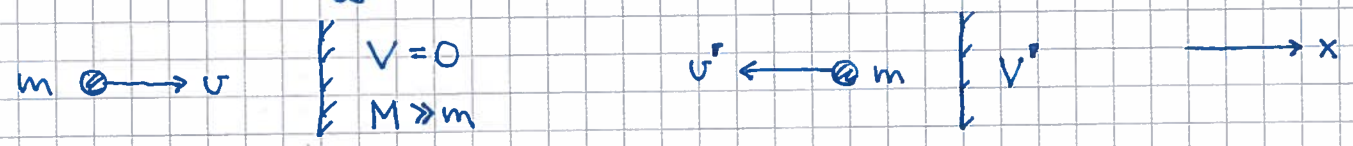
$$V' = \frac{m}{M+m}\left\{ 2v + V \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

Eks: To like tunge legemer, $m = M$.

Ser uten videre at $v' = V$ og $V' = v$,

dvs "bytter hastighet"! Kjent fra leketøy: 

Eks: Ball mot vegg (elastisk)



$$v' = \frac{M}{m+M}\cdot\left\{0 + v\cdot\frac{m-M}{M}\right\} \approx \frac{M}{M}\cdot v\cdot\left(\frac{-M}{M}\right) = -v$$

$$V' = \frac{m}{M+m}\cdot\left\{2v + 0\right\} \approx \frac{m}{M}\cdot 2v \approx 0$$

OK!

Vi sjekker impuls- og energibevarelse:

$$p = mv, \quad P = MV = 0$$

$$p' = mv' = -mv, \quad P' = MV' \approx M\cdot\frac{m}{M}\cdot 2v = 2mv$$

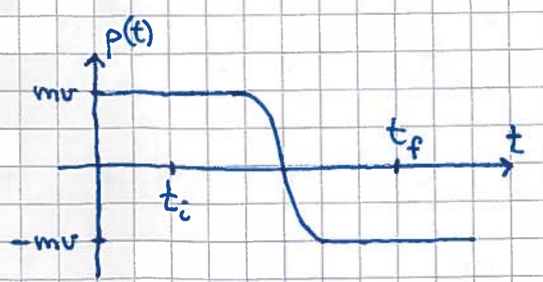
$$\Rightarrow \; p_{før} = mv \; ; \; p_{etter} = -mv + 2mv = mv \; \Rightarrow \; \Delta p = 0, \; \text{ok!}$$

$$K_m = \frac{1}{2}mv^2, \quad K_M = \frac{1}{2}MV^2 = 0$$

$$K_m' = \frac{1}{2}mv^2, \quad K_M' = \frac{1}{2}MV'^2 = \frac{1}{2}M\cdot\left(\frac{2mv}{M}\right)^2 = 2mv\cdot\frac{m}{M} \approx 0$$

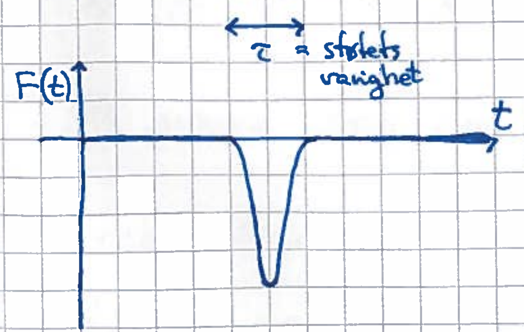
$$\Rightarrow K_{før} = K_{etter} = \frac{1}{2}mv^2 \; ; \; \Delta K = 0, \; \text{ok!}$$

Ballens impulsendring Δp_{ball} skyldes kraft $F(t)$ fra veggen:



$$\Delta\vec{p}_{ball} = -2mv\,\hat{x}$$

$$\text{N2:} \quad \vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}_{ball}}{dt}$$



$$\Delta\vec{p}_{ball} = \int d\vec{p}_{ball} = \int_{t_i}^{t_f}\vec{F}(t)\,dt$$

Her er $\tau \sim 2$ ms og $\Delta v \sim 50$ m/s

(bordtennis) $\Rightarrow \langle a \rangle \sim 25$ km/s $\gg g$

$\Rightarrow$ Kan neglisjere tyngden mg i støtet!

Rakettprinsipp [YF 8.6 ; LL 5.4]

Mått i <u>fast</u> referansesystem :

v = rakettens fart ; v_e = eksosens fart ($v_e < 0$ i figuren)

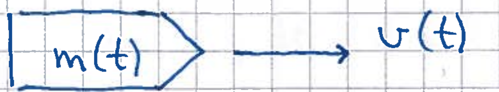
$\Rightarrow$ $u = v_e - v$ = eksosens fart relativt raketten ; antas konstant

$(u < 0, \quad v > 0)$

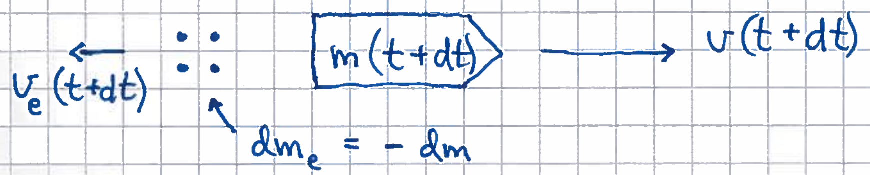
Drivstoff-forbruk pr tidsenhet : $\frac{dm}{dt} < 0$

Anta i første omgang $F_{ytre} = 0$ ("outer space") $\Rightarrow \frac{dp}{dt} = 0$

Beregner rakettens fartsøkning mellom t og $t + dt$:



$p(t) = m(t)\, v(t)$



$$p(t+dt) = m(t+dt)\, v(t+dt) + dm_e \cdot v_e(t+dt)$$

$$= [m(t) + dm] \cdot [v(t) + dv] - dm \cdot [u + v(t) + dv]$$

$$= m(t)\, v(t) + m\, dv - u\, dm$$

$$\Rightarrow \quad m\, dv = u\, dm$$

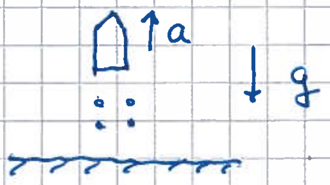
$$\Rightarrow \quad m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}$$

På samme form som N2, $m \cdot a = F_{skyv}$,

med skyvkraft ("rekyl") $F_{skyv} = u \cdot \dot{m} > 0$

(siden både $u < 0$ og $\dot{m} < 0$)

Eneste endring i tyngdefeltet er at $F_{ytre} = -mg$ kommer i tillegg:



N2 for ("rest"-) raketten blir

$$F = ma$$

med total kraft

$$F = F_{ytre} + F_{skyv} = -mg + u\dot{m}$$

Øving: $-mg + u\, dm/dt = m\, dv/dt$

$$\Rightarrow \quad -g\, dt + u\, dm/m = dv$$

som enkelt kan integreres!

Til nå: Punktmasser; ren translasjon av stive legemer

Neste ca 3 uker: Partikkelsystemer.

Stive legemer.

Rotasjon.