

ELEKTRISITET OG MAGNETISME

Oversikt:

I. Elektrostatikk. Ledere, isolatorer

YF 21-24 ; LHL 19-20

II. Strøm. Likestrømkretser (DC)

YF 25-26 ; LHL 21-22

III. Magnetostatikk. Magnetisme

YF 27-28 ; LHL 23, 26

IV. Elektromagnetisk induksjon.

Vekselstrømkretser (AC)

YF 29-31 ; LHL 24, 25, 27

I. Elektrostatiske [YF 21-24; LHL 19-20]

Elektrisk ladning [YF 21.1; LHL 19.1]

Materie er molekyler og atomer.

Atom = kjerne + elektroner

Kjerne = protoner + nøytroner = kjernepartikler

Kjernepartikkel = 3 kvarker

Elementærpartikler = naturens udeklige byggeklosser, med kvantisert elektrisk ladning (evt. elektrisk nøytrale). Eksempler:

<u>Partikkel</u>	<u>(Symbol)</u>	<u>Ladning</u>
Elektron	(e)	$-e$
Opp-kvark	(u)	$+2e/3$
Ned-kvark	(d)	$-e/3$
Elektron-nøytrino	(ν_e)	0
Foton	(γ)	0

OSU.

(17 elementærpartikler i "Standardmodellen")

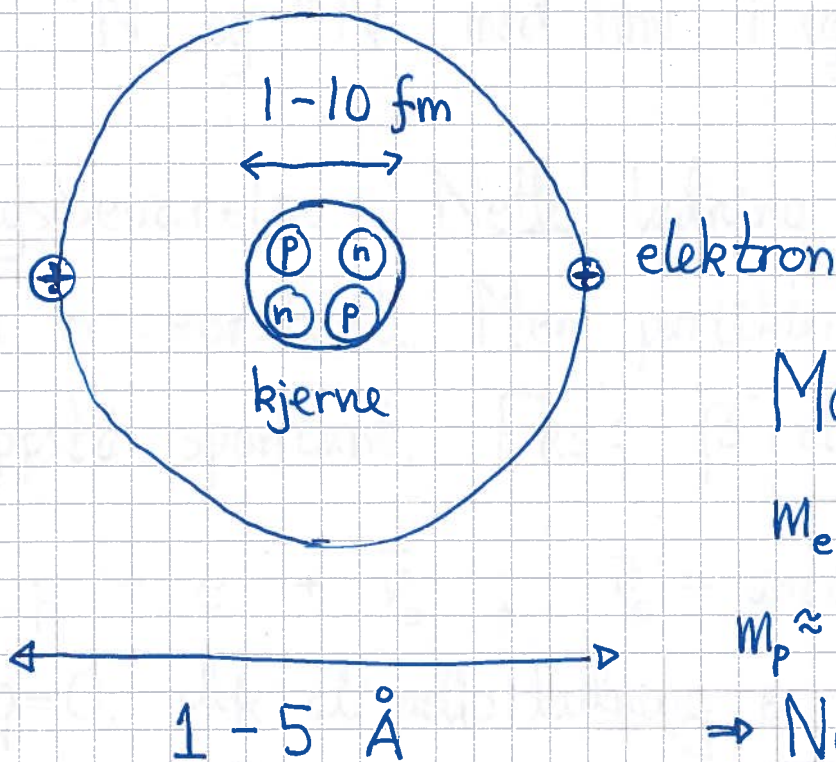
e = elementærladningen, påvist av
Robert Millikan (1909; Nobelpris 1923)
med små oljedråper, med ladning $q = N \cdot e$
($N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Nøytronet (n) : $1u + 2d \Rightarrow q_n = 0$

Protonet (p) : $2u + 1d \Rightarrow q_p = e$

Symbol for ladning : q, Q

Klassisk bilde av atom : (Niels Bohr, 1913)
NP1922



Masser :

$$m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p \approx m_n \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$\Rightarrow$ Nesten all masse
i kjernen.

$$1 \text{ Å (ångström)} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} \quad (f = \text{femto})$$

Nøytralt atom, atomnummer Z :

(100)

Z protoner, Z elektroner; $Q = Ze - Ze = 0$

Ioner: Atomer eller molekyler med $Q \neq 0$

Eks: N^{3-} = nitrogenatom med 10 elektroner;

$$Z = 7; q = -3e$$

N_2^+ = nitrogenmolekyl med 13 elektroner;

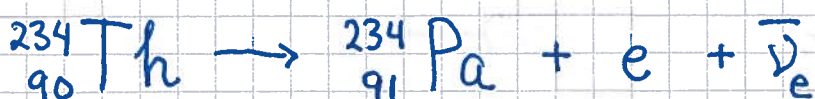
$$q = +e$$

Isotoper: Varianter av grunnstoff med ulikt antall nøytroner i kjernen.

Eks: ^{14}N og ^{15}N med hhv 7 og 8 nøytroner

Ladningsbevarelse: Netto ladning i et isolert system er konstant. Men partikler med ladning kan oppstå spontant. Eks: β^- decay.

$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$; $\bar{\nu}_e$ = antielektronnøytrino med $q=0$, slik at netto ladning er uendret. Eks:

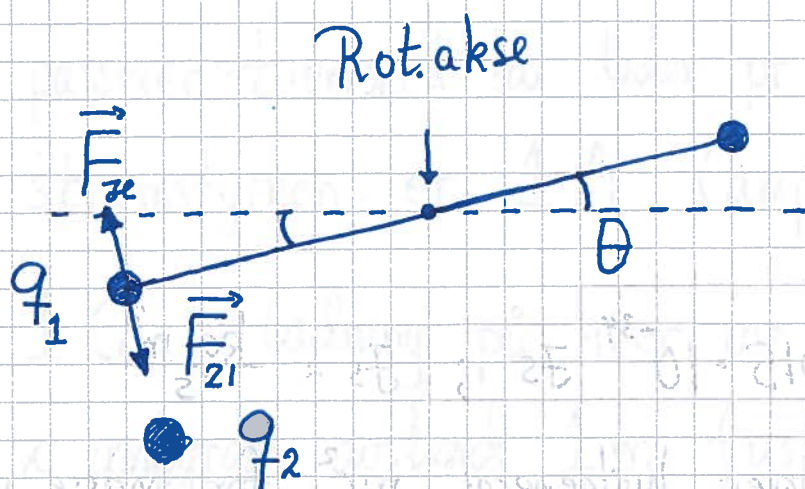


(Halveringstid $t_{1/2} \approx 24$ døgn)

Coulombs lov [YF 21.3; LHL 19.3]

(101)

C. A. de Coulomb, exp. ca 1785:



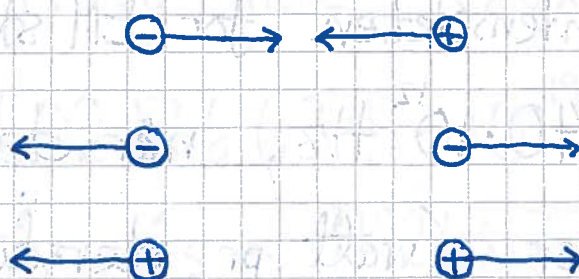
Torsjonsspendel,
sett ovenfra
(se s. 96)

$$F_x = \frac{\tau}{L/2} = \frac{2\pi\theta}{L}$$

Coulomb fant $F_{21} \sim q_1 \cdot q_2 / r_{12}^2$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{21} = K_e \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}}$$

- Samme form som Newtons gravitasjonslov
- Oppfyller Newtons 3.lov; $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
- Tiltrekning mellom ulike typer ladning;
frastøtning mellom samme type ladning:



Enhet for ladning [YF 21.3 ; LHL 19.1] (102)

- $1 \text{ C (coulomb)} = 1 \text{ A} \cdot \text{s} =$ mengde ladning som passerer tverrsnitt av leder pr sekund når strømstyrken er 1 A (ampere)
- $1 \text{ C} =$ ladning på hver av to like legemer som, i innbyrdes avstand 1 m , frastøter hverandre med kraft $8.987551787 \dots \cdot 10^9 \text{ N}$. Dermed:

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2, \quad \text{med}$$

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \dots \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

= vakuumpermittiviteten

- $e = 1.602176621 \dots \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 $\approx 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

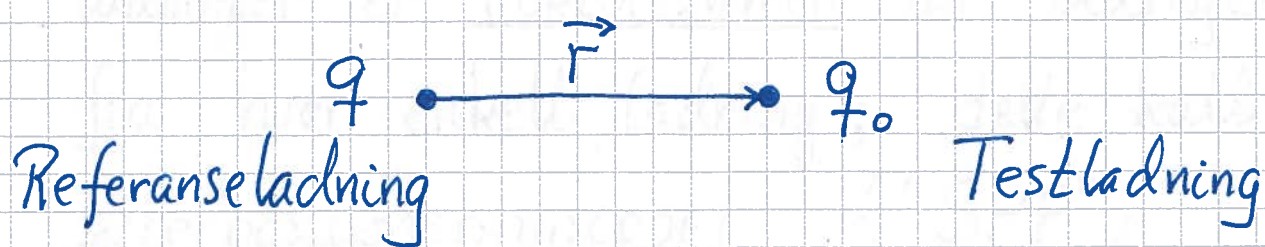
- Etter redefinisjon av SI-grunnenhetene kg, A, K og mol (2018-2019):

$$e \equiv 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$\Rightarrow 1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$; $1 \text{ s} = 9192631770$ perioder av stråling pga overgang mellom "hyperfinsplittede" nivåer i ^{133}Cs

Elektrisk felt [YF 21.3-5 ; LHL 19.3-5]

(103)



Kraft fra q på q_0 :

$$\vec{F} = \frac{q q_0}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

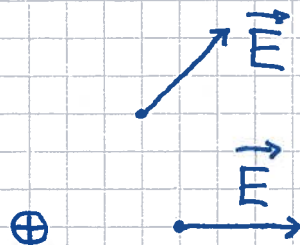
Elektrisk felt $\stackrel{\text{def}}{=}$ El. kraft pr ladningsenhet

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{F} / q_0 \quad ; \quad [E] = \text{N/C}}$$

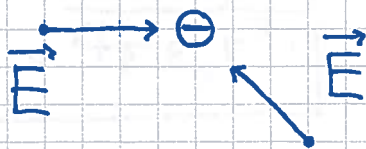
En punktladning q "omgir seg" derfor med et el. felt $\vec{E}$, som i avstand $\vec{r}$ er

$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \hat{r}}$$

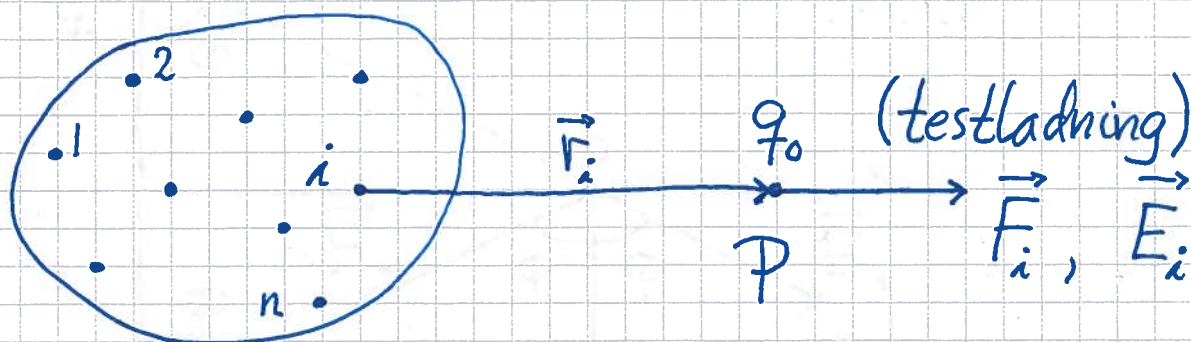
Radielt bort fra pos. ladh.:



Radielt inn mot neg. ladh.:



Total kraft og totalt felt fra flere
ladninger er vektorsummen av bidragene
fra hver enkelt ladning; dette kalles
superposisjonsprinsippet ("SPP").



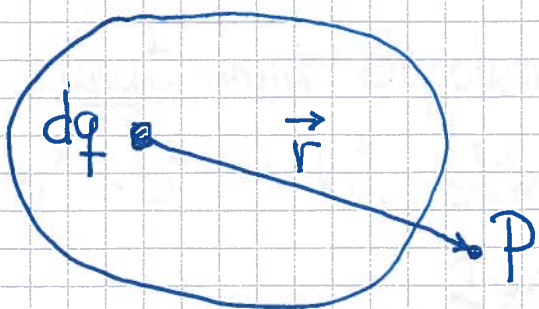
Ref. ladninger
 $\{q_1, q_2, \dots, q_n\}$

$$\vec{E} = \vec{F} / q_0 = \sum_{i=1}^n \frac{q_i q_0 \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2 q_0} = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} = \sum_i \vec{E}_i$$

= el. felt i posisjon P fra ref. ladm. $\{q_1, \dots, q_n\}$

Hvis kontinuerlig fordeling av ref. ladm.:

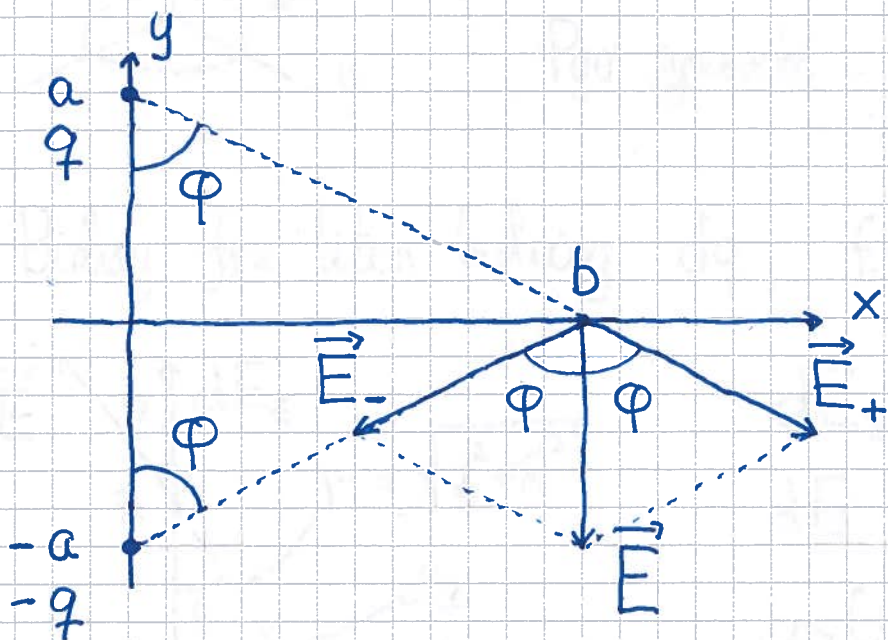
$$q_i \rightarrow dq ; \quad \sum_i \rightarrow \int$$



El. felt i pos. P :

$$\vec{E} = \int \frac{\hat{r} dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Eks 1: Elektrisk dipol

Punktladn. $\pm q$ i $y = \pm a$.Hva er $\vec{E}$ i $x = b$ (på x-aksen)?

Figur/symmetribetraktning gir

$$\vec{E} = -\hat{y} E; \quad E = 2E_+ \cos \varphi \quad (E_- = E_+)$$

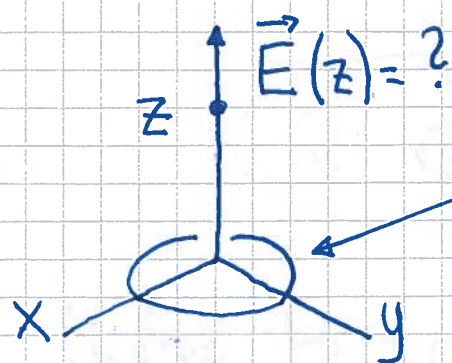
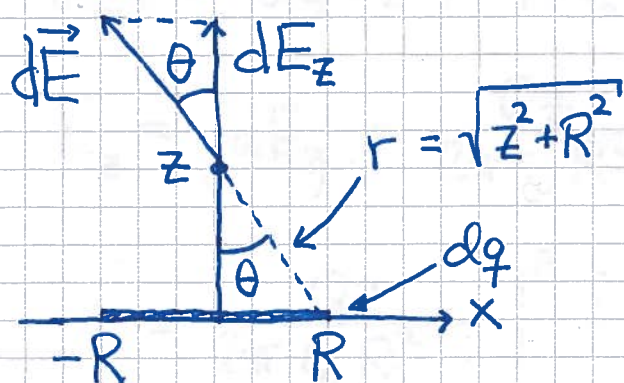
$$E_+ = q / 4\pi\epsilon_0 (a^2 + b^2); \quad \cos \varphi = a / \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E} = -\hat{y} \cdot 2qa / (a^2 + b^2)^{3/2} 4\pi\epsilon_0}$$

Langt unna dipolen, dvs $b \gg a$, kan vi sette $a^2 + b^2 \approx b^2$, slik at

$$E(b) \approx \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 b^3}; \quad \text{dvs } E \text{ går raskere mot null enn for en punktladn.}$$

Eks 2: Jevnt ladet ring

Radius R , ladning Q Pga symmetri: $\vec{E}(z) = E_z(z) \hat{z}$ Bidrag fra liten ladning dq , f.eks. på x-aksen:

$$dE_z = dE \cdot \cos \theta$$

$$dE = dq / 4\pi\epsilon_0 r^2$$

$$\cos \theta = z/r$$

$$\Rightarrow E_z(z) = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dq = \underline{\underline{\frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}}}}$$

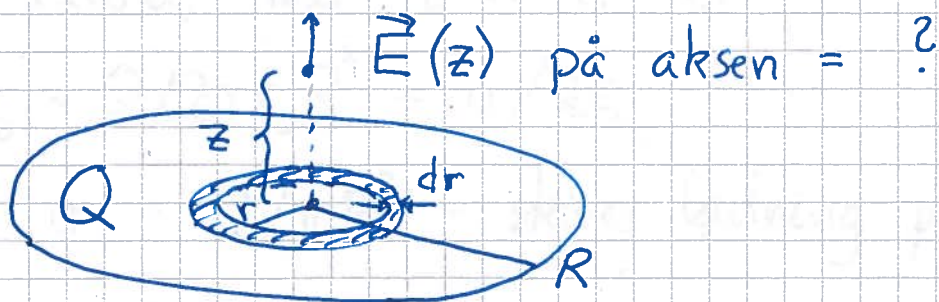
Rimelig svar: Riktig enhet; $E_z(0) = 0$; $E_z(-z) = -E_z(z)$; dessuten er

$$E_z(z) \approx Q / 4\pi\epsilon_0 z^2 \text{ når } z \gg R$$

OK; ringen ser da ut som punktladning Q i origo!

Eks 3: Jeunt ladet skive

(107)



Bidrag fra tynn ring, radius r , bredde dr , ladning

$$dq = Q \cdot dA/A = Q \cdot 2\pi r dr / \pi R^2 \text{ er}$$

$$dE_z = dq \cdot z / 4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}, \text{ slik at}$$

$$E_z = \int dE_z = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[- (r^2 + z^2)^{-1/2} \right]_0^R$$

$$= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right\}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/z^2}} \right\}$$

Rimelig svar: Langt unna skiva er $z \gg R$

$$\Rightarrow (1 + R^2/z^2)^{-1/2} \approx 1 - R^2/2z^2$$

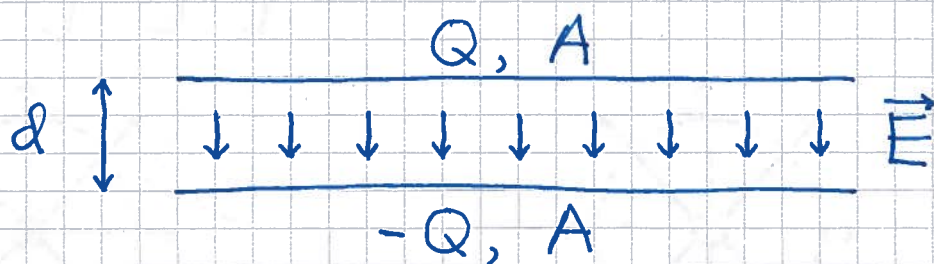
$$\Rightarrow E_z \approx Q / 4\pi\epsilon_0 z^2, \text{ som er feltet i avstand } z \text{ fra punktladning } Q \text{ i origo.}$$

Nær skiva, når $z \ll R$, er

$$E_z \approx Q / 2\pi\epsilon_0 R^2 = \sigma / 2\epsilon_0$$

med $\sigma = Q / \pi R^2$ = skivas ladning pr flateenhet.

Nyttig resultat: En mye brukt krets-komponent er parallellplatekondensatoren, som er to parallelle metallplater som kan tilføres like stor ladning med motsatt fortegn, $\pm Q$ (med f.eks. et batteri):



Med liten plateavstand d blir

$$E \approx 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\sigma = Q/A)$$

mellom platene, mens

$$E \approx 0$$

utenfor platene.

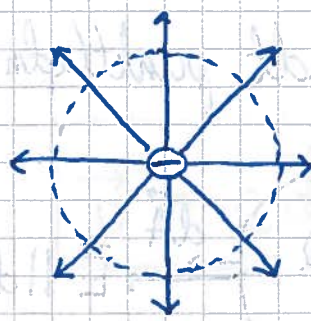
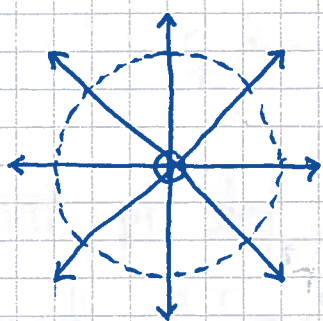
Feltlinjer for $\vec{E}$ [YF 21.6; LHL 19.6] (109)

Visuelt bilde av $\vec{E}$ i området omkring ladningen (e). Retning: $\vec{E} \parallel$ feltlinjene.

Feltstyrke: $E = |\vec{E}|$ er prop. med antall feltlinjer som krysser en flate, pr flateenhet.

Eks 1: Punktladning

Feltlinjene starter/slutter på positiv/negativ ladning og går radielt utover/innover.



Anta N feltlinjer ut/inn gjennom kuleflate med radius r , areal $4\pi r^2$.

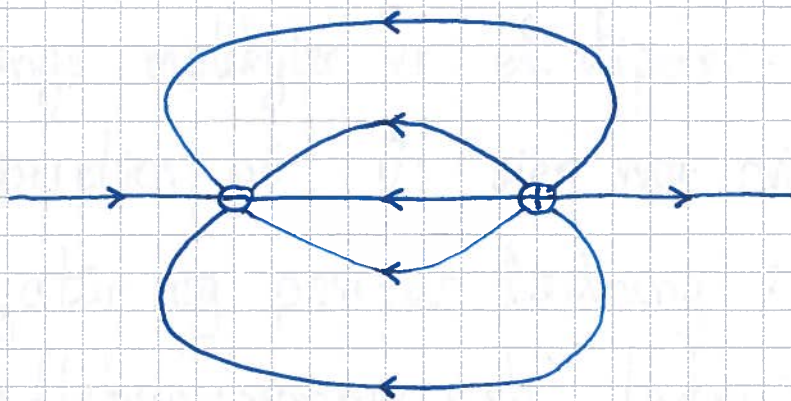
Feltlinjetetthet på kuleflaten: $\frac{N}{A} = \frac{N}{4\pi r^2}$

Feltstyrke ———— : $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$

$\Rightarrow E$ og N/A avtar begge som $1/r^2$

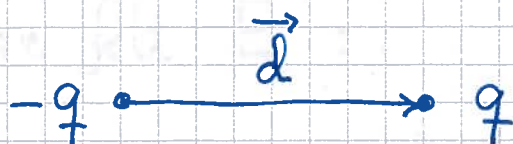
$\Rightarrow E$ er prop. med N/A , som antatt

Eks 2: Elektrisk dipol



Elektrisk dipolmoment [YF 21.7 ; LHL 19.10]

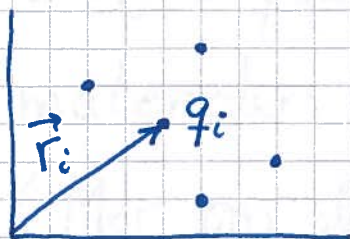
En enkel dipol,



har pr def dipolmoment
med SI-enhet C·m.

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

Generelt, for system med flere punktladninger:



$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

Med kontinuert ladningsfordeling:

$$\vec{p} = \int \vec{r} \cdot dq$$

NB: Netto ladning = 0 for elektrisk dipol!

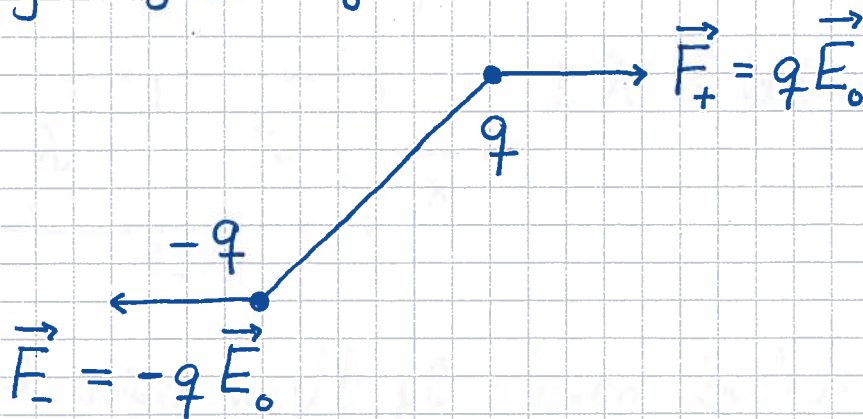
Anvendelser:

(111)

- Mange molekyler er el. dipoler: H_2O , NH_3 etc.
Størrelsen på $|\vec{p}|$ sier noe om fordelingen av negativ og positiv ladning i molekylet.
"Refleksjonssymmetrisk" ladningsfordeling mhp et punkt i molekylet gir $p=0$.

Eks: CO_2 ; $\text{O}=\text{C}=\text{O}$

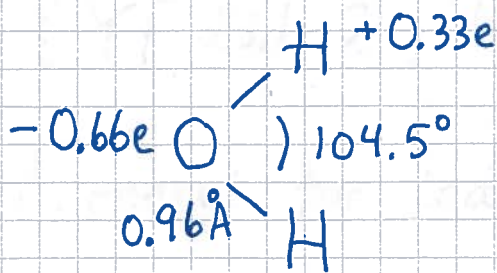
- Molekylære dipoler rettes inn langs et ytre felt $\vec{E}_0$:



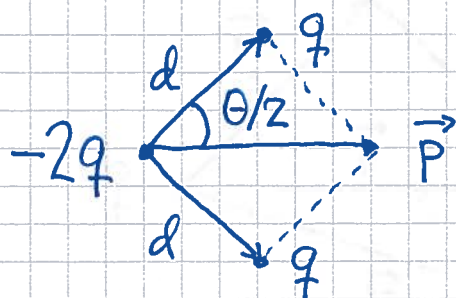
Stoffet polariseres. Viktig for å skjønne materialers elektriske egenskaper.
(Mer om det senere.)

Eks 1: Punktladningsmodell for H_2O

(112)



$$\vec{p} = ?$$



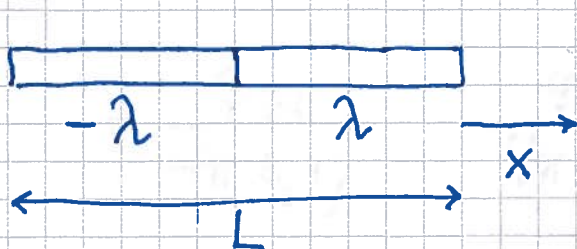
Med $-2q$ i origo:

$$p = 2 q d \cos \theta/2$$

$$= 2 \cdot 0.33e \cdot 0.96 \text{ Å} \cdot \cos 52.25^\circ$$

$$= \underline{\underline{0.39 e \text{ Å} = 6.2 \cdot 10^{-30} \text{ C m}}}$$

Eks 2: Stavedipol



$\pm \lambda = \text{ladning pr lengdeenhet}$

Med origo midt på staven bidrar ladningsparet

$\pm dq = \pm \lambda \cdot dx$ i posisjon $\pm x$ med

dipolmoment $d\vec{p} = 2x \lambda dx \hat{x}$. Totalt dipolmoment blir

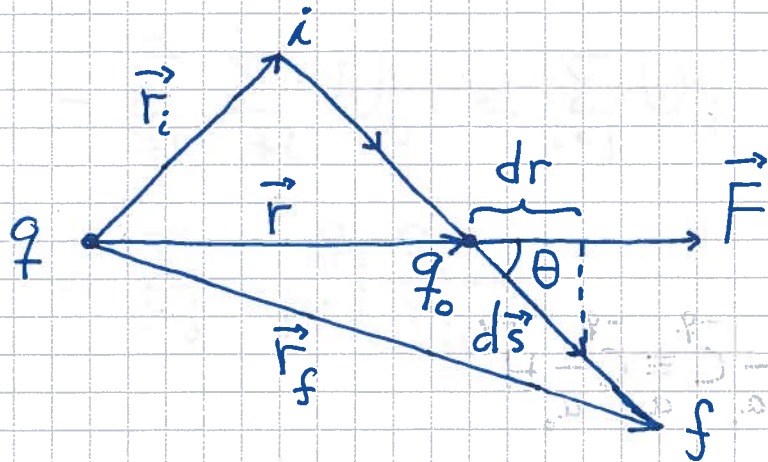
$$\vec{p} = \int d\vec{p} = \int_0^{L/2} 2x \lambda dx \hat{x} = 2\lambda \hat{x} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^{L/2} = \underline{\underline{\frac{1}{4} \lambda L^2 \hat{x}}}$$

[Rimelig? $[\lambda L^2] = \text{C} \cdot \text{m}$; som punktladn. $\pm \lambda \cdot L/2$ i innbyrdes avstand $L/2$; OK!]

Potensiell energi. Elektrisk potensial

[YF 23.1-2 ; LHL 19.9, 20.3]

Pot. energi for ladningspar q og q_0 :



$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot d\vec{s} &= F \cdot ds \cdot \cos \theta \\ &= F \cdot dr\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_f - U_i \stackrel{\text{def}}{=} - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{r_i}^{r_f} \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_f} - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_i}\end{aligned}$$

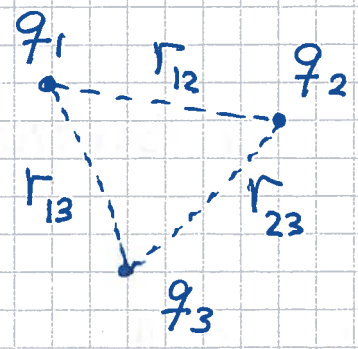
Her naturlig å velge $U=0$ for $r \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow \boxed{U(r) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}}$$

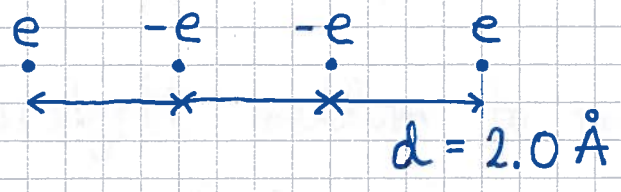
for ladn. par q, q_0 i innbyrdes
avstand r

Flere ladninger : Alle q_i og q_j
vekselvirker parvis ; med $U_{ij}=0$ for $r_{ij} \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} U &= U_{12} + U_{13} + \dots + U_{23} + \dots \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} U_{ij} \equiv \sum_{i < j} U_{ij} \\ &= \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}} \end{aligned}$$



Eks : Beregn U for systemet



Løsn : 6 ladn.par bidrar

$$\begin{aligned} U &= \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 d} \left\{ 2 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{(-1)}{2} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{3} \right\} \\ &= \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 d} \cdot \left(-\frac{5}{3} \right) \\ &\approx -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{3 \cdot 2.0 \cdot 10^{-10}} \text{ J} = \underline{\underline{-1.9 \cdot 10^{-18} \text{ J}}} \end{aligned}$$

[Ser at 1 J er en stor energi på atomært nivå...!]

Elektrisk potensial def pot.energi pr ladningsenhet (1/5)

$$\Rightarrow V = \frac{U}{q_0} ; [V] = \text{J/C} = \text{V (volt)}$$

For ladn. par q, q_0 i innbyrdes avstand r
er $U = qq_0 / 4\pi\epsilon_0 r$.

En punktladning q omgir seg derfor med potensialet

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Coulombpotensialet

Potensialforskjell mellom to posisjoner f og i :

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_i^f \frac{\vec{E}}{q_0} \cdot d\vec{s} = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

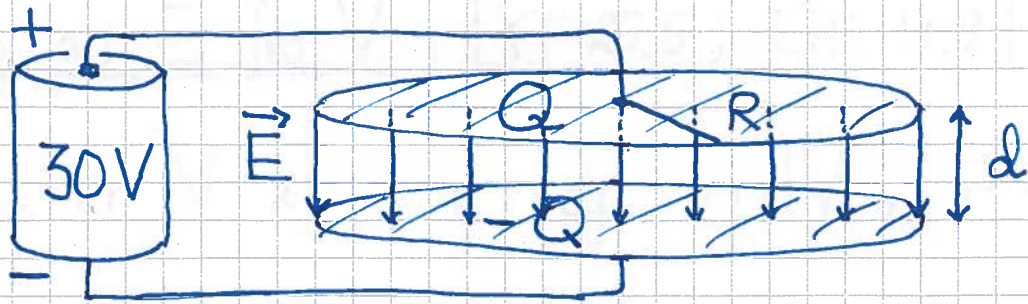
dvs

$$V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- Ser da at $[E] = \text{V/m}$ (mer brukt enn N/C)
- Energienheten eV (elektronvolt) = elementærladningen e ganget med 1 V , dvs $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ J/C}$
 $= 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Hensiktsmessig med eV på atomær skala.

Eks:

(116)



Plattekondensator, $d = 2.0 \text{ mm}$, $R = 10 \text{ cm}$, $\Delta V = 30 \text{ V}$.

Finn ladningen $\pm Q$ på metallplatene

Løsn: Fra s. 108 er $E = \sigma / \epsilon_0 = Q / A \epsilon_0$ mellom platene ($E = 0$ utenfor).

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_+^- E \cdot ds = E \cdot d$$

$$= Q \cdot d / A \epsilon_0$$

$$\Rightarrow Q = \Delta V \cdot A \epsilon_0 / d = 30 \text{ V} \cdot \pi \cdot (0.10 \text{ m})^2 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} / 2.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$= 4.2 \cdot 10^{-9} \text{ C} = \underline{\underline{4.2 \text{ nC}}}$$

$$(\text{V} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{C}} \cdot \text{m}^2 \cdot \frac{\text{C}^2}{\text{J} \cdot \text{m}} \cdot \frac{1}{\text{m}} = \text{C} ; \text{OK})$$

Siden $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$, peker $\vec{E}$ i retning lavere potensial. Vet fra før at $\vec{E}$ går fra $+Q$ mot $-Q$. Følgelig høyere potensial på plate med pos. ladh. enn ——— " ——— neg. ———

Beregning av $\vec{E}$ fra V [YF 23.5; LHL 19.9] (117)

Hvis pot. er V i pos. $\vec{r}$ og $V+dV$ i $\vec{r}+d\vec{s}$,

$$\begin{array}{ccc} \vec{r} & \xrightarrow{d\vec{s}} & \vec{r}+d\vec{s} \\ V & & V+dV \end{array}$$

så kan pot. endringen dV uttrykkes slik:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz \quad (\text{et "totalt differensial"}) \\ &= \left\{ \hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \right\} \cdot \left\{ \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz \right\} \\ &= \nabla V \cdot d\vec{s} \\ &\quad \text{(gradienten til } V) \quad \quad \quad \text{(veielement)} \end{aligned}$$

Samtidig er $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$.

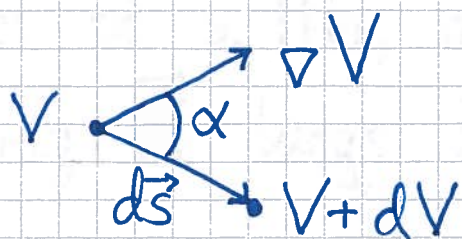
Dermed må vi ha:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

(Siden $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ og $V = U/q_0$, har vi også $\vec{F} = -\nabla U$)

Hvordan tolke vektoren ∇V ?

(1/8)



$$dV = \nabla V \cdot d\vec{s} = |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos \alpha$$

$\Rightarrow$ Vi får maksimal pot.ending dV dersom forflytningen $d\vec{s}$ er i samme retning som ∇V . (Da er $\alpha = 0$ og $\cos \alpha = 1$)

Med andre ord:

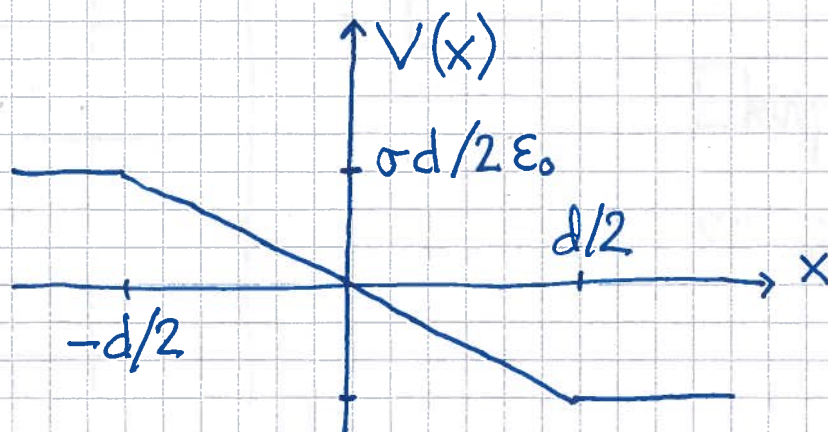
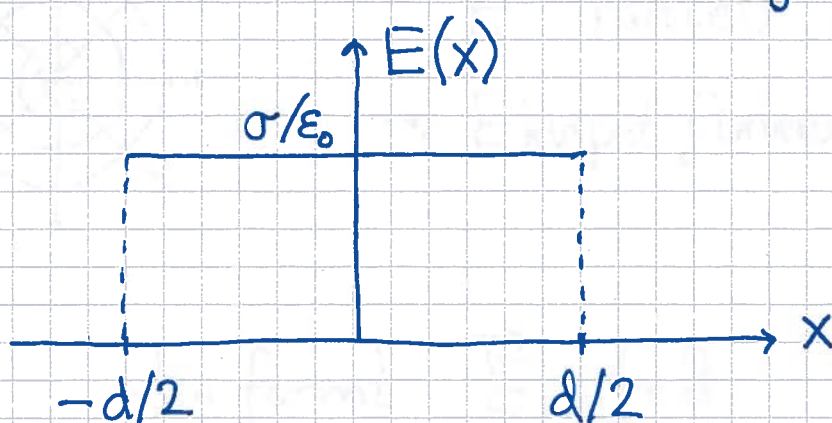
∇V er en vektor som peker i den retningen som V øker raskest, med absoluttverdi lik endringen i V pr lengdeenhet.

Og $|\nabla V|$ er lik den elektriske feltstyrken $|\vec{E}|$ på det aktuelle stedet.

(119)

Eks: Finn uttrykk for $\vec{E}(x)$ og $V(x)$ i
eks. på s. 116, og skisser $E(x)$ og $V(x)$.
Velg $\vec{E}$ langs $\hat{x}$ og $x=0$ midt mellom platene.

Løsn: Mellom platene er $|\vec{E}| = Q/A\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0$,
slik at $\vec{E} = \hat{x} \sigma/\epsilon_0$ (uavh. av x). Med
 $\vec{E} = -\nabla V = \hat{x} \sigma/\epsilon_0$ er $dV/dx = -\sigma/\epsilon_0$,
slik at $V(x) = \text{---} - \sigma x/\epsilon_0$.
Skisser: (for $|x| < d/2$)



der vi valgte $V_+ = V(-d/2) = \sigma d/2\epsilon_0$.

Ekvipotensialflater [YF 23.4; LHL 19.11]

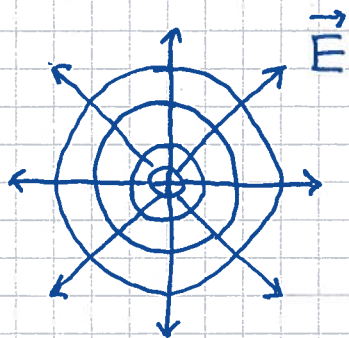
(120)

= flater med konstant potensial V

Hvis $d\vec{s}$ er forflytning på en ekvipot. flate,
er $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, dvs $\vec{E} \perp d\vec{s}$

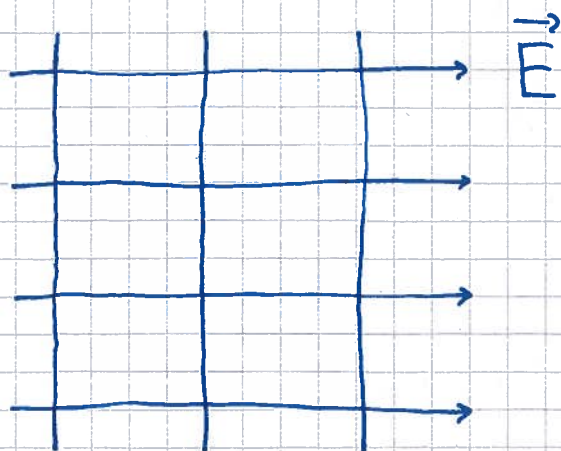
$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} \perp \text{ekvipotensialflatene}}$$

Eks 1: Punktladning



$\vec{E}$ radielt rettet
 $\Rightarrow$ Ekvipot. flatene er kuleskall

Eks 2: Uniformt $\vec{E}$ -felt



Ekvipot. flatene
er plan $\perp \vec{E}$

$V_0 \quad V_0 + \Delta V \quad V_0 + 2\Delta V$

(her med $\Delta V < 0$)

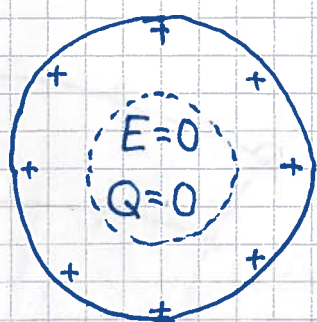
Materialers elektriske egenskaper

Ledere [YF 22.5 ; LHL 19.8]

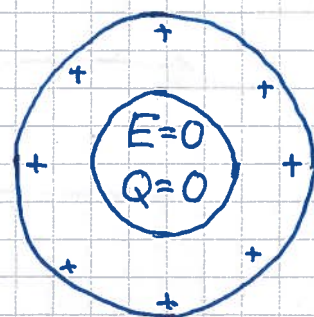
Metaller har frie elektroner (typisk 1-2 pr atom) som vil flytte seg hvis de utsettes for en nettokraft. Konsekvenser, i elektrostatisk likevekt :

- $\vec{E} = 0$ inni et metall
[$\vec{E} \neq 0$ gir kraft $\vec{F} = -e\vec{E}$ på frie elektroner ; dvs ikke likevekt]
- Netto ladning ligger på overflaten av et metall
[pga at $F(r) \sim 1/r^2$ og Gauss' lov ; ikke pensum]
- På overflaten : $\vec{E} \perp$ overflaten
[$E_{||} \neq 0$ gir kraft $F_{||} = -eE_{||}$ på frie elektroner]
 $E_{\perp} = \sigma / \epsilon_0$; σ = overflateladn. pr flateenhet

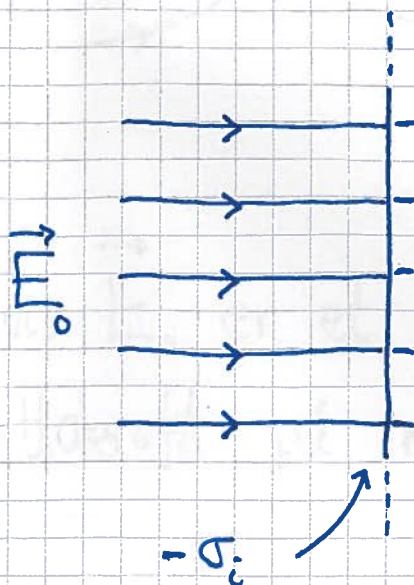
- Metallbit i likevekt er et ekvipotensial
 $[dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$; inni er $\vec{E} = 0$, på overflaten er $\vec{E} \perp d\vec{s}$]
- Metall med hulrom : $E = 0$ i hulrommet, all nettoladning på ytre overflate
 [Bevis : Ingen ladningsmessig forskjell på kompakt metallbit og metallbit med hulrom !]



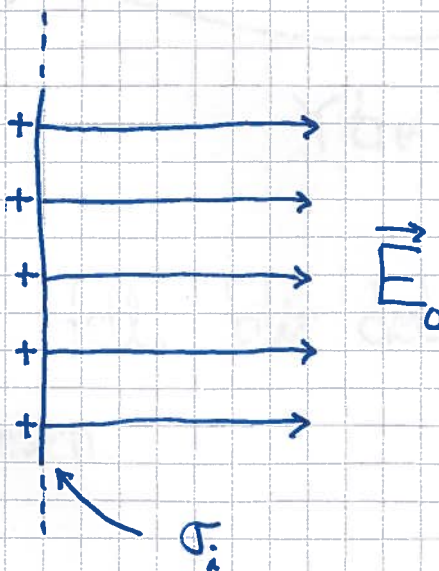
Fjerner nyutral bit inni



Eks: Metallskive i uniformt ytre felt $\vec{E}_0$.



$E = 0$



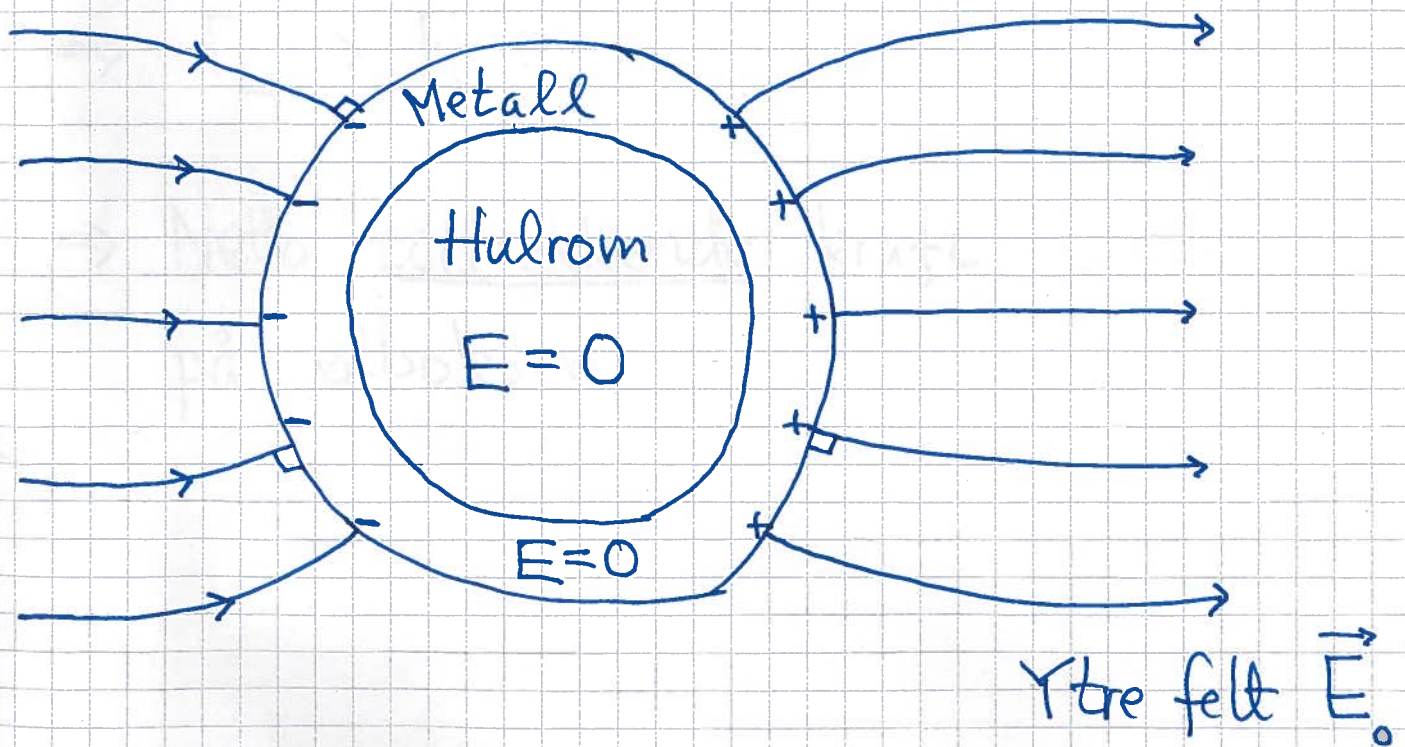
I likevekt er $E=0$ inni metallet.

Oppnås med industert overflateladning $\pm \sigma_i$,

med $\sigma_i = \epsilon_0 E_0$. Gir industert felt

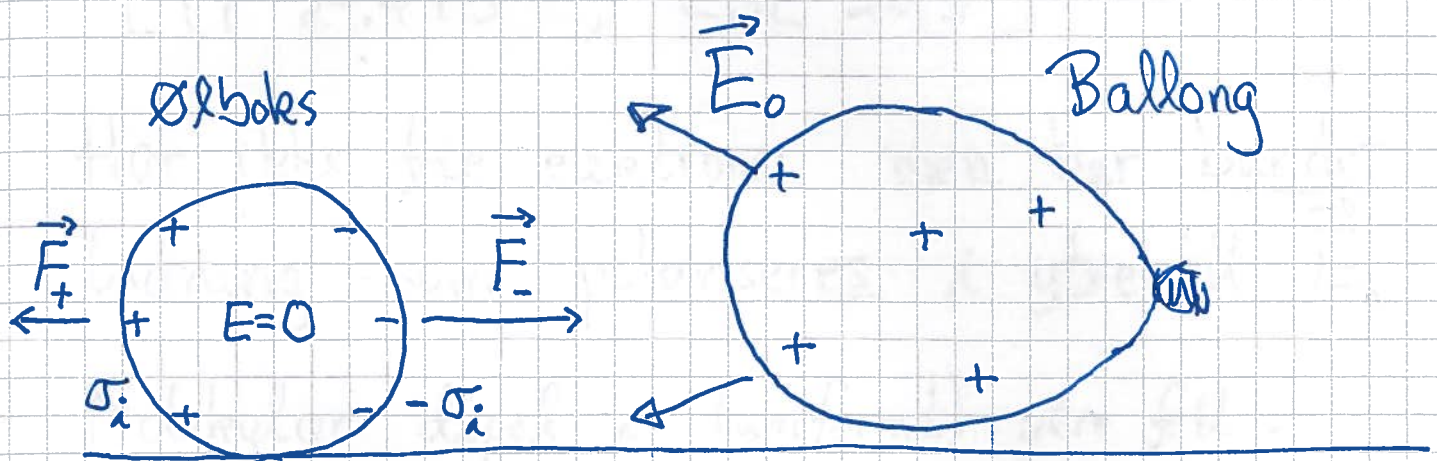
$\vec{E}_i = -\vec{E}_0$ og totalt felt $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$ inni metallet.

Eks: Faradaybur (elektrostatisk skjerming)



Hvis $\vec{E}_0$ er et uniformt felt, blir det ingen nettokraft på metallboksen.

Eks: Metallboks i inhomogent felt



Kortest avstand mellom ballong og negativ induisert ladning

$$\Rightarrow F_- > F_+$$

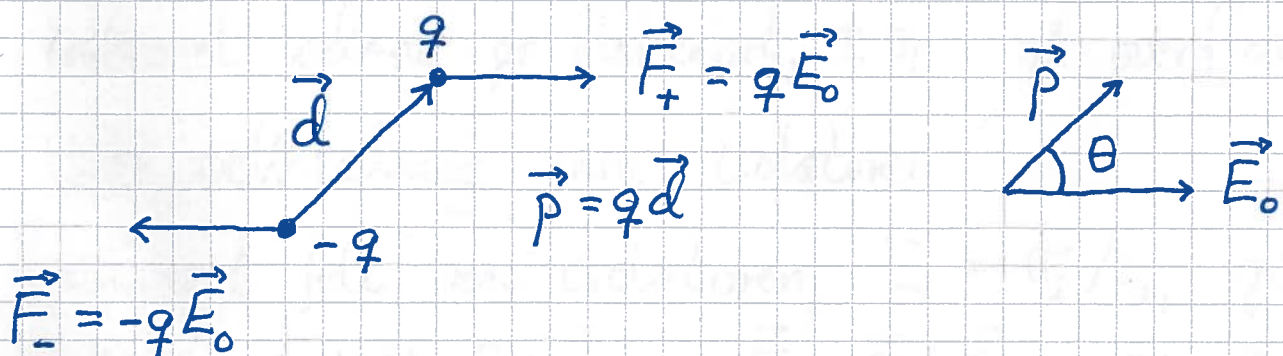
$\Rightarrow$ Netto tiltrekkende kraft på ølboksen.

Dielektrikum (isolator)

[YF 24.4+5 ; LHL 20.5]

Har ikke frie elektroner, men har bundet ladning som polariseres i ytre felt $\vec{E}_0$.

Molekylær dipol i (uniformt) ytre felt:



Dreiemoment på dipolen:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \dots \text{øving 9} \dots = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

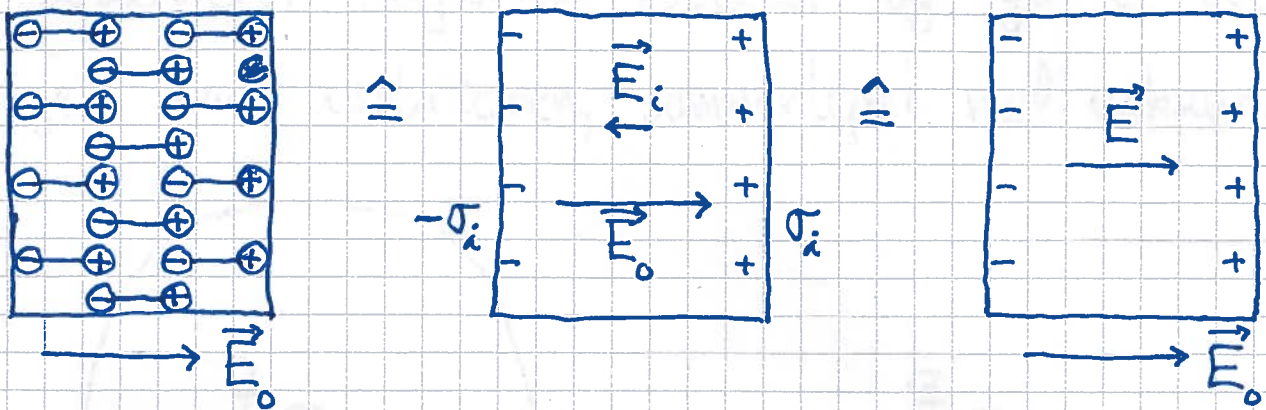
Dipolens pot. energi:

$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \dots = - \vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

(med valget $U = 0$ for $\theta = \pm \pi/2$)

dvs: tendens til innretning av molekylære dipoler langs ytre felt $\vec{E}_0$

Netto makroskopisk effekt:



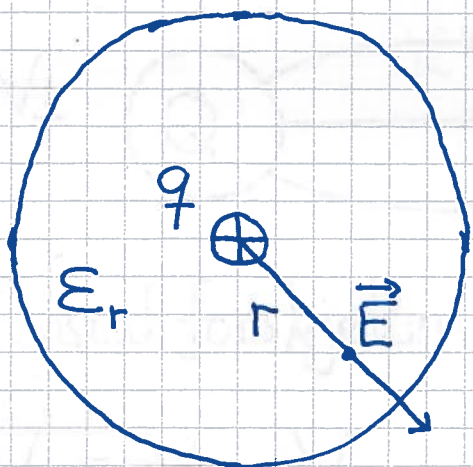
- induert ladning pr flateenhet, $\pm \sigma_i$, på overflaten
- null nettoladning inni isolatoren
- induert felt inni isolatoren, $E_i = \sigma_i / \epsilon_0$, gir svekket totalt felt inni, $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$, $E = E_0 - E_i$
- vi antar lineær respons: E_i prop. med E_0 , og dermed E prop. med E_0 .
- isolatorens relative permittivitet ϵ_r :
 $\epsilon_r = E_0 / E$, dvs $E = E_0 / \epsilon_r$ ($\epsilon_r \geq 1$)

noen tallverdier:

Stoff	Vakuum	Tørr luft	Plast	Rent vann	Perfekt metall
ϵ_r	1	1.00054	2 - 6	80	∞

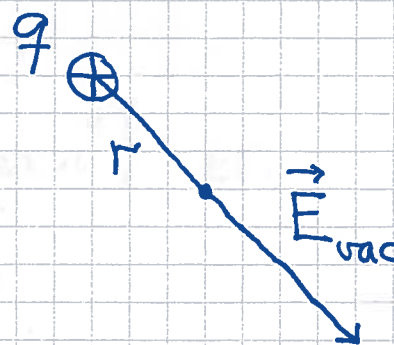
- isolatorens permittivitet: $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$

- en ladning q plassert inni en isolator
polariserer omgivende isolator og gir et svekket felt inni isolatoren, sammenlignet med vakuum:



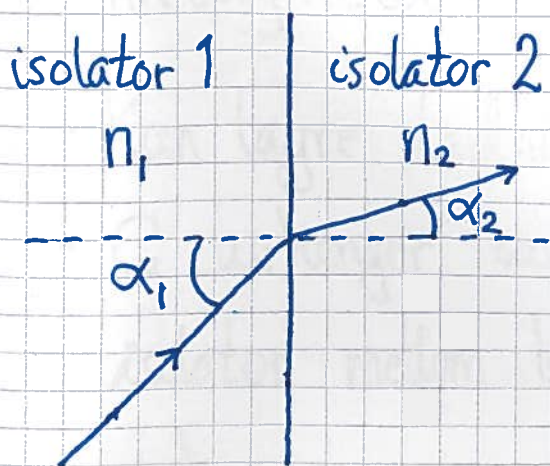
$$E(r) = q / 4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2$$

$$= q / 4\pi \epsilon r^2$$



$$E_{vac}(r) = q / 4\pi \epsilon_0 r^2$$

- lysfarten i en isolator: $v = c / \sqrt{\epsilon_r} < c$
($c = 299792458 \text{ m/s}$ = lysfarten i vakuum)
- lysbrytning i grenseflate mellom to isolatorer:



$n = \sqrt{\epsilon_r}$ = brytningsindeks

Snells lov:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

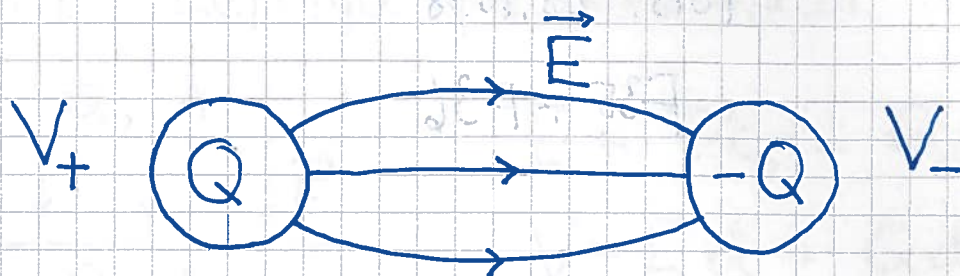
Rødt lys: $n = 1.33$
Blått lys: $n = 1.35$ } i vann

$\Rightarrow$ Regnbue m.m.

Kondensator og kapasitans [YF 24; LHL 20]

(=capacitor) (=capacitance)

Generelt: To ledere adskilt av isolator (f.eks. luft)



Potensialforskjellen ("spenningen") er

$$V = V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

og er prop. med Q , siden $\vec{E}$ er prop. med Q (Goulombs lov).

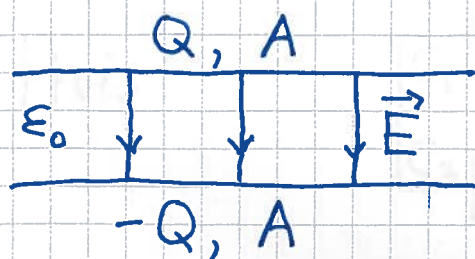
Kondensatorens kapasitans:

$$C \stackrel{\text{def}}{=} Q/V$$

- Enhet: $[C] = C/V = F$ (farad)
- Kretssymbol:
- Kan lagre ladning og energi
- C avhenger av utforming/geometri og type isolator mellom lederne. Merk at C ikke avhenger av Q eller V .

- (129)
- Beregning av C : Anta ladning $\pm Q$ på de to lederne og regn ut V . Da er $C = Q/V$.

Eks 1: Luftfylt platekondensator.



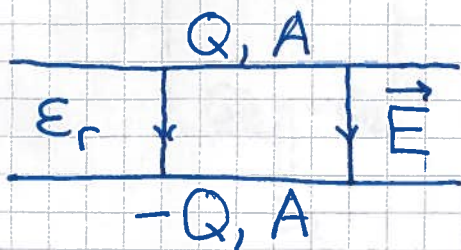
$$E = \sigma / \epsilon_0 = Q / A \epsilon_0$$

$$V = E d = Q d / A \epsilon_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{C = \epsilon_0 A / d}}$$

Med $d = 2.0 \text{ mm}$ og $A = \pi \cdot (10 \text{ cm})^2$: $C \approx 0.14 \text{ nF}$

Eks 2: Platekond. fylt med dielektrikum



$$E = \sigma / \epsilon = Q / A \epsilon_r \epsilon_0$$

$$V = E d = Q d / A \epsilon_r \epsilon_0$$

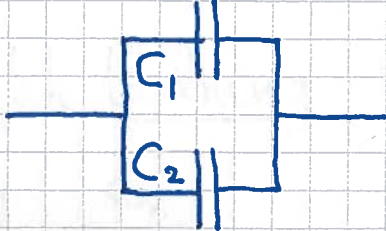
$$\Rightarrow \underline{\underline{C = \epsilon_r \epsilon_0 A / d}}$$

Dvs: C økes med faktor ϵ_r

Enhet for permittivitet: $[\epsilon] = \text{F/m}$

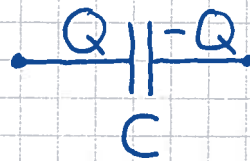
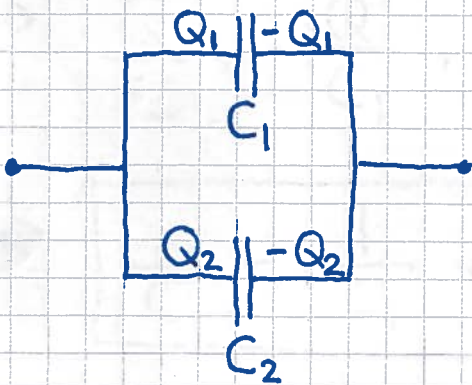
Kobling av flere kapasitanser [YF 24.2; LHL 20.2]

Parallellkobling:

Hvis  skal erstattes av

 og oppføre seg likt, hva er da C ?

Har lik spenning V over kond. 1 og 2:



$$V = Q_1/C_1 = Q_2/C_2 = Q/C \quad \text{og} \quad Q_1 + Q_2 = Q$$

$$\Rightarrow C_1 V + C_2 V = C V$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 + C_2 = C}$$

Med N kond. i parallell:

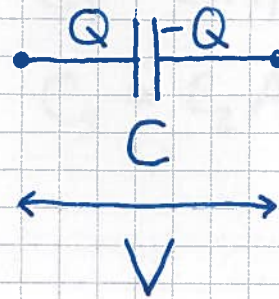
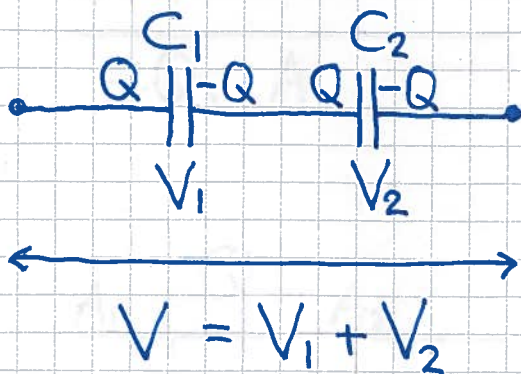
$$\boxed{C = \sum_{j=1}^N C_j}$$

Seriekobling:

Hvis $\text{---} \parallel_{C_1} \text{---} \parallel_{C_2} \text{---}$ skal erstattes av $\text{---} \parallel_C \text{---}$,

hva er da C ?

Har her lik ladning $\pm Q$ på nr 1 og 2:



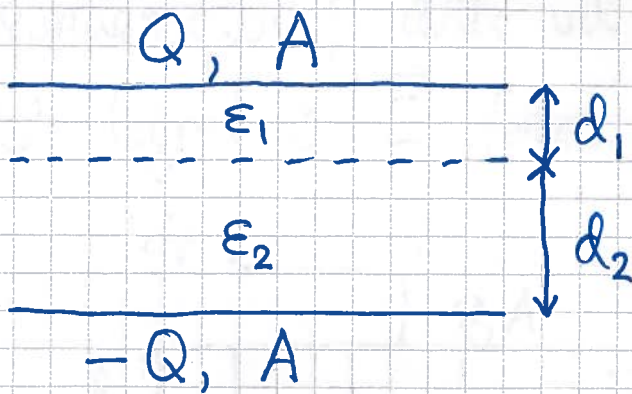
$$\Rightarrow \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Med N kond. i serie:

$$\boxed{C^{-1} = \sum_{j=1}^N C_j^{-1}}$$

Kondensator fylt med ulike dielektrika blir som
parallell- eller seriekobling:

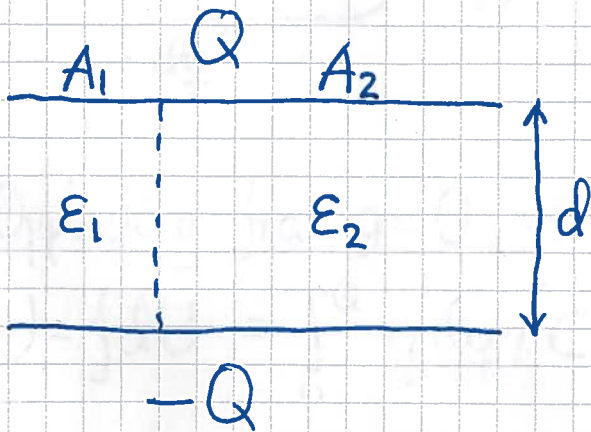


Seriekobling:

$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$$

$$C_1 = \epsilon_1 A / d_1$$

$$C_2 = \epsilon_2 A / d_2$$



Parallellkobling:

$$C = C_1 + C_2$$

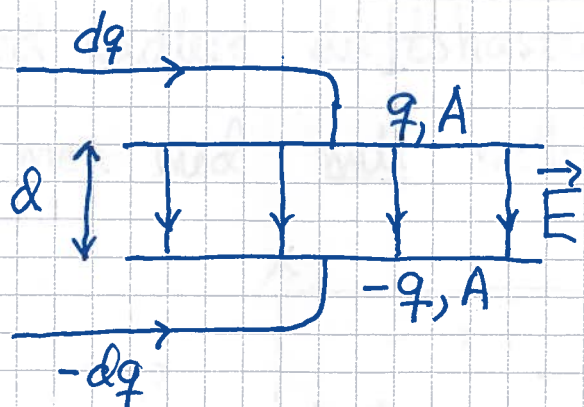
$$C_1 = \epsilon_1 A_1 / d$$

$$C_2 = \epsilon_2 A_2 / d$$

Energi i $\vec{E}$ -felt [YF 24.3; LHL 20.4]

(133)

Vi beregner arbeidet W som skal til for å lade opp en kondensator; dette vil tilsvare potensiell energi U lagret i $\vec{E}$ -feltet mellom platene.



Økt ladning, fra $\pm q$ til $\pm (q + dq)$ gir økt pot. energi:

$$dU = v(q) dq = \frac{q}{C} dq$$

$\Rightarrow$ Opplading fra $q=0$ til $q=Q$ gir pot. energi

$$U = \int dU = \int_0^Q q dq / C = Q^2 / 2C = \frac{1}{2} CV^2$$

som med $C = \epsilon_0 A / d$ og $V = Ed$ gir

$$U = \frac{1}{2} (\epsilon_0 A / d) \cdot (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$$

med $A \cdot d =$ volumet mellom platene, dvs der $E \neq 0$

$\Rightarrow$ Energien pr volumenhett i et elektrisk felt er

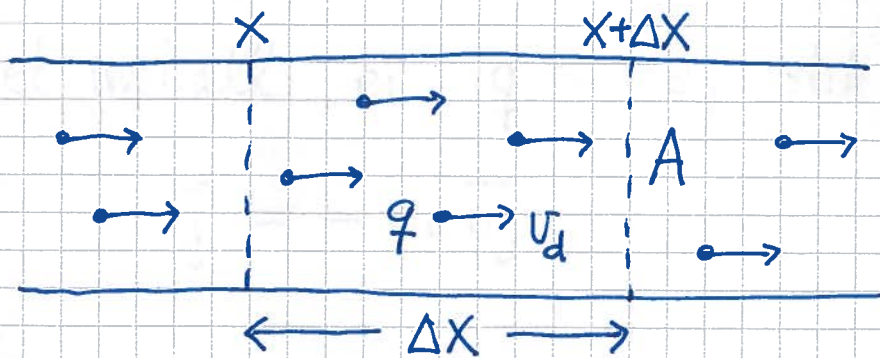
$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

som gjelder generelt.

Elektrisk strøm [YF 25,26; LHL 21,22] (134)

Strøm og strømtetthet [YF 25.1; LHL 21.1]

Leder med n frie ladninger pr volumenhet, med midlere driftshastighet v_d langs lederen (men med null nettoladning) :



Strøm $\stackrel{\text{def}}{=}$ ladning som passerer et tverrsnitt av lederen pr tidsenhet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dQ}{dt}$$

$$[I] = \text{C/s} = \text{A} \quad (\text{ampere})$$

$$\text{All fri ladning } \Delta Q = q \cdot \Delta N = q \cdot n \cdot \Delta V$$

$$\text{i volumet } \Delta V = A \cdot \Delta x \text{ passerer ved } x + \Delta x$$

$$\text{i løpet av tiden } \Delta t = \Delta x / v_d$$

$$\Rightarrow I = \frac{q n \Delta x A}{\Delta x / v_d} = n q v_d A$$

(135)

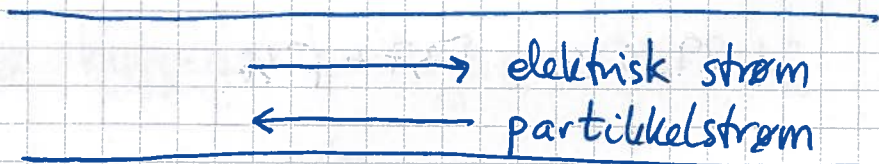
Strømtetthet $\stackrel{\text{def}}{=}$ strøm pr flateenhet

$$j = I/A \quad ; \quad [j] = A/m^2$$

$$\Rightarrow j = n q v_d, \text{ dvs } \boxed{\vec{j} = n q \vec{v}_d}$$

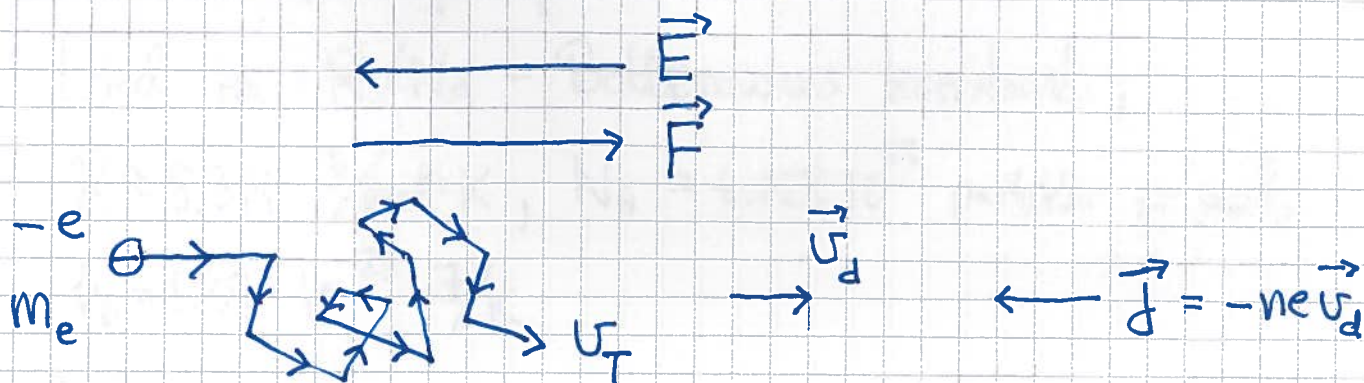
I et metall er $q = -e$, slik at

$$\vec{j} = -n e \vec{v}_d$$



Ohms lov [YF 25.2, 25.6 ; LHL 21.2, 21.4]

Ytre felt $\vec{E}$ gir kraft $\vec{F} = -e\vec{E}$, som vil drive frie elektroner gjennom metallet :



Anta d = midlere avstand mellom kollisjoner (136)

$\tau = d/v_T$ = midlere tid mellom kollisjoner

v_T = midlere elektronfart ved temperatur T

$$\vec{v}_d \approx \vec{a} \cdot \tau \stackrel{N2}{=} - \frac{e\vec{E}}{m_e} \cdot \tau$$

= midlere driftshastighet

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}; \quad \sigma = ne^2\tau/m_e = \text{materialets} \\ \text{konduktivitet (elektrisk ledningsevne)}$$

Dette er Ohms lov (på mikroskopisk form), i følge Paul Drude, ca 1900.

Pga hyppige kollisjoner blir v_d svært mye mindre enn v_T .

Termodynamikkens ekvipartisjonsprinsipp sier at ved absolutt temperatur T bidrar hvert kvadratiske ledd i energifunksjonen med $\frac{1}{2}k_B T$ pr partikkel.

[Med $k_B = R/N_A$ = Boltzmanns konstant ;

$R \approx 8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$, $N_A \approx 6.022 \cdot 10^{23}$ partikler pr mol,

$k_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$

For elektroner (i tre dimensjoner):

(137)

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = \frac{1}{2} m_e v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\Rightarrow v_T = \sqrt{3k_B T / m_e} \sim 10^5 \text{ m/s ved romtemperatur}$$

Estimerer v_d i kobber:

$$m(\text{Cu}) \approx 63 \text{ g/mol}; \quad \rho \approx 9 \text{ g/cm}^3$$

$$\Rightarrow n \approx 10^{29} \text{ frie elektroner pr m}^3 \text{ (1 pr Cu-atom)}$$

Anta $d \approx 10^{-9} \text{ m} \approx$ avstand mellom Cu-atomene

$$\text{dvs } \tau \approx d / v_T \approx 10^{-9} \text{ m} / 10^5 \text{ m/s} \approx 10^{-14} \text{ s}$$

Med Cu-ledninger i typiske elektriske kretser

er $E \sim 10^{-3} \text{ V/m}$ en realistisk verdi.

$$\text{Da er } v_d = e \tau E / m_e \approx 10^{-6} \text{ m/s,}$$

$$\text{dvs } v_d / v_T \sim 10^{-11} (!)$$

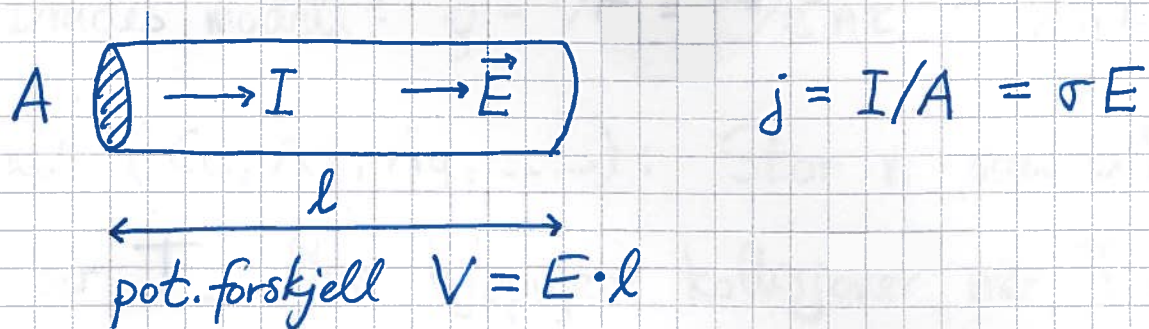
Med $v_d = 10^{-6} \text{ m/s}$ vil et gitt elektron bruke

ca 100 timer på å komme seg gjennom en

Cu-ledning med lengde 36 cm.

For leder med lengde l , tverrsnitt A :

(138)



Dermed: $I = \sigma E A = \sigma V A / l$

$\Rightarrow \boxed{V = R I}$, med motstand (resistans)

$R = l / \sigma A$

som er Ohms lov på "familier" (makroskopisk) form!

Konduktans G : $I = G \cdot V \Rightarrow G = \sigma A / l = 1/R$

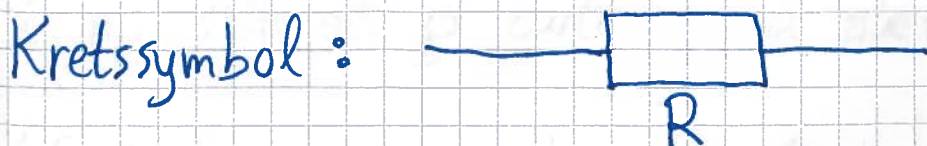
Resistivitet ρ : $\rho = 1/\sigma$

Enheter: $[R] = V/A = \Omega$ (ohm)

$[G] = 1/\Omega = S$ (siemens)

$[\rho] = \Omega m$; $[\sigma] = \frac{1}{\Omega m} = S/m$

σ, ρ er materialeegenskaper; G, R er avhengige av A og l

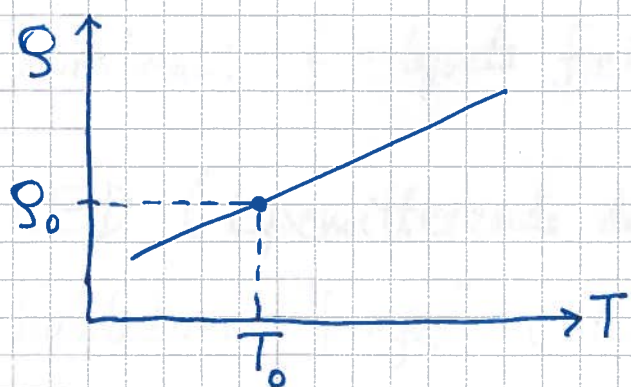


(Noen bruker)

Resistivitet og temperatur [YF 25.2; LHL 21.2+5] (139)

Fra Drudes modell: $\rho = 1/\sigma = m_e/e^2 n \tau \sim 1/n\tau$

Metall (Cu, Al, Ag, ----): Stor n som avhenger lite av T . Men hyppigere kollisjoner når T øker, dvs mindre τ og større ρ . Exp. gir typisk en linear $\rho(T)$:

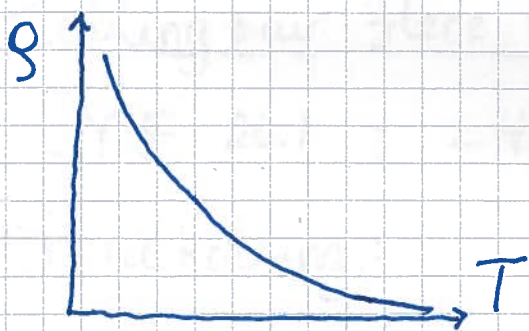


$$\Rightarrow \rho(T) = \rho_0 \{1 + \alpha \cdot (T - T_0)\}$$

$\alpha \approx 0.004 \text{ K}^{-1}$ for både Cu, Al og Ag

Halvleder (Si, Ge, GaAs, GaN,): Isolator, med $n \approx 0$ ved $T \approx 0$. Økt T gir sterk økning i n , slik at ρ avtar med økende T .

(Også forurensningsatomer - doping - øker n og reduserer ρ .)



Solceller: Lys, dvs fotoner med energi hf , absorberes av elektroner i halvlederen, blir frie elektroner som kan bidra til elektrisk strøm. ($h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js = Plancks konstant; f = lysets frekvens)

LED (Lysemitterende dioder): Frie elektroner i halvlederen "fanges" i tilstand med lavere energi (et "hull"); frigjort energi sendes ut som foton.

Eks:

$(Al_x Ga_{1-x})As$: $\lambda = 560 - 870$ nm (~~rødt~~ gult-rødt)

$(In_x Ga_{1-x})N$: $\lambda = 360 - 620$ nm (blått-gult)

Kan kombineres og gi hvitt lys med LED-pærer.

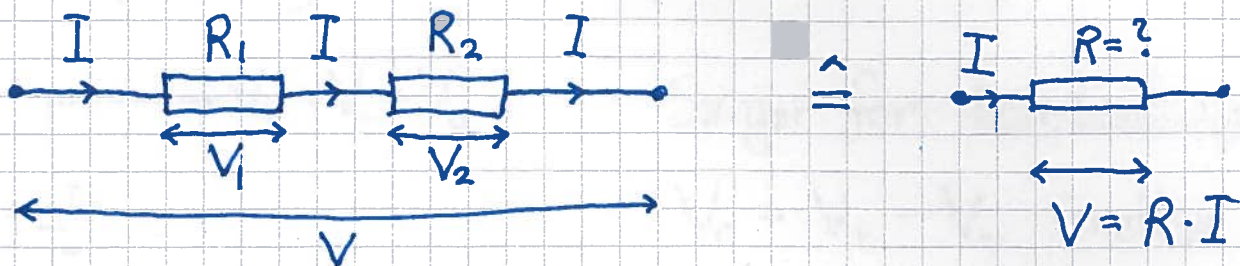
Nobelpriis fysikk, 2014.

Kobling av flere motstander

141

[YF 26.1 ; LHL 21.3]

Seniekobling:



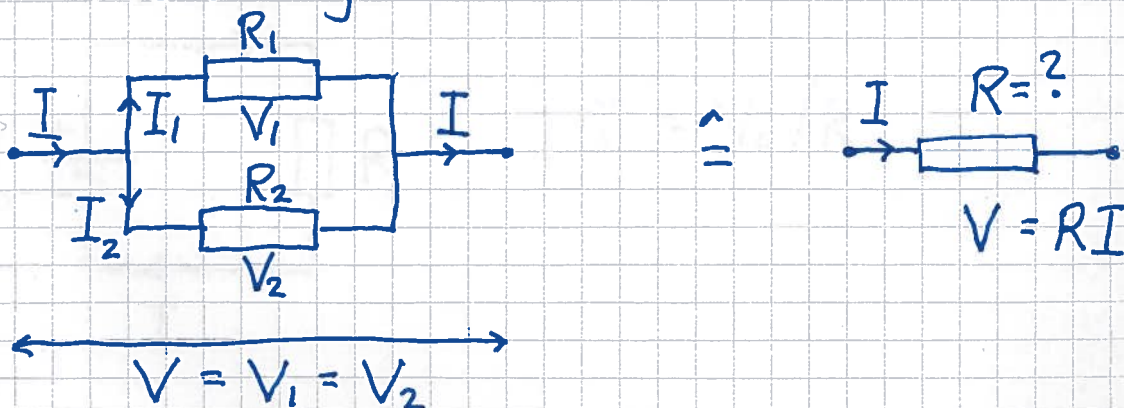
Samme strøm I gjennom R_1 og R_2 ; $V = V_1 + V_2$

$$\Rightarrow V = R_1 I + R_2 I = R I \Rightarrow \boxed{R = R_1 + R_2}$$

Med N motstander i serie:

$$\boxed{R = \sum_{j=1}^N R_j}$$

Parallellkobling:



Samme spenning over R_1 og R_2 ; $I = I_1 + I_2$

$$\Rightarrow \frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

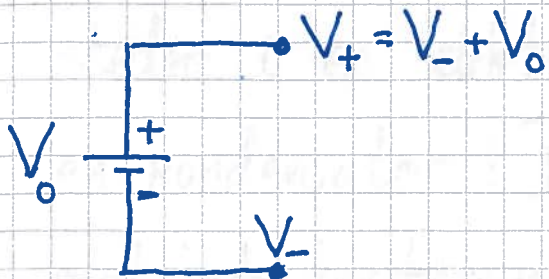
Med N motstander i parallell:

$$\boxed{R^{-1} = \sum_{j=1}^N R_j^{-1}}$$

Likestrømkretser [YF 26 (25); LHL 22] (142)

DC = direct current = likestrøm

Likespenningskilde :



Sørger for konstant spenning

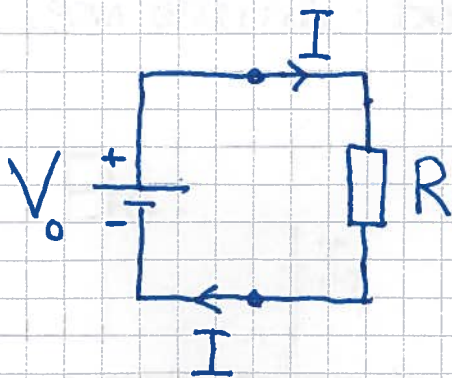
$V_0 = V_+ - V_-$ mellom polene.

Eks: Kjemisk batteri, solcelle

Kan koble spenningskilden til en motstand R .

Gir en lukket krets, og strøm bestemt av

Ohms lov :



$$I = V_0 / R$$

Kirchhoffs lover (regler) [YF 26.2; LHL 22.3] (143)

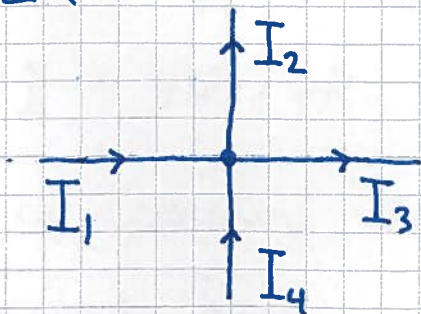
K1: Strømregel; knutepunktregel

Ladning vil ikke "høpe seg opp" på ulike steder i en elektrisk krets. [Unntak: Platene i en kondensator!] Derfor må netto strøm inn mot et knutepunkt være lik netto strøm ut av knutepunktet.

$$\sum_j I_j = 0 \quad \text{i alle knutepunkt i elektrisk krets}$$

(som allerede benyttet s. 141)

Eks:



Velg (f.eks) positivt fortegn inn og negativt fortegn ut

$$\Rightarrow I_1 + I_4 - I_2 - I_3 = 0$$

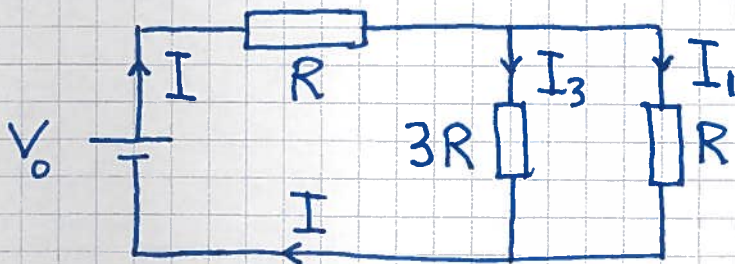
$$\underbrace{I_1 + I_4}_{\text{inn}} = \underbrace{I_2 + I_3}_{\text{ut}}$$

K2: Spenningsregel; sløyferegel

En ladning må oppleve et entydig potensial (dvs: ha en entydig pot. energi) på et gitt sted i en elektrisk krets. Derfor må summen av alle potensialendringer rundt enhver lukket sløyfe være null

$$\sum_j V_j = 0 \text{ rundt alle sløyfer i elektrisk krets}$$

Eks:



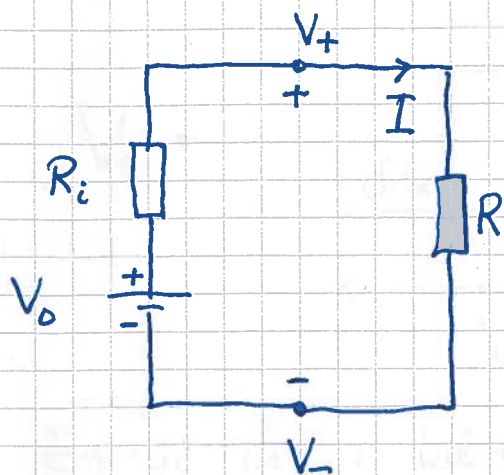
$$V_0 = I \cdot R_{\text{tot}} ; R_{\text{tot}} = R + \left(\frac{1}{3R} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = \frac{7}{4} R$$

$$\Rightarrow I = 4V_0/7R, I_3 = \frac{1}{4}I = V_0/7R, I_1 = \frac{3}{4}I = 3V_0/7R$$

Lik spenning over de to parallellkoblede motstandene.

Reelle spenningskilder har indre motstand R_i :

(145)



$$K2: V_0 - R_i I - RI = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{V_0}{R_i + R}$$

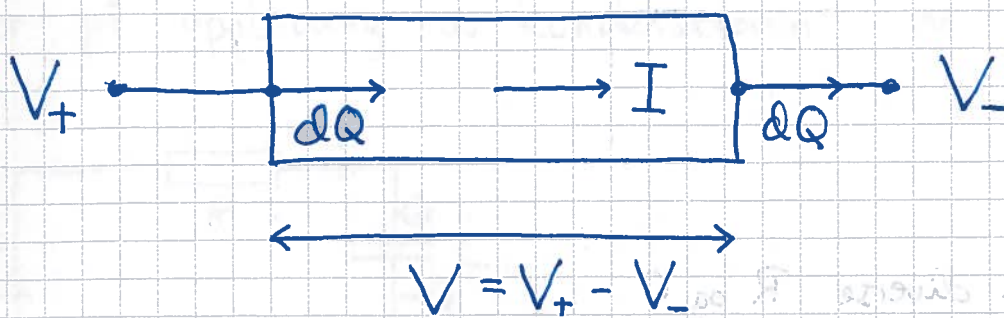
Spenningen over den ytre kretsen, her R , er

$$V_+ - V_- = V_0 - R_i I < V_0$$

når $I > 0$.

Gamle batterier får større og større R_i , dvs mindre og mindre polspenning ($V_+ - V_-$) når $I > 0$.

Elektrisk effekt: [YF 25.5 ; LHL 22.2]



Energi inn i lederbiten med ladning dQ ved potensial V_+ :

$$dU_{\text{inn}} = V_+ \cdot dQ$$

Utt, med ldn. dQ ved pot. V_- :

$$dU_{\text{ut}} = V_- \cdot dQ$$

Differansen er elektrisk energi som omdannes til varmeenergi i lederbiten; effekttapet er

$$\underline{P} = \frac{dU}{dt} = \frac{dU_{\text{inn}} - dU_{\text{ut}}}{dt} = \underbrace{(V_+ - V_-)}_{=V} \underbrace{\frac{dQ}{dt}}_{=I} = \underline{\underline{V \cdot I}}$$

Hvis lederbiten følger Ohms lov:

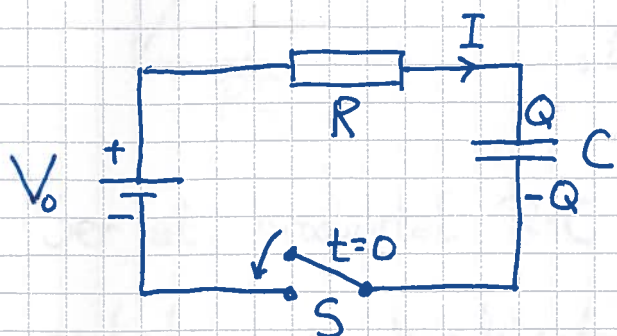
$$V = R \cdot I$$

$$\Rightarrow P = RI^2 = V^2/R$$

RC-krets [YF 26.4; LHL 22.4]

(147)

Ser på opplading av kondensatoren i en RC-krets:



- $Q=0$ og $I=0$ før $t=0$
- Lukker bryteren ved $t=0$ med bryteren S (switch)
- Finn $Q(t)$ og $I(t) = dQ/dt$

$$K2: V_0 - RI - \frac{Q}{C} = 0$$

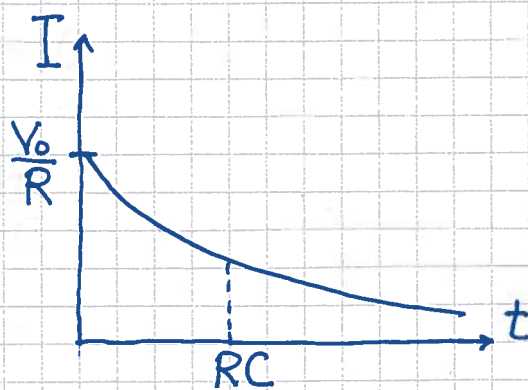
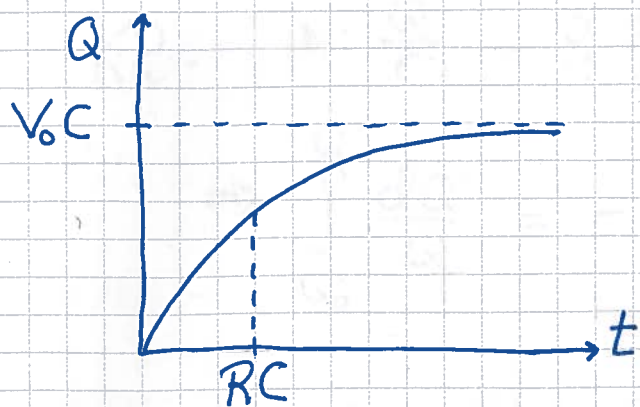
$$\Rightarrow -RC \frac{dQ}{dt} = Q - V_0 C$$

$$\Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} \right\} = -t/RC$$

$$\Rightarrow \underline{Q(t) = V_0 C \{ 1 - e^{-t/RC} \}}$$

$$\Rightarrow \underline{I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}}$$



Ser at produktet $R \cdot C$ angir en "typisk" tid for opplading av kondensatoren i en RC-krets.

Kalles kretsens tidskonstant :

$$\tau = RC$$

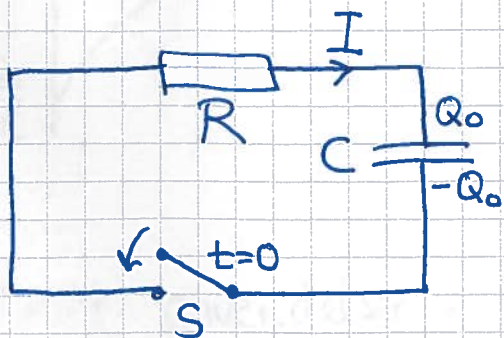
$$Q(\tau) = V_0 C (1 - 1/e) \approx 0.63 V_0 C$$

$$Q(3\tau) = V_0 C (1 - 1/e^3) \approx 0.95 V_0 C$$

$$I(\tau) = \frac{V_0}{R} \cdot 1/e \approx 0.37 \frac{V_0}{R}$$

$$I(3\tau) = \frac{V_0}{R} \cdot 1/e^3 \approx 0.05 \frac{V_0}{R}$$

Utlading av en oppladet kondensator:



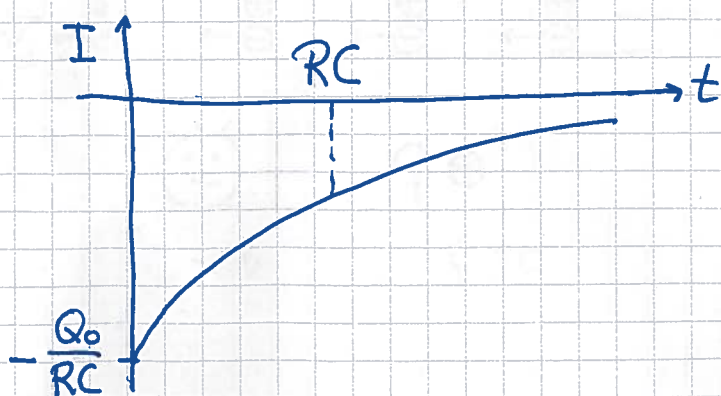
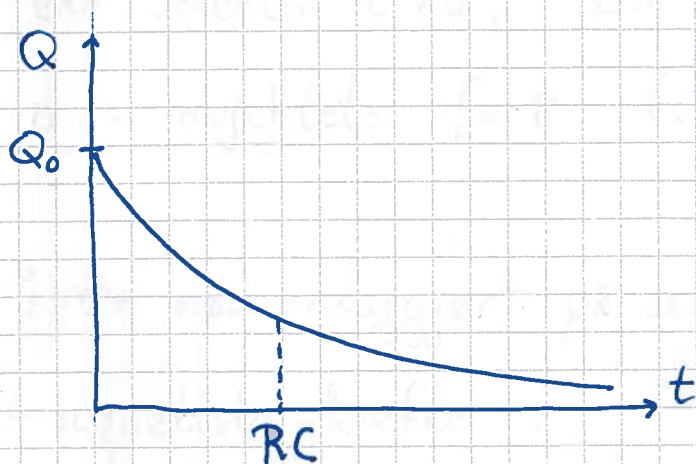
- $Q = Q_0, I = 0$ før $t = 0$
- Lukket krets fra $t = 0$
- Finn $Q(t)$ og $I(t)$

$$K2: -\frac{Q}{C} - R \frac{dQ}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \underline{Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}}$$

$$\Rightarrow \underline{I(t) = -\frac{Q_0}{RC} e^{-t/RC}}$$



Diverse anvendelser: Blinklys, Blitz,---

Frekvensfilter i AC-kretser

Magnetostatikk [YF 27, 28 ; LHL 23]

(150)

Einstein: "Alt er relativt!"

Men lysfarten (i vakuum) er c i alle inertialsystem, uavhengig av lyskildens fart.

En av flere konsekvenser av dette er såkalt

lengdekontraksjon: Objekter i bevegelse er kortere

enn objekter i ro, $\Delta X = \Delta X_0 \cdot \sqrt{1 - u^2/c^2}$, der

u = objektets fart (i x-retning).

Dette nødvendiggjør på sett og vis magnetfeltet og magnetiske krefter:



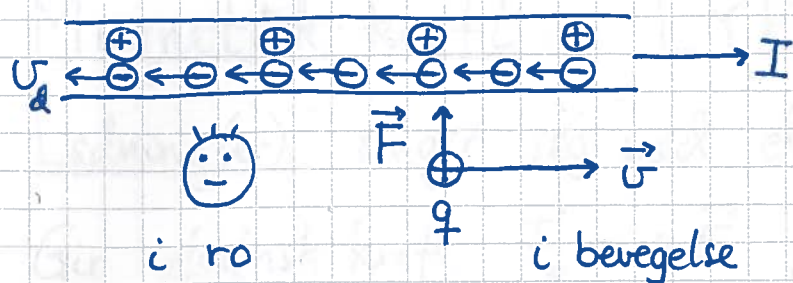
i ro

$q \oplus$

i ro

Ladningen q er i ro og "ser" en nøytral strømførende leder.

$\Rightarrow F = 0$; ingen nettokraft på q



Elektronene ($\ominus$) har større hastighet enn kjernene/ionene ($\oplus$) relativt ladningen q :

$$u_- \approx v + v_d \quad ; \quad u_+ = v$$

Dermed størst lengdekontraksjon for avstanden mellom elektronene ($\ominus$). Dermed "ser" ladningen q en negativt ladet leder når q er i bevegelse (langs lederen). Dermed påvirkes q av en elektrisk kraft $\vec{F}$ (tiltrekkende hvis $q > 0$).

Vi, derimot, er i ro relativt lederen, som for oss er elektrisk neutrale. Vi måler derfor ingen elektrisk kraft på q .

Vi måler en magnetisk kraft $\vec{F}_m$. Denne uttrykkes ved hjelp av et magnetfelt $\vec{B}$. Magnetfeltet $\vec{B}$ skapes av strømmen I .

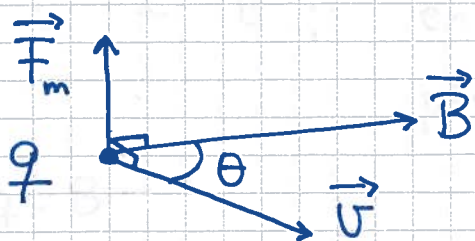
Magnetisk kraft [YF 27.2; LHL 23.4] (152)

Ladning(er) omgir seg med elektrisk felt $\vec{E}$.

Gir elektrisk kraft $\vec{F}_e = q\vec{E}$ på en annen ladning q

Strøm(mer) omgir seg med magnetfelt $\vec{B}$.

Gir magnetisk kraft $\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$ på ladning q ,
når denne er i bewegelse med hastighet $\vec{v}$



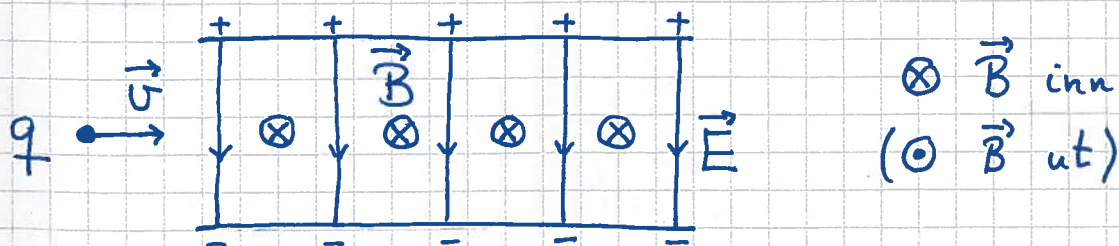
$$F_m = qvB \sin\theta ; \quad \vec{F}_m \perp \vec{B} \quad \text{og} \quad \vec{F}_m \perp \vec{v}$$

$$\text{Enhet: } [B] = \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \text{m/s}} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \text{T (tesla)}$$

Når både $\vec{E}$ og $\vec{B}$ er til stede:

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}}$$

Eks:

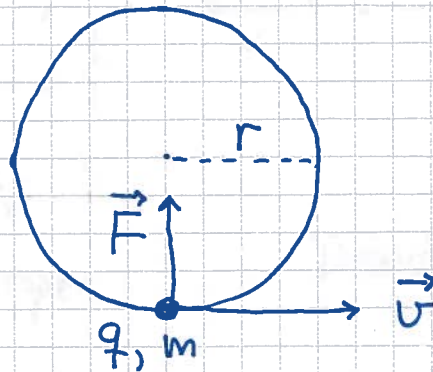


Hvis $v = E/B$, er $\vec{F} = 0 \Rightarrow$ ingen avbøyning!

Ladning i uniformt magnetfelt

[YF 27.4 ; LHL 23.1+4]

$\vec{B} \otimes$
(inn i planet)



Antar $\vec{v} \perp \vec{B}$; en komponent av $\vec{v} \parallel \vec{B}$
påvirkes ikke

$$\Rightarrow F = qvB$$

Merk: Med $\vec{F} \perp \vec{v}$ er tilført effekt $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$.
Magnetisk kraft kan ikke gjøre arbeid!

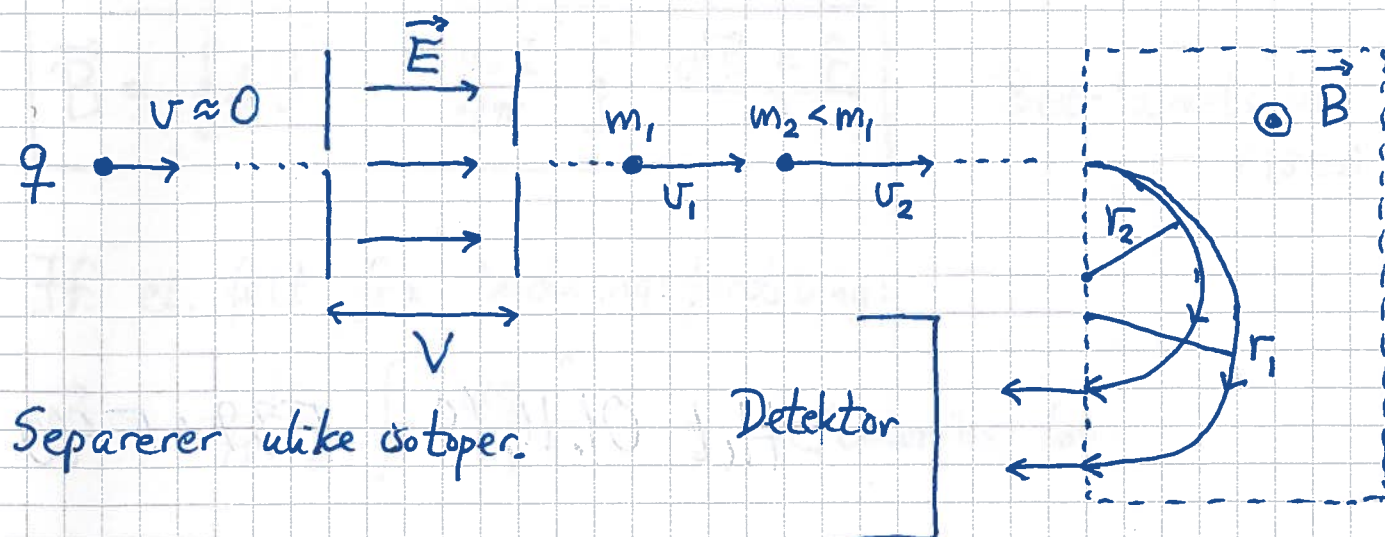
$\Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = \text{konstant}$; vi får uniform sirkelbevegelse

$$N2: qvB = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

$$\omega_c = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} = \text{syklotronfrekvensen}$$

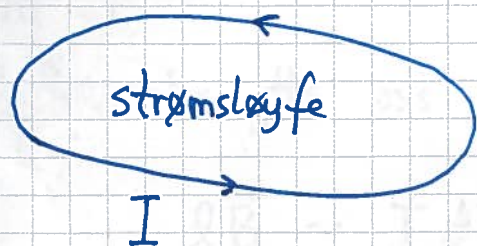
Eks: Massespektrometer [YF 27.5] (Øv. 12)

154



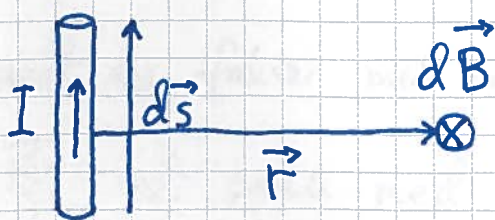
Biot - Savarts lov [YF 28.2 ; LHL 23.5]

Magnetostatikkens analogi til Coulombs lov:



$$\vec{B} = ?$$

Hver liten del $d\vec{s}$ av strømsløyfa gir bidrag $d\vec{B}$ til totalt felt $\vec{B}$:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A} = \text{vakuumpermeabiliteten};$$

$$c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Totalt felt fra lukket strømsløyfe:

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Biot-Savarts lov
(1820)

Jf. el. felt fra ladningsfordeling:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq \hat{r}}{r^2} ; \text{ Coulombs lov}$$

Vi ser på tre sentrale eksempler, uten matematiske detaljer. (Et 5-siders pdf-notat ligger på websiden, for den som er interessert!)

Vi kan benytte oss av at

$$d\vec{B} \sim I d\vec{s} \times \hat{r} \quad (\text{evt. } I d\vec{s} \times \vec{r})$$

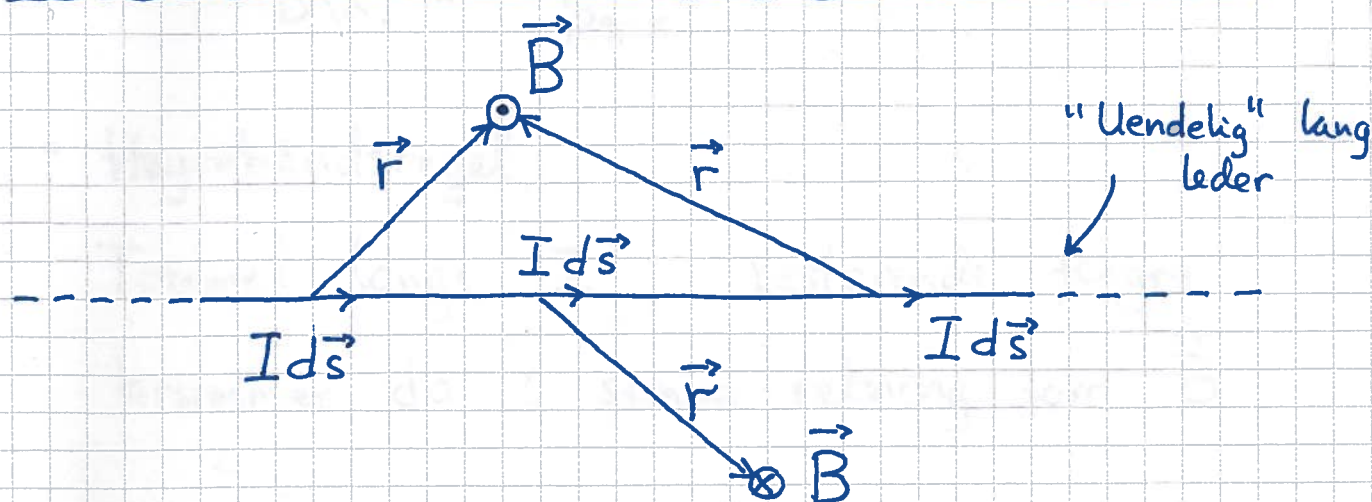
for å argumentere for retningen til $\vec{B}$ på ulike steder.

Ellers vil alltid $|\vec{B}|$ inneholde faktoren $\mu_0 I$, samt en faktor med enhet $1/m$.

$|\vec{B}|$ vil avta med avstanden fra strømlederen på ulike vis, avhengig av formen på strømlederen / strømsløyfa.

Eks 1: $\vec{B}$ fra lang og rett strømførende leder [YF 28.3; LHL 23.5]

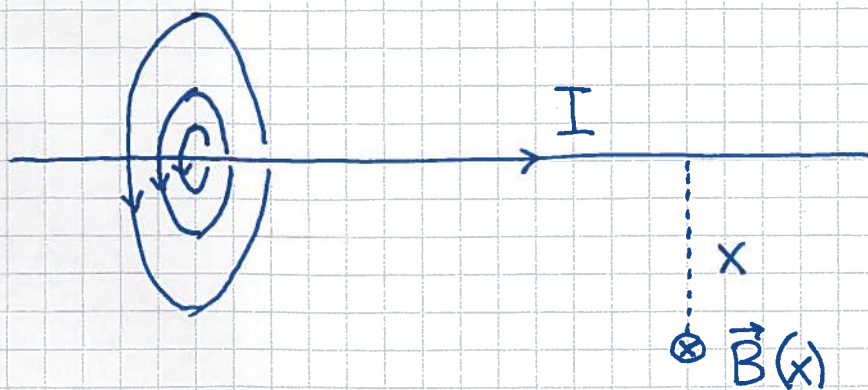
156



Siden $d\vec{B} \sim I d\vec{s} \times \vec{r}$, peker alle bidrag ut på oppsiden og alle inn på nedsiden av lederen.

$\Rightarrow \vec{B}$ må være tangentiell til sirkel med sentrum på lederen

Feltlinjer for $\vec{B}$ (som for $\vec{E}$ -felt: linjer $\parallel \vec{B}$; linjetetthet prop. med feltstyrken $|\vec{B}|$) blir sirkler med sentrum på lederen.



- Biot-Savarts lov gir

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

- Høyrehåndsregel:

Tommel langs I ; resterende fingre krummer da i samme retning som $\vec{B}$

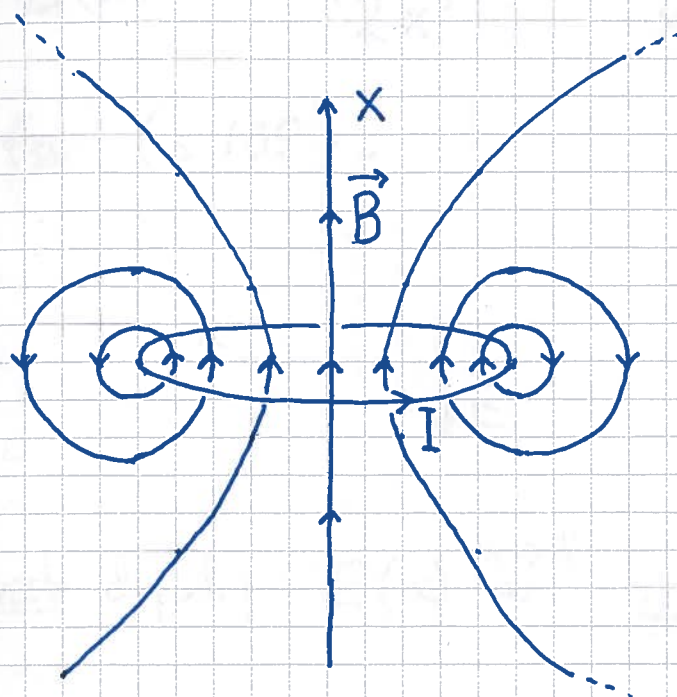
- Merk at feltlinjer for $\vec{B}$ alltid er lukkede kurver.

Dette uttrykker at vi ikke har "magnetiske ladninger".

Men: Vi har magnetiske dipoler; se neste eksempel!

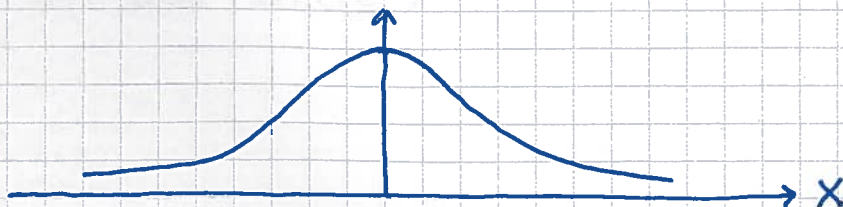
Eks 2: $\vec{B}$ fra sirkulær strømsløyfe
[YF 28.5 ; LHL 23.6]

158



- Strømsløyfe i yz -planet, strøm I , radius R .
- Nær lederen er $\vec{B}$ omtrent som for lang rett leder.
- På x -aksen er $\vec{B} \parallel \hat{x}$ pga symmetri
- Biot - Savarts lov gir, på x -aksen:

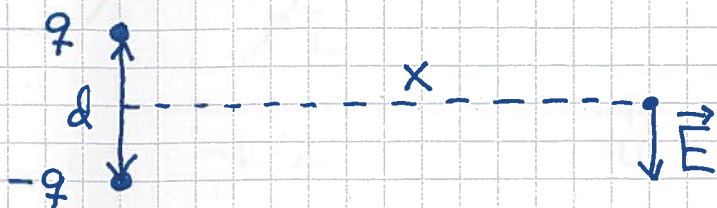
$$B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$$



- Langt unna strømsløyfa, $x \gg R$:

$$B(x) \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2 x^3} \sim \frac{1}{x^3}$$

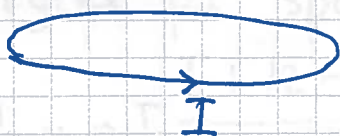
Fra før (s. 105):



Elektrisk dipol; $E(x) \stackrel{x \gg d}{\approx} \frac{q d}{4\pi\epsilon_0 x^3} \sim \frac{1}{x^3}$

Strømsløyfa er en magnetisk dipol:

N (nord)

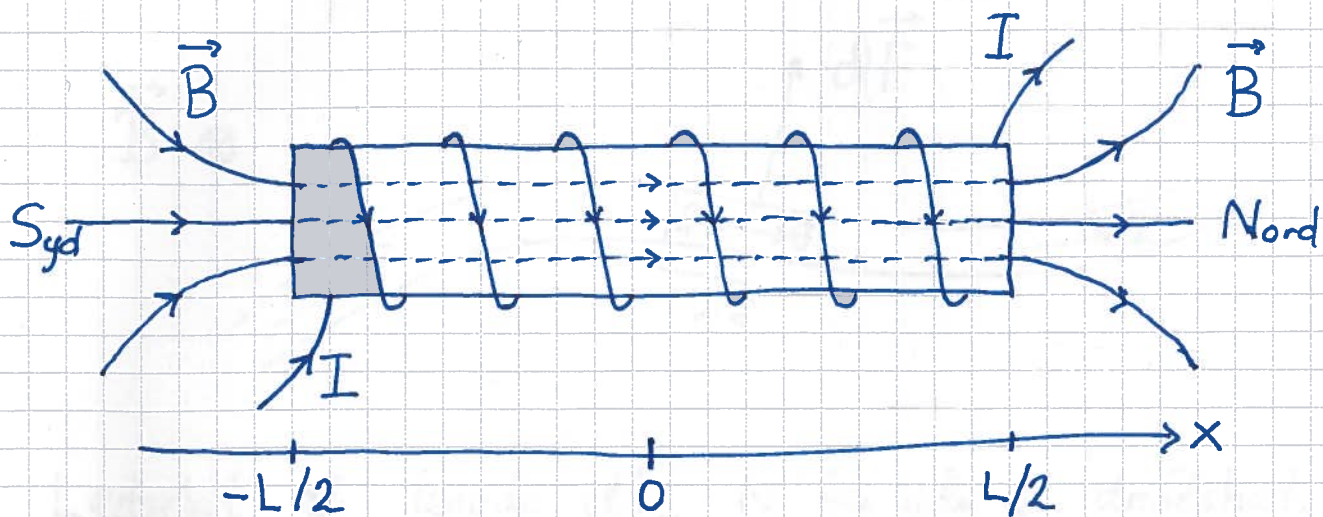


S (syd)

Atomer og molekyler er små magnetiske dipoler.

(Mer om det senere.)

Eks 3: $\vec{B}$ fra strømførende spole [YF 28.7; LHL 23.6] (160)



- N viklinger på lengde L ; tverrsnitt $A = \pi R^2$
- Tette viklinger $\Rightarrow \vec{B}$ fra N sirkulære strømsøyfer jevnt fordelt på lengde $L \Rightarrow$ Kan summere (integrere) $\vec{B}$ fra Eks 2 (se notat).
- Feltstyrke på spolens akse:

$$B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left\{ \frac{L/2 - x}{\sqrt{(L/2 - x)^2 + R^2}} + \frac{L/2 + x}{\sqrt{(L/2 + x)^2 + R^2}} \right\}$$

$n = N/L =$ antall viklinger pr lengdeenhet; $[n] = 1/m$

- Lang spole, $L/2 \gg R$:

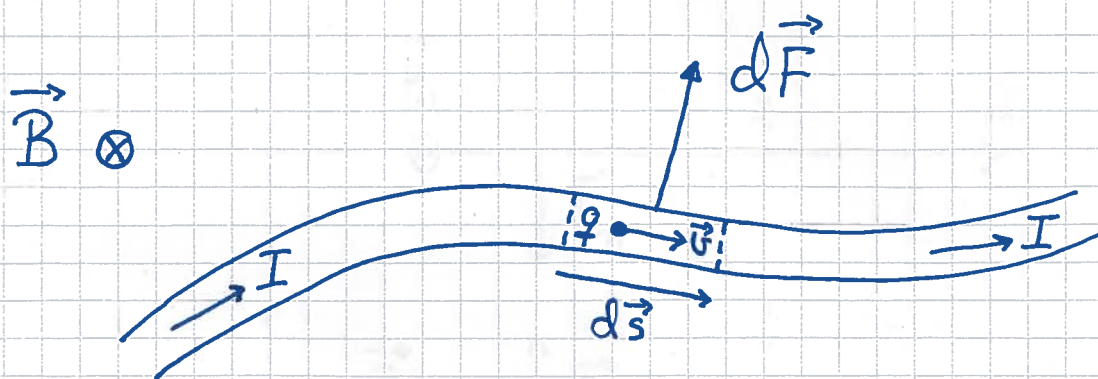
$$B(\pm L/2) = \frac{1}{2} \mu_0 n I$$

$$\boxed{B(|x| \ll L/2) = \mu_0 n I} \quad (\text{overalt inni spolen})$$

$$B \approx 0 \quad \text{utenfor spolen}$$

Magnetisk kraft på strøm [YF 27.6 ; LHL 23.2]

(161)



Lederbit, lengde $d\vec{s}$, N frie ladn. q , driftshast. $\vec{v}$

$$\Rightarrow d\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B} = \text{kraft på lederbiten}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{Nq}{ds/v} = \frac{1}{ds} Nqv \Rightarrow Nq\vec{v} = I d\vec{s}$$

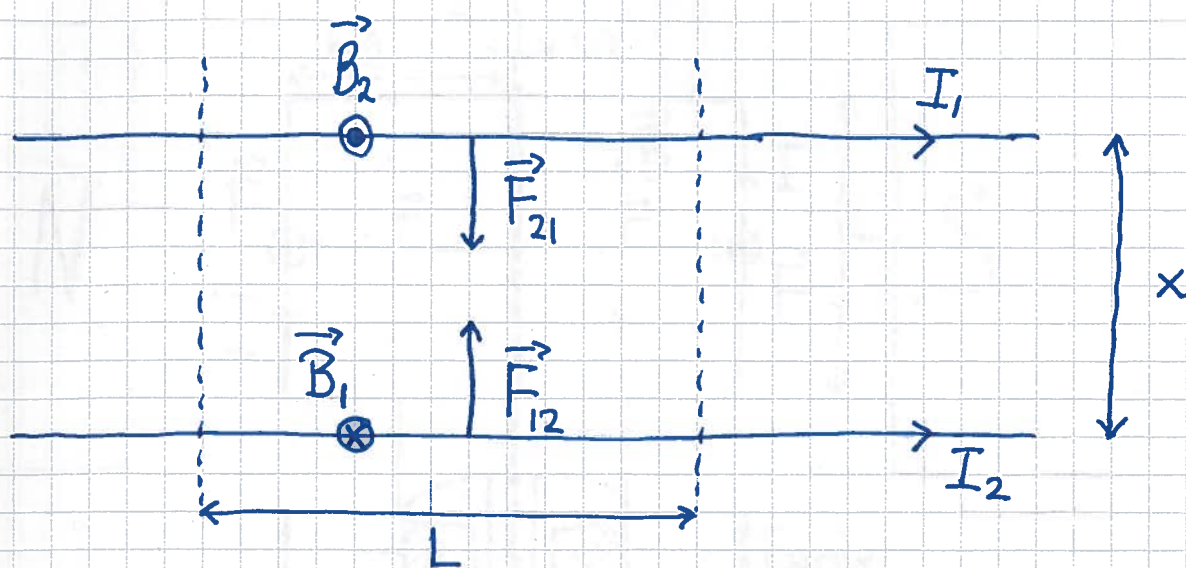
$$\Rightarrow d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}$$

$\Rightarrow$ Kraft på hele ledaren:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = I \int d\vec{s} \times \vec{B}$$

Eks 1: Parallell strømmer [YF 28.4 ; LHL 23.5]

(162)



$$B_{1,2} = \frac{\mu_0 I_{1,2}}{2\pi x} = \text{feltstyrke i avstand } x \text{ fra } I_{1,2}$$

Innbyrdes kraft på lengde L :

$$F_{12} = F_{21} = F \quad (\text{N3})$$

$$F_{12} = I_2 L B_1 = \frac{\mu_0 L}{2\pi x} I_2 I_1$$

$$F_{21} = I_1 L B_2 = \frac{\mu_0 L}{2\pi x} I_1 I_2 = F_{12} \quad (\text{OK!})$$

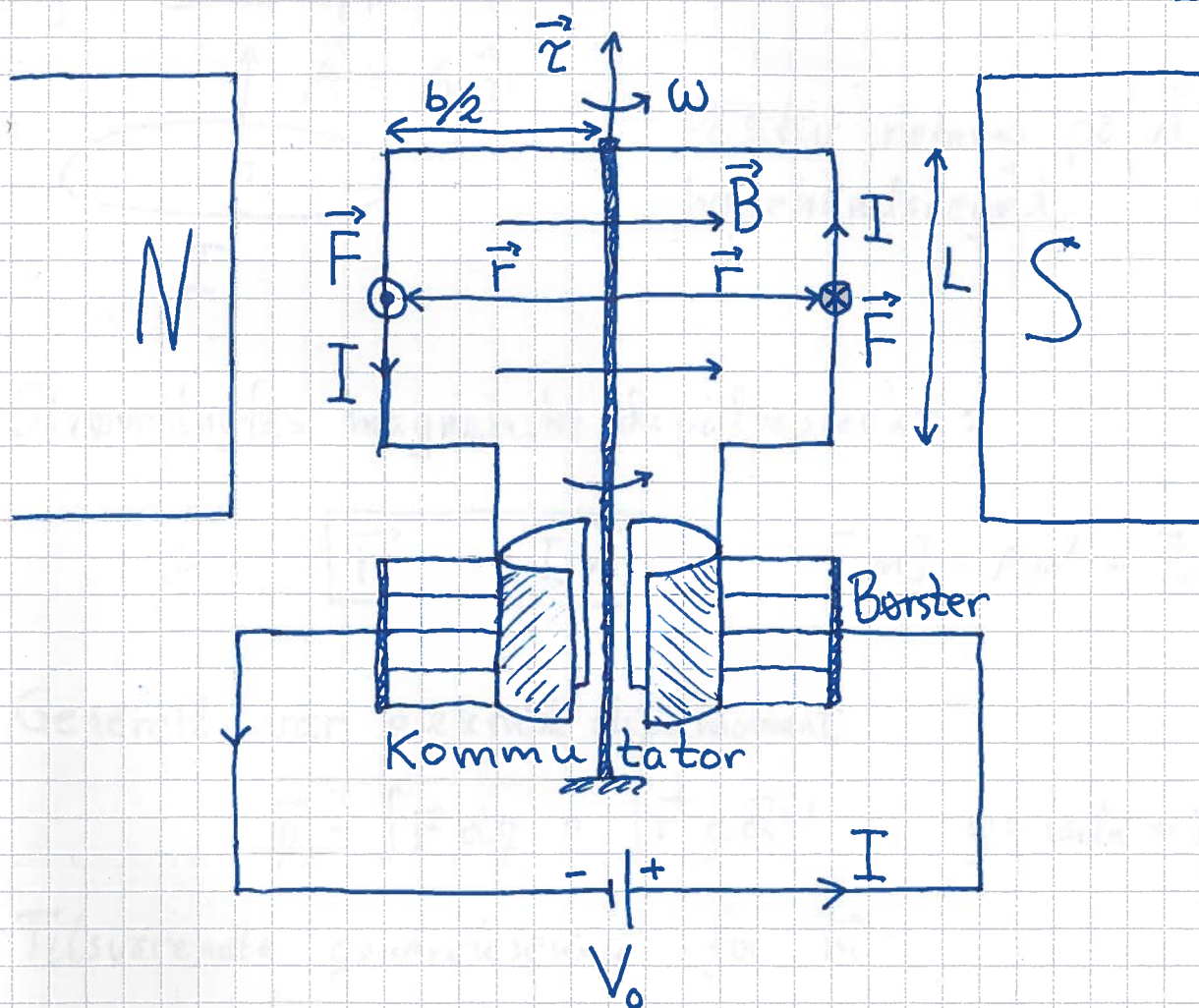
$$\text{Kraft pr lengdeenhet: } \underline{f = \frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x}}$$

Tiltrekning når I_1 og I_2 i samme retning.

Frastøtning ————— " ————— motsatt ————— " —————.

Eks 2: Likestrømmotor [VF 27.8; LHL 26.3]

163

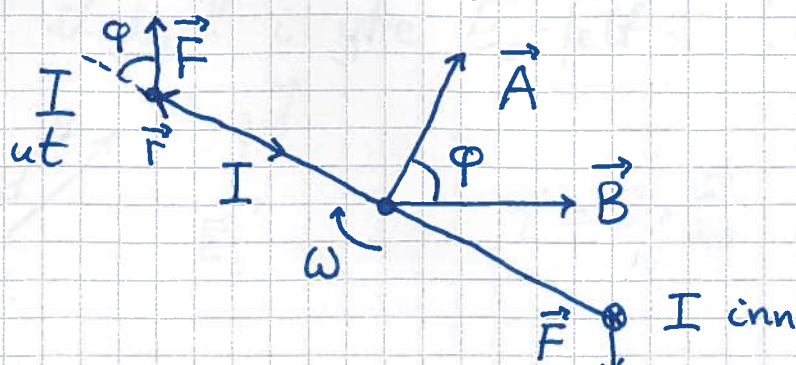


Kommulator roterer med sløyfa (evt spolen) og gir strømretning som i figuren; dermed dreiemoment $\vec{\tau}$ i samme retning hele tiden:

$$\tau = |\vec{\tau}| = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot I L B \cdot \sin\varphi$$

$$= I A \cdot B \cdot \sin\varphi \quad ; \quad A = b \cdot L$$

Sett ~~langs~~ langs rotasjonsaksen ($\vec{\tau}$ inn):



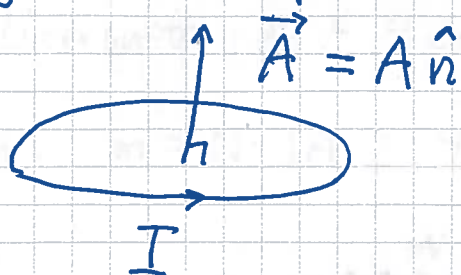
$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

$$\vec{\tau} = I \vec{A} \times \vec{B}$$

(N viklinger: $\vec{\tau} = N \cdot I \vec{A} \times \vec{B}$)

Magnetisk dipolmoment [YF 27.7; LHL 23.3, 26.2]

(164)



Positiv retning på $\vec{A}$ med høyrehandsregel.

Strømsløyfas magnetiske dipolmoment:

$$\boxed{\vec{m} = I \vec{A}}$$

$$[m] = A m^2 = J/T$$

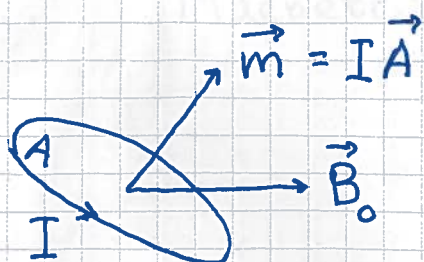
[Generelt var elektrisk dipolmoment

$$\vec{p} = \int \vec{r} dq = \int \vec{r} \rho dV ; \rho = \text{ladn. tetthet}$$

Tilsvarende generalisering for $\vec{m}$:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{r} \times \vec{j}) dV ; \vec{j} = \text{strømtetthet}]$$

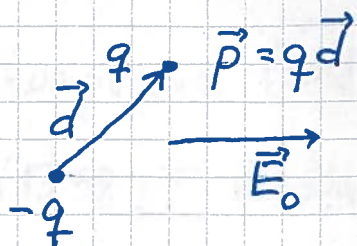
Magn. dipol i ytre $\vec{B}$ -felt (jf DC-motoren):



$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{m} \times \vec{B}_0 \\ U &= -\vec{m} \cdot \vec{B}_0 \end{aligned}}$$

(Øv. 13)

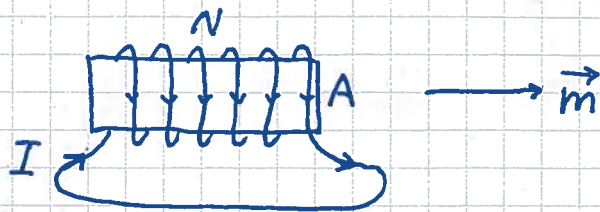
Jf. el. dipol i ytre $\vec{E}$ -felt: (s. 125; Øv. 9)



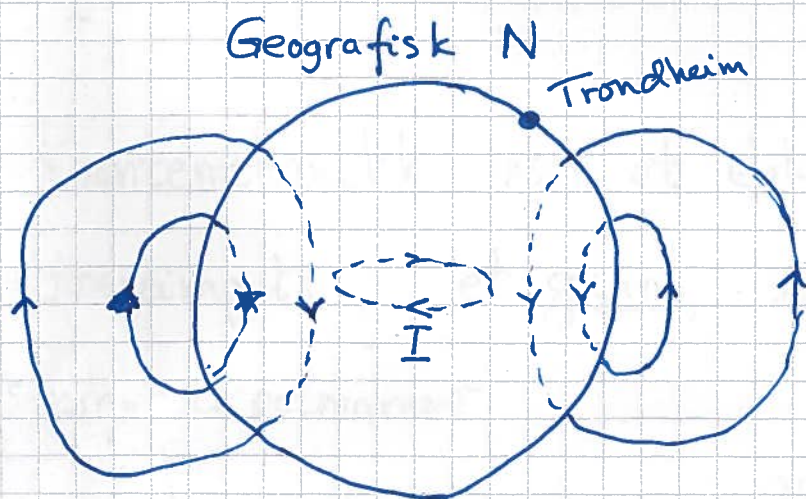
$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

Eks 1: Hva er $|\vec{m}|$ for spole med $N = 400$ viklinger og tverrsnitt $A = 4 \text{ cm}^2$ når strømmen er $I = 0.2 \text{ A}$?

Løsn: $m = N \cdot IA = 400 \cdot 0.2 \text{ A} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = \underline{0.032 \text{ Am}^2}$



Eks 2: Jordkloden



Magnetisk N [Betegnes ofte magn. syd!]



$$m \approx 8 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2$$

Magn. poler der $\vec{B}$ er vertikal.
World Magnetic Model 2015:

Magn. Nord: $64.3^\circ \text{S}, 136.6^\circ \text{Ø}$
Magn. Syd: $86.3^\circ \text{N}, 159.2^\circ \text{V}$

I følge ngdc.noaa.gov online calculator er,

i Trondheim: $|\vec{B}| \approx 52 \mu\text{T}$, med vertikal

komponent (ned) ca $50 \mu\text{T}$ og horisontal komp. ca $13.61 \mu\text{T}$

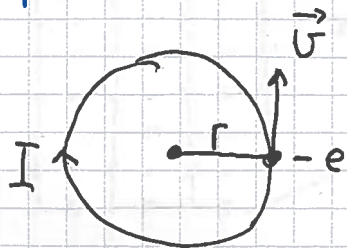
($13.58 \mu\text{T}$ nordover, $0.81 \mu\text{T}$ østover). $\frac{d|\vec{B}|}{dt} \approx 27 \text{ nT pr år}$

Materialers magnetiske egenskaper: Magnetisme

166

[YF 28.8 ; LHL 26.1 - 26.6]

Atomer er små strømsløyper, og derfor små magn. dipoler:

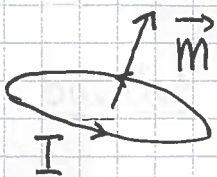


$$I = \frac{e}{T}, \quad T = \frac{2\pi r}{v}, \quad A = \pi r^2$$

$$\Rightarrow m = IA = \frac{1}{2} e v r$$

$$\approx 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^6 \text{ m/s} \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$\approx 10^{-23} \text{ A m}^2$$

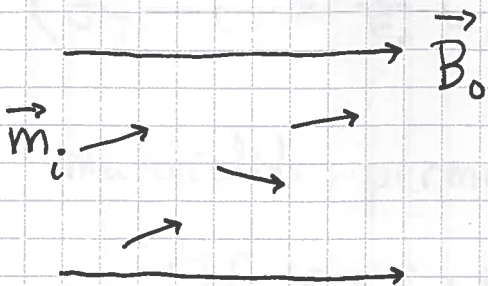


Kvantemekanikk viser at elektroner har indre dreieimpuls, et spinn, som tilsvarer et magn. dipolmoment

$$\mu_B = \frac{e \cdot h}{4\pi m_e} \approx 9.274 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2 = \text{et Bohr magneton}$$

med $h \approx 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ = Plancks konstant

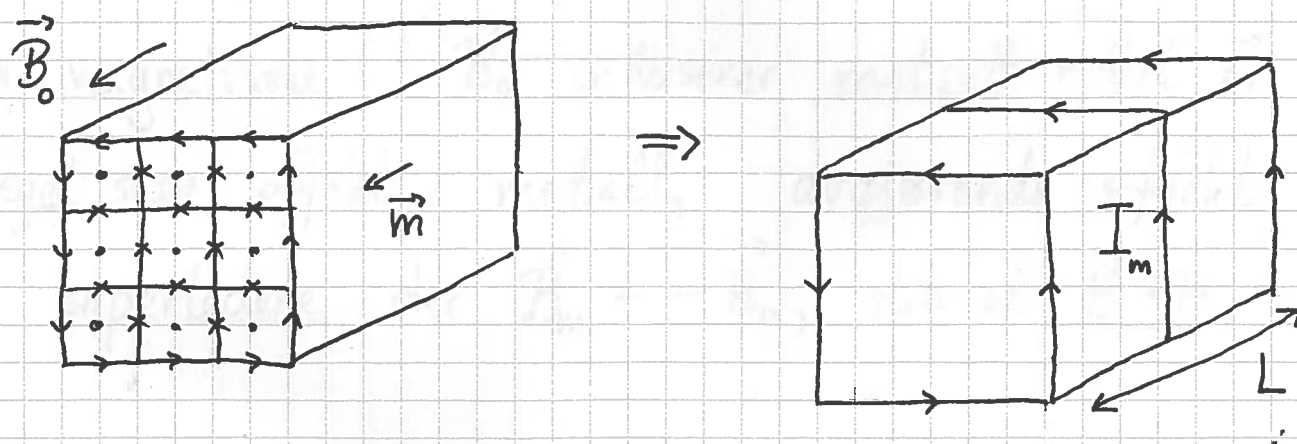
Materialer kan magnetiseres ved at atomære dipoler rettes inn med $\vec{m}$ langs ytre felt $\vec{B}_0$:



$$\vec{M} = \sum_i \vec{m}_i / V \neq 0$$

$$\vec{M} = \text{magnetiseringen} \quad (\text{A/m})$$

Netto makroskopisk effekt er en overflatestrøm:



- bundet strøm i hvert atom:
- indre strømmer kansellerer
- induert overflatestrøm pr lengdeenhet: $i_m = \frac{I_m}{L}$
- ligner en spole!
- magnetfeltet styrkes inni materialet: $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$
- lineær respons: B_m prop. med $B_0 \Rightarrow B$ prop. med B_0
- materialets relative permeabilitet μ_r :

$$\boxed{B = \mu_r B_0} \quad [\mu_r] = 1$$

(Jf. $E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0$ for dielektrikum)

- materialets permeabilitet: $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$
(Jf. $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$)

Paramagnetisme : Svak innretting av $\vec{m}$ langs $\vec{B}_0$. Eks: $\mu_r = 1.00002$ for Al

Diamagnetisme : $\vec{B}_0$ induserer motsatt rettet $\vec{m}$.
Meget svak effekt i metall, avgjørende effekt i superledere der $\vec{B}_m = -\vec{B}_0$, slik at $\vec{B} = 0$.

Ferromagnetisme

"Nabospinn" vekselvirker slik at parallelle $\vec{m}$ gir lavest energi :

. . . $\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow$. . .

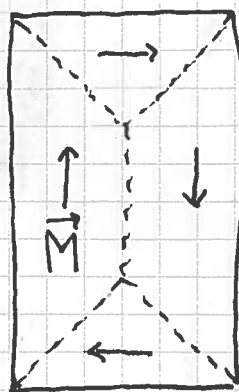
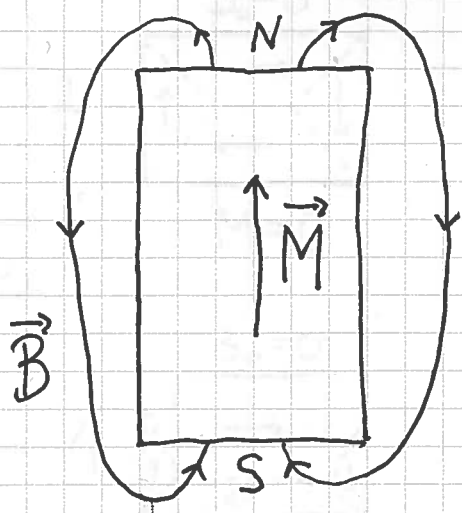
Eks: Fe, Ni, Co, $\text{Nd}_2\text{Fe}_{14}\text{B}$ (Nd = neodym)

μ_r opptil 10^3 og mer

Gurie-temperaturen : Økende temp. T ødelegger innrettingen av $\vec{m}$. Gir faseovergang fra ferromagnet til paramagnet ved kritisk temp. T_c

Eks: Fe ; $T_c = 770^\circ\text{C}$

Permanent-magnet vs unmagnetisk ferromagnet:

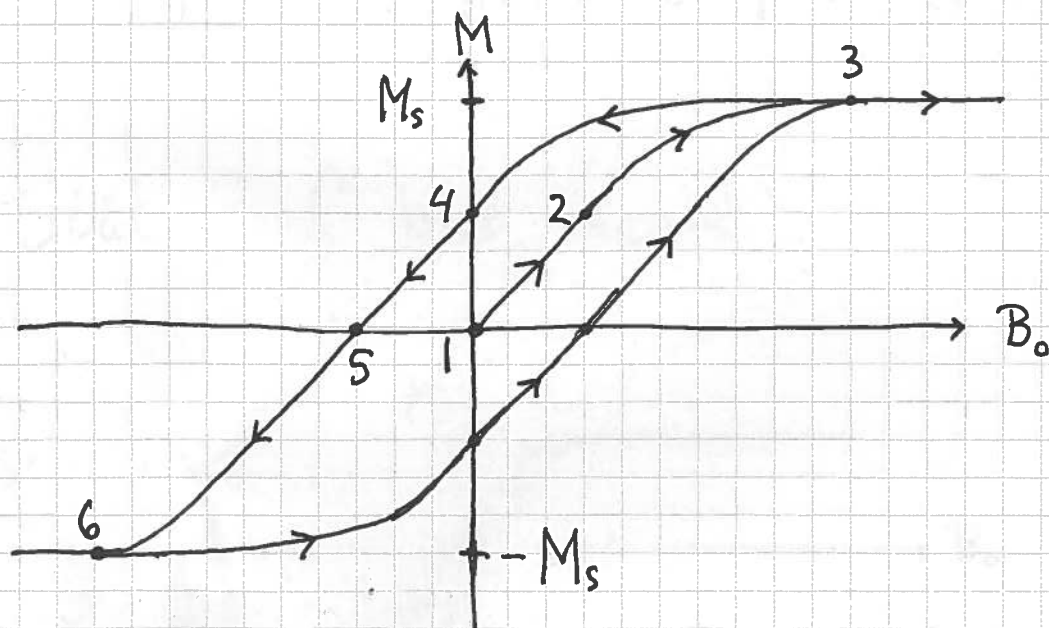
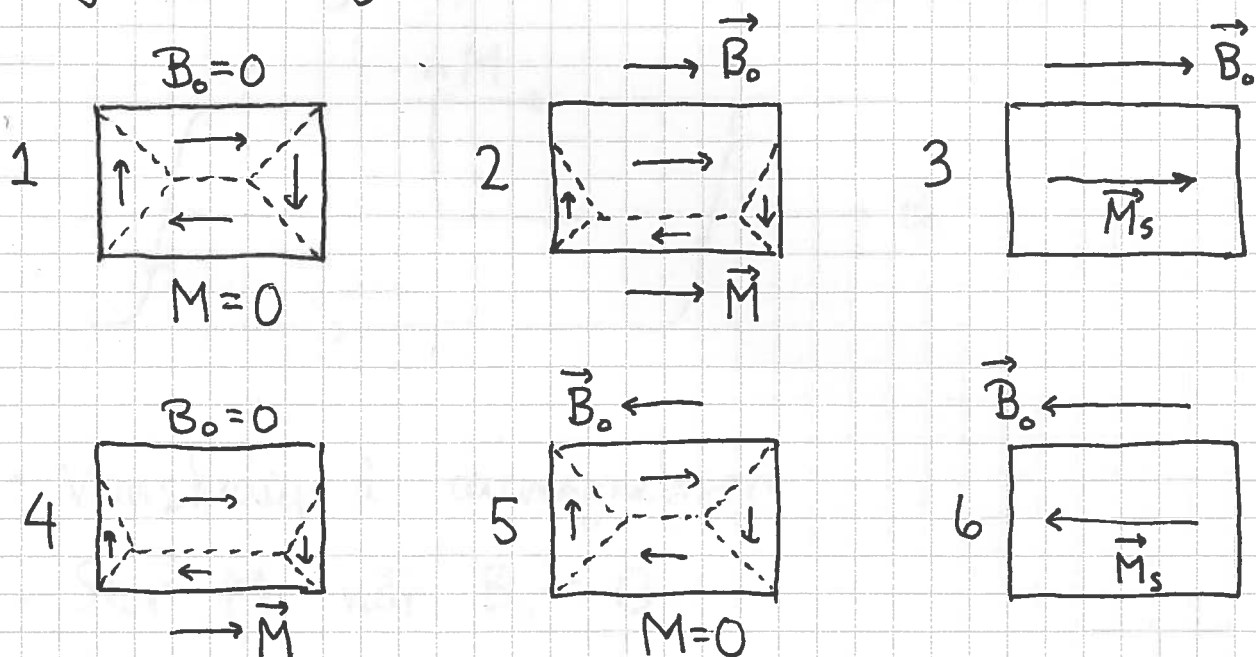


$B \approx 0$
utenfor

- Stor energi omkring magneten, $u_B = B^2/2\mu_0$
- Minimal vekselvirkningsenergi mellom atomære $\vec{m}$
- Eks: Neodymmagnet

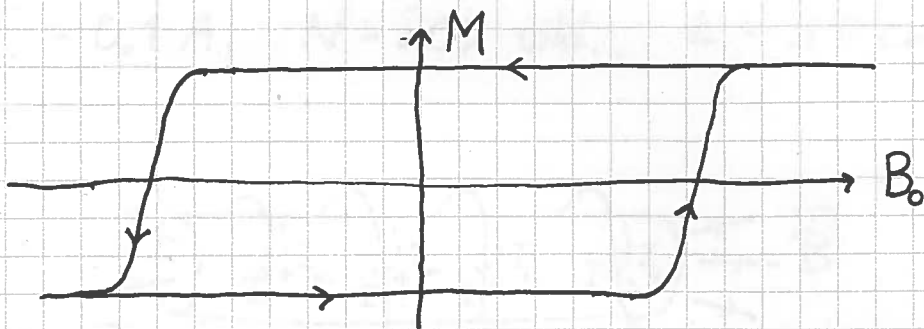
- Liten energi omkring ($B \approx 0$)
- Større v.v. energi nær domeneveggene (-----)
- Typisk domene-størrelse:
 $10^{-4} - 10^{-6} \text{ m}$
- Eks: Stål
- Magnetiseres i ytre felt $\vec{B}_0$

Magnetisk hystereses :



M_s = metningsmagnetisering ; alle $\vec{m}$ peker i samme retning ("saturation")

Permanentmagnet ("hard magnet") :



- Vanskelig å avmagnetisere
- Stor M når $B_0 = 0$
- Uegnet som kjerne i spole (i AC-kretser)

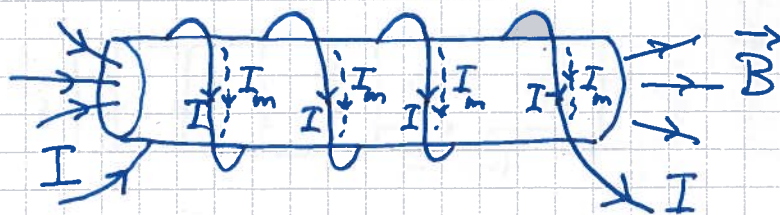
Stål ("bløt magnet") :



- Lett å (av-)magnetisere
- Liten M når $B_0 = 0$
- Egnet som kjerne i spole

Eks 1: B i spole med jernkjerne, $\mu_r = 1000$,

$I = 0.1 \text{ A}$, $N = 200$ vinkl., $L = 40 \text{ cm}$



Spolestrøm $I \Rightarrow$ "ytre felt" $\vec{B}_0 = \mu_0 n I$ inni spolen, der jernkjernen er. Jernet magnetiseres, med $\vec{M}$ langs $\vec{B}_0$. Overflatestrøm, I_m pr viking, induseres. Magnetfeltet styrkes med faktor μ_r

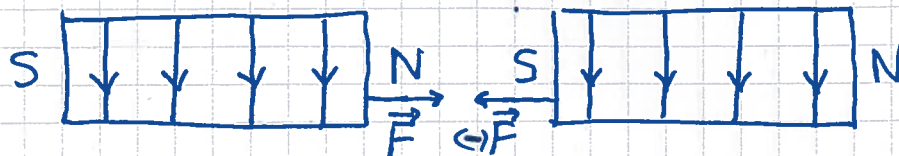
$$\Rightarrow B = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 n I \quad (= \mu n I)$$

$$= 1000 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{200}{0.40} \cdot 0.1 \text{ T}$$

$$= 0.063 \text{ T} = \underline{\underline{63 \text{ mT}}}$$

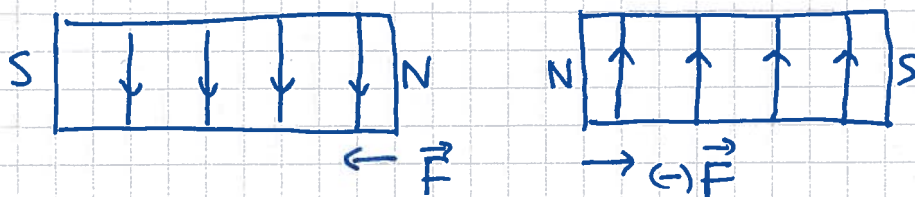
Eks 2: Tiltrekning mellom motsatte
poler (N og S), frastøtning mellom like poler.

(173)



Parallelle strømmer nærmest hverandre

$\Rightarrow$ Tiltrekning! (se s. 162)



Antiparallelle strømmer nærmest hverandre

$\Rightarrow$ Frastøtning!

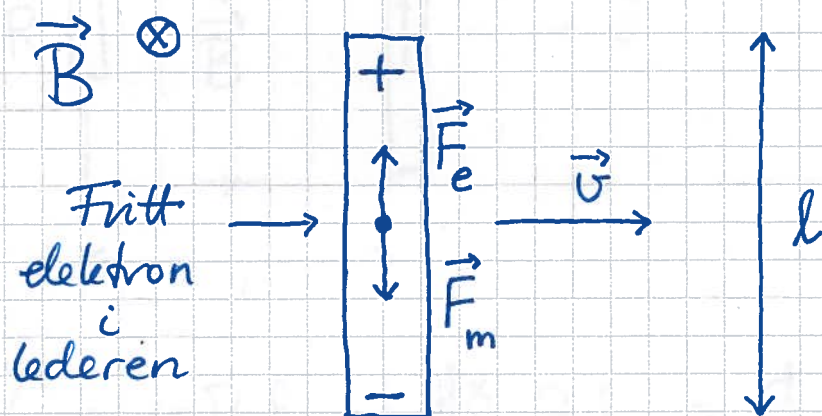
Elektrodynamikk

(174)

[YF 29-31 ; LHL 24, 25, 27]

Faradays induksjonslov [YF 29.1+2+4 ; LHL 24.1]

Vi drar en leder med lengde l gjennom et uniformt magnetfelt $\vec{B}$, med hastighet $\vec{v} \perp \vec{B}$:



$\vec{F}_m = -e \vec{v} \times \vec{B}$ har retning nedover og gir overskudd av elektroner nederst, underskudd øverst.

Et elektrisk felt $\vec{E}$ er indusert i lederen, med retning fra pos. mot neg. ladning, dvs nedover.

Men da er det også indusert en spenning i lederen: $\Delta V = E \cdot l$

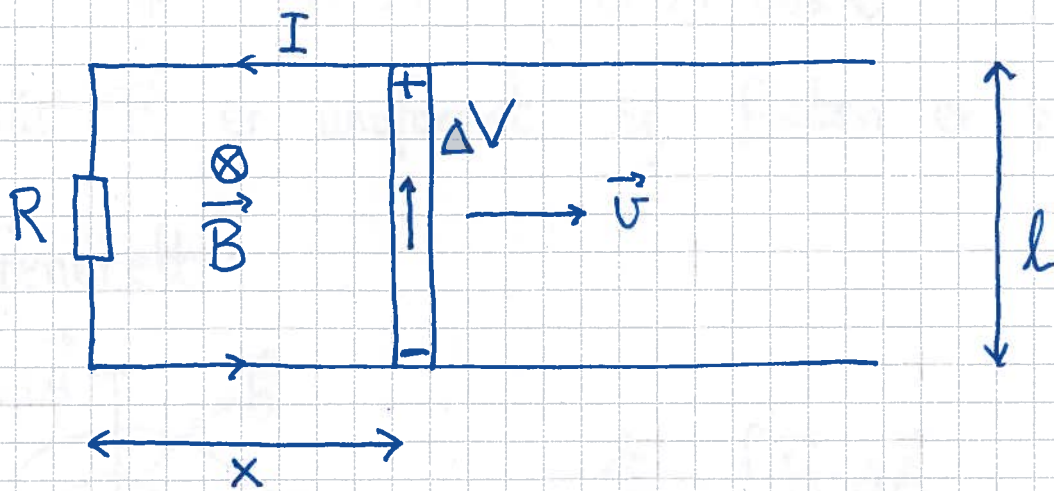
Likevekt når $\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0$

(175)

$$\Rightarrow eE = evB \Rightarrow E = vB$$

$$\Rightarrow \Delta V = vBl$$

Spenningen ΔV vil drive en strøm hvis vi lager lukket krets: $I = \Delta V / R = vBl / R$

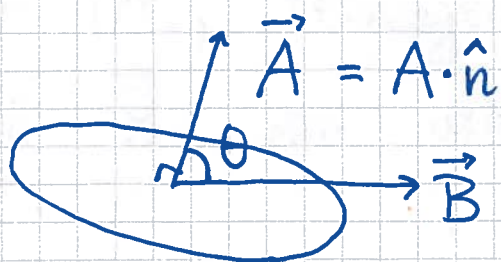


$$\Delta V = vBl = \frac{dx}{dt} Bl = \frac{d}{dt} (Blx) = \frac{d}{dt} (B \cdot A)$$

med $A = lx$ = areal omsluttet av strømsløyfa

Magnetisk fluks [YF 27.3; LHL 23.7 (19.7)]

(176)

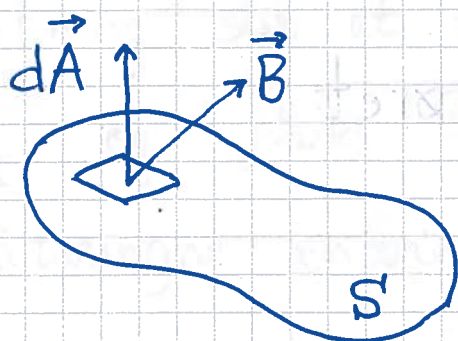


Magnetisk fluks gjennom flaten er

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \theta$$

når $\vec{B}$ er uniformt og flaten er plan.

Generelt:



$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

I eksempelet s. 175 har vi nå:

$$\Delta V = (-) d\Phi/dt$$

Faradays induksjonslov

Indusert spenning i sløyfe er lik endring i omsluttet magnetisk fluks pr tidsenhet.

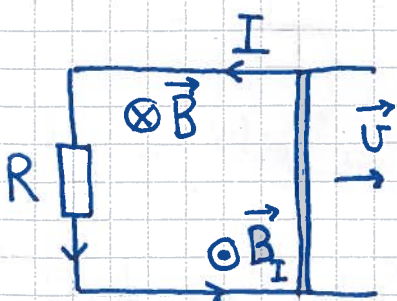
Dette viser seg å gjelde generelt, enten det er $|\vec{A}|$, retningen på $\vec{A}$, $|\vec{B}|$ eller retningen på $\vec{B}$ som varierer med tiden t .

Lenz' lov [YF 29.3 ; LHL 24.1]

"Naturen motsetter seg endringer"

Mer presist: Fortegnet på induert spenning ΔV er slik at (en eventuell) induert strøm I får retning slik at tilhørende induert magnetfelt $\vec{B}_I$ og fluks $\Phi_I = \vec{B}_I \cdot \vec{A}$ motvirker den påtvungne endringen representert ved $\Delta\Phi$.

Eks:



Påtvungen endring: Økt omsluttet fluks inn i planet (pga større areal)

Naturens svar: Indusert strøm

I mot klokka, som gir induert omsluttet fluks

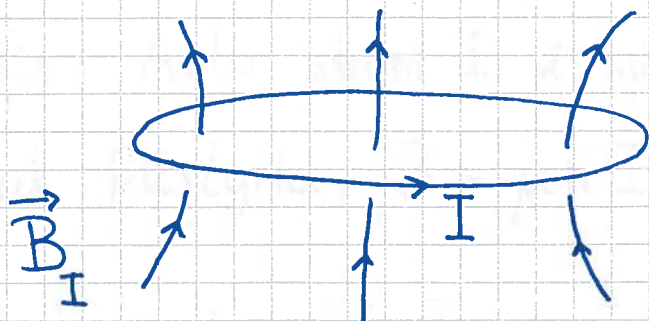
$\Phi_I = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ ut av planet, som motvirker endringen.

Induktans

[YF 30.2; LHL 25.1]

(178)

Selvinduktans:



Fra Biot-Savarts lov følger det at $\vec{B}_I$ er proporsjonal med I , og dermed at omskuttet fluks

$$\Phi = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$$

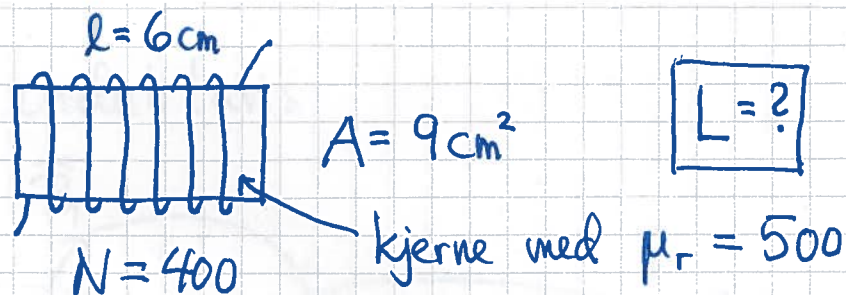
også er prop. med I :

$$\boxed{\Phi = L \cdot I}$$

L = sløyfas (selv-)induktans

$$\begin{aligned} \text{Enhet: } [L] &= [\Phi/I] = [B \cdot A/I] = T \cdot m^2/A \\ &= H \quad (\text{henry}) \end{aligned}$$

Eks:



(179)

Løsn: Anta strøm I i spoletråden, og ideell spole med feltstyrke $B = \mu n I$ overalt inni spolekjernen.

$$\Rightarrow B = \mu_r \mu_0 \frac{N}{l} I$$

$$\Rightarrow \Phi = NBA = N^2 \mu_r \mu_0 A I / l$$

$$\Rightarrow L = \Phi / I = \underline{N^2 \mu_r \mu_0 A / l}$$

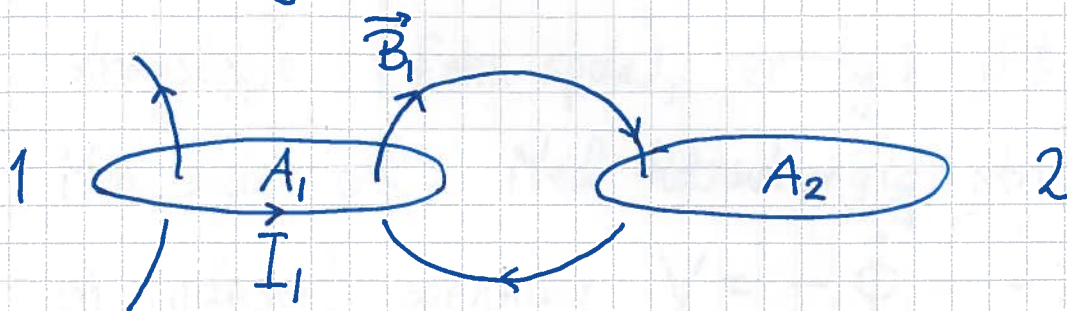
$$= 400^2 \cdot 500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{-4} / 6 \cdot 10^{-2}$$

$$\approx \underline{\underline{1.5 \text{ H}}}$$

- Merk at L øker med N^2
- Med $[L] = \text{H}$ og $[A/l] = \text{m}$ ser vi at $[\mu] = [\mu_0] = \text{H/m}$.

$$(\text{Jf } [\epsilon] = [\epsilon_0] = \text{F/m})$$

Gjensidig induktans



Strøm I_1 i sløyfe 1 $\Rightarrow$ Fluks $\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2$
 omsluttet av sløyfe 2. Siden B_1 er prop. med I_1 ,
 blir Φ_2 prop. med I_1 : $\Phi_2 = M_{21} \cdot I_1$

Og omvendt : I_2 i sløyfe 2 $\Rightarrow \Phi_1 = \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1$
 omsluttet av sløyfe 1, prop. med I_2 : $\Phi_1 = M_{12} \cdot I_2$

Kan vises at $M_{21} = M_{12} = M$, dvs

$$\Phi_2 = M I_1 \quad ; \quad \Phi_1 = M I_2$$

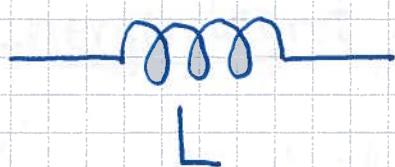
M = sløyfenes gjensidige induktans

$$[M] = H \quad (\text{henry})$$

Induksjon: Dersom $dI/dt \neq 0$ i ei strømsløyfe (f.eks. spole), er også $d\phi/dt \neq 0$.

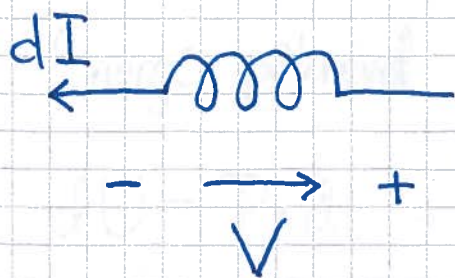
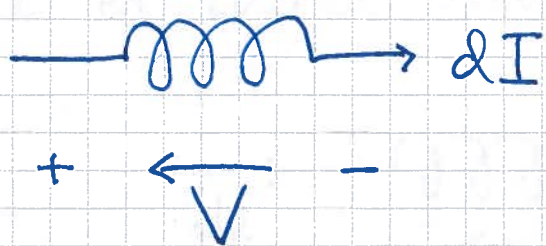
Med andre ord: Med tidsavhengig strøm I fås en induisert spenning $V = - \dot{\phi} = -L\dot{I}$, med retning i tråd med Lenz' lov, dvs slik at påvirkningen endring i strømmen I motvirkes.

Spole som kretselement:

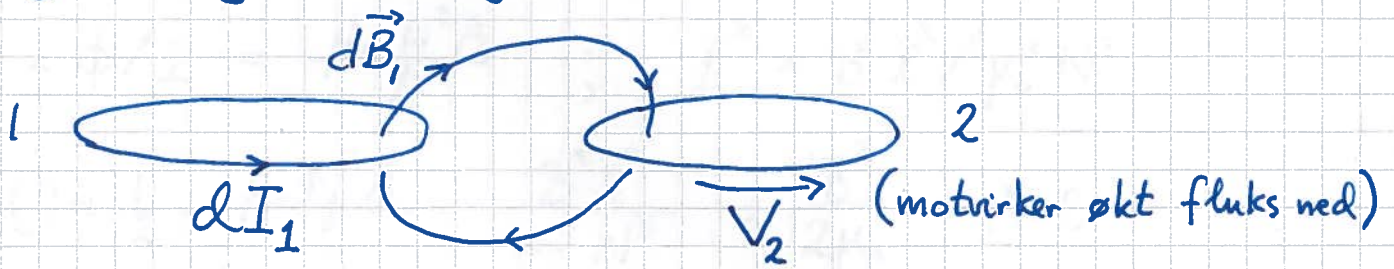


$$V = -L \frac{dI}{dt}$$

Retning på V :



Gjensidig induksjon:

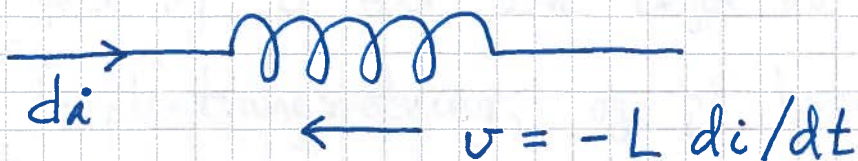


$$\dot{I}_1 \neq 0 \Rightarrow V_2 = -\dot{\Phi}_2 = -M\dot{I}_1$$

$$\dot{I}_2 \neq 0 \Rightarrow V_1 = -\dot{\Phi}_1 = -M\dot{I}_2$$

Energi lagret i $\vec{B}$ -felt [YF 30.3 ; LHL 25.3]

Regner ut arbeidet som må gjøres mot den induerte spenningen for å øke strømmen fra $i=0$ til $i=I$ i en ideell spole (der $B=\mu_0 nI$ inni spolen).



Energi påkrevd for å øke strøm fra i til $i+di$:

$$dU = P \cdot dt = -v \cdot i \, dt = L \frac{di}{dt} \cdot i \, dt = L \cdot i \cdot di$$

Fra $i=0$ til $i=I$:

$$U = \int dU = \int_0^I L i \, di = \underline{\underline{\frac{1}{2} L I^2}}$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I ; \quad \phi = NAB = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} I ;$$

$$L = \phi / I = \frac{\mu_0 N^2 A}{l} ; \quad I^2 = B^2 l^2 / \mu_0^2 N^2$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \cdot \frac{B^2 l^2}{\mu_0^2 N^2} = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot \underbrace{A \cdot l}_{= \text{volumen i spolen, der } B \neq 0}$$

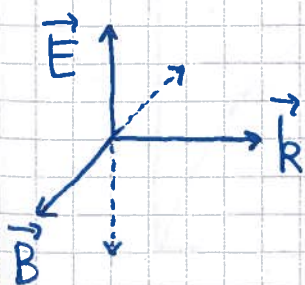
$\Rightarrow$ Energi pr volumenhet i magnetfelt:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Eks: Elektromagnetiske bølger (lys etc) er forplantning af $\vec{E}$ -felt og $\vec{B}$ -felt som begge står normalt på bølgens forplantningsretning, og på hverandre:



$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad c = \lambda f, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow c = \frac{\omega}{k}$$

$$E = c \cdot B \Rightarrow u_B = \frac{E^2/c^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = u_E$$

(siden $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$)

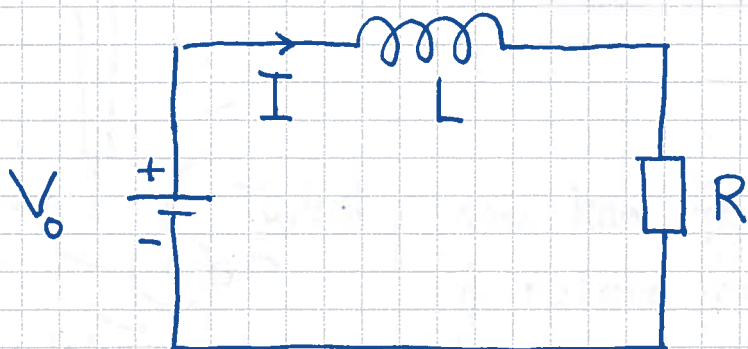
$$\Rightarrow u = 2u_E = \epsilon_0 E^2$$

Kretser og anvendelser ; DC og AC

(184)

[YF 30.4+5+6 ; LHL 25.2, 27.1+2+3+5]

① RL-krets ; DC



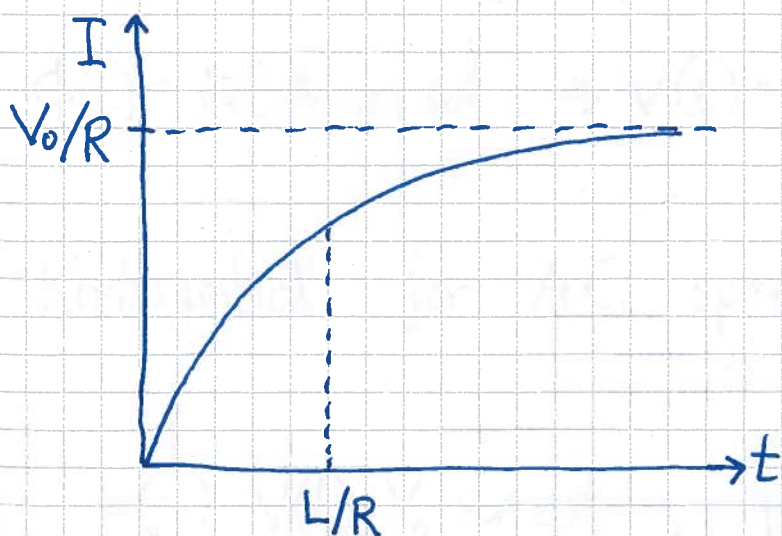
V_0 kobles til
ved $t=0$

$$K2: V_0 - L \frac{dI}{dt} - RI = 0$$

Samme ligning for I som for Q i RC-kretsen

$$\Rightarrow \text{Tilsvarende løsning: } I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

med tidskonstant $\tau = L/R$



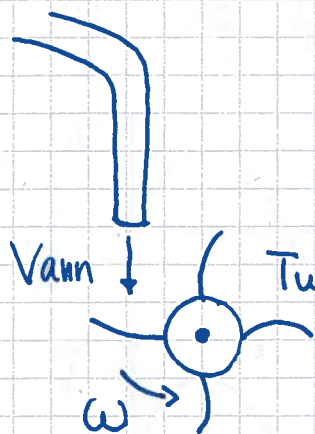
Induktansen L gir
indusert motspenning
i kretsen når vi med
 V_0 prøver å øke
strømmen. Dermed
blir I ikke umiddelbart
lik V_0/R ; det tar
litt tid; tidsskala
gitt av $\tau = L/R$

AC spenningskilde

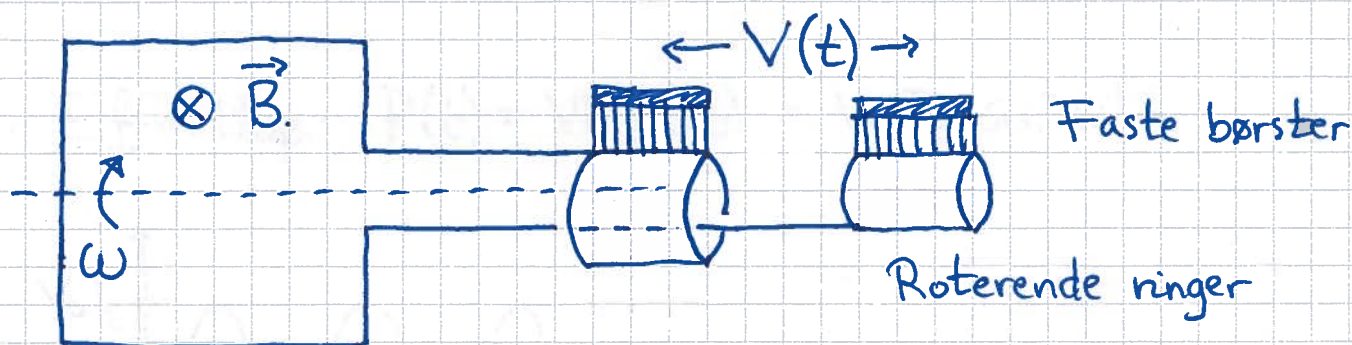
(AC = alternating current
= vekselstrøm)

185

AC-generator ; prinsipp :



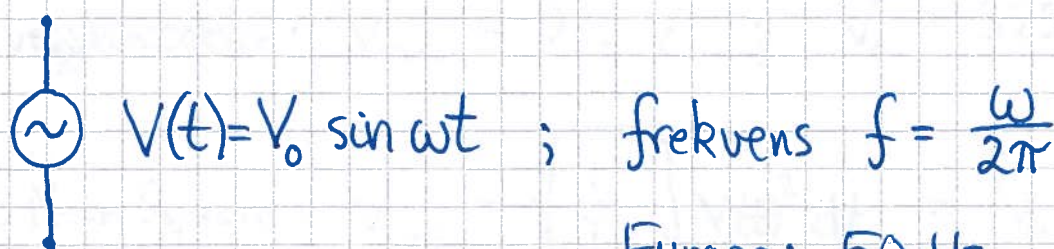
Turbin, som kan få magneter eller spoler til å rotere relativt hverandre. og gi harmonisk tidsavhengig omsluttet fluks.



N viklinger, omsluttet areal A

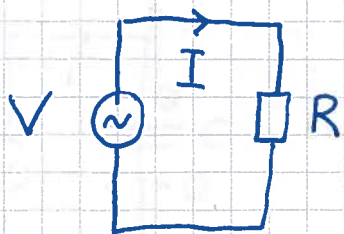
$$\Phi(t) = NBA \cos \omega t \Rightarrow V(t) = V_0 \sin \omega t ; V_0 = NBA \omega$$

Kretssymbol for AC spenningskilde:



Europa: 50 Hz (USA: 60 Hz)

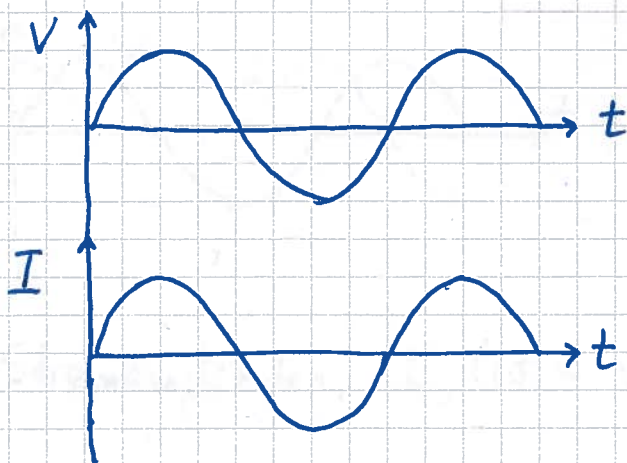
②



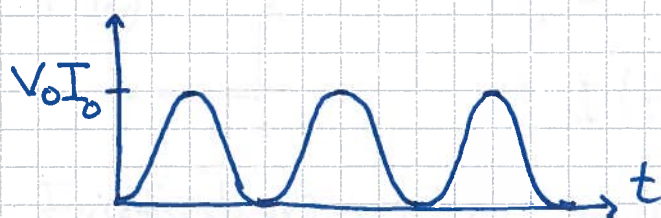
$$K2: V_0 \sin \omega t - RI = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 \sin \omega t ; I_0 = \frac{V_0}{R}$$

$V(t)$ og $I(t)$ "svinger" fram og tilbake i fase :



Effekttap: $P(t) = V(t)I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$



Midlere effekttap: $\langle P \rangle = V_0 I_0 \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0$

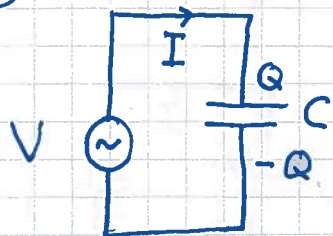
Effektivverdier: $\langle P \rangle = V_{rms} \cdot I_{rms}$ med

$$V_{rms} = V_0 / \sqrt{2} , I_{rms} = I_0 / \sqrt{2}$$

I veggkontakten: $V_{rms} \approx 230 \text{ V} ; V_0 \approx 325 \text{ V}$

(Root Mean Square: $V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V(t)^2 dt} = V_0 / \sqrt{2}$)

③

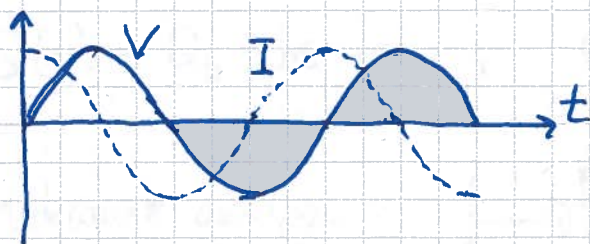


$$K2: V_0 \sin \omega t - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow Q(t) = V_0 C \sin \omega t$$

$$\Rightarrow I(t) = V_0 \omega C \cos \omega t$$

Dvs faseforskjell $\pi/2$ mellom $V(t)$ og $I(t)$:

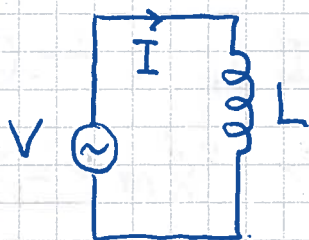


$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= V_0 I_0 \langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle \\ &= \frac{1}{2} V_0 I_0 \langle \sin 2\omega t \rangle = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

Tapsfritt kretselement.

Strøamplituden, $I_0(\omega) = V_0 \omega C$, øker med frekvensen.

④

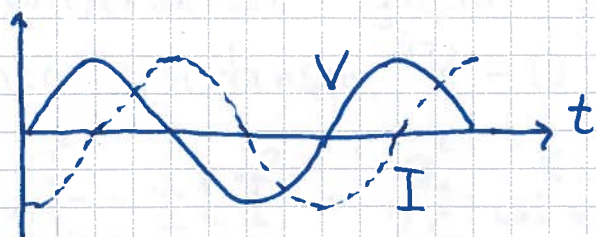


$$K2: V_0 \sin \omega t - L \dot{I} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{I} = \frac{V_0}{L} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t$$

Faseforskjell $\leftarrow \pi/2$ mellom $V(t)$ og $I(t)$:



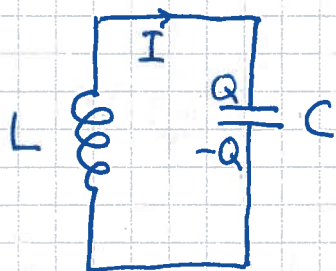
$$\langle P \rangle \sim \langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle = \underline{\underline{0}}$$

Tapsfritt.

$I_0(\omega) = V_0 / \omega L$ avtar med frekvensen.

⑤ LC-krets

188



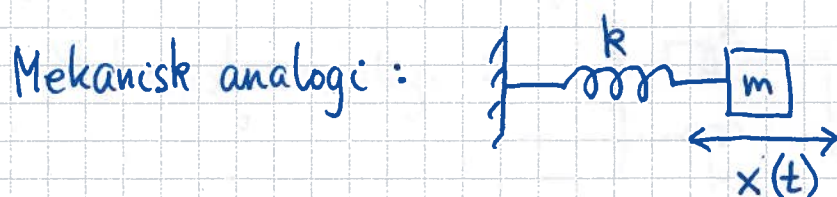
Anta $Q(0) = Q_0$

K2: $-L\dot{I} - Q/C = 0$; $I = \dot{Q}$

$\Rightarrow \ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$

$\Rightarrow$ Harmonisk oscillator!

$Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$



$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Analoge størrelser:

$Q \leftrightarrow x$; $I \leftrightarrow \dot{x}$; $L \leftrightarrow m$; $C \leftrightarrow 1/k$

$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} L I^2 = \text{energi i } \vec{B}\text{-feltet i spolen}$

$U = \frac{1}{2} k x^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2 = \text{---} \vec{E}\text{-feltet i kondensatoren}$

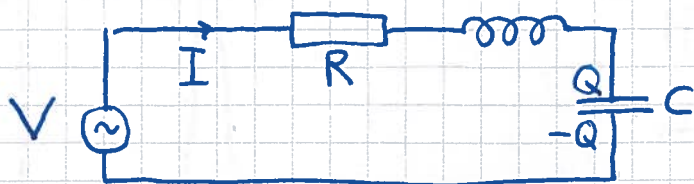
Konservativt system, ingen dissipasjon av energi
når resistansen $R = 0$:

$\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} L Q_0^2 \underbrace{\omega_0^2}_{=1/LC} \sin^2 \omega_0 t$

$= \frac{Q_0^2}{2C} = \text{konstant}$

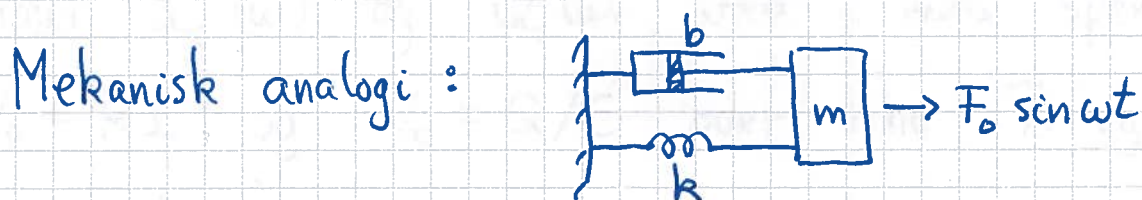
⑥ RLC resonanskrets

(189)



$$K2: V_0 \sin \omega t - RI - L \dot{I} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L \ddot{Q} + R \dot{Q} + \frac{1}{C} Q = V_0 \sin \omega t$$



$$N2: m \ddot{x} + b \dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

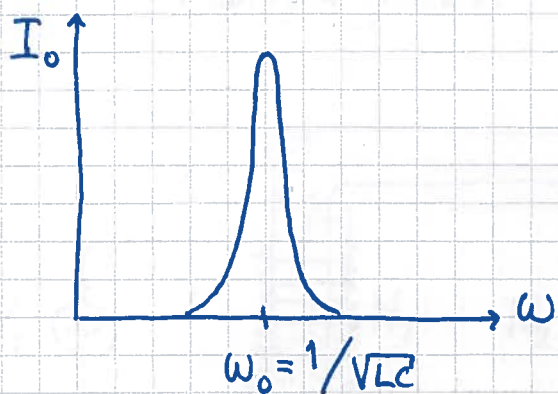
$$\text{ders } b \leftrightarrow R \text{ og } F_0 \leftrightarrow V_0$$

$\Rightarrow$ Resonans når $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, ders maksimal strømamplitude I_0 når $\omega \approx \omega_0$. Alt vi kan om det mek. syst. kan "oversettes" til RLC-kretsen:

$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}; \quad 2\gamma = R/L$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{med } I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$$



Halvverdbredda:

$$\Delta\omega = 2\delta = R/L$$

Kvalitetsfaktor:

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

Måler $I_0(\omega)$ og $Q_0(\omega)$ ved å måle spenningene

$V_R = RI$ og $V_C = Q/C$ over hhv R og C .

Impedans:

$$Z(\omega) = \frac{V_0}{I_0(\omega)} = \text{kretsens impedans; en slags}$$

generalisert motstand for AC-kretser. Vi ser at

$[Z] = \Omega$, og at $Z_R = R$ (uavh. av ω),

$Z_C = 1/\omega C$, $Z_L = \omega L$.

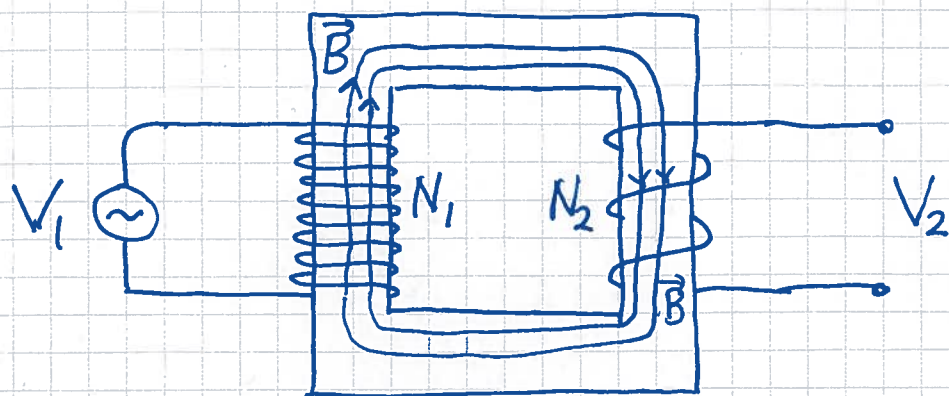
For RLC resonanskretsen:

$$Z(\omega) = \omega L \cdot \sqrt{(1 - \omega_0^2/\omega^2)^2 + (2\delta/\omega)^2}$$

som blir spesielt liten når $\omega = \omega_0$

⑦ Transformator

191



Jernkjernen fører til at feltlinjene for $\vec{B}$ følger jernet

$\Rightarrow$ samme $|\vec{B}|$ i begge spoler

$$\Phi_1 = N_1 AB, \quad \Phi_2 = N_2 AB$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\dot{\Phi}_1}{\dot{\Phi}_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

$\Rightarrow$ Spenningen inn (V_1) kan transformeres til spenning ut (V_2), med redusert eller økt amplitude, med hhv $N_2 < N_1$

og $N_2 > N_1$:

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1$$