

# Størrelser og enheter [YF1]

①

Eks:

Lengde ;

$$l = 42.2 \text{ km}$$

dekadisk forstørrelse  
(k=kilo =  $10^3$ )

↑  
fysisk  
størrelse

↑  
symbol

↑  
tallverdi

↑  
SI-enhet

(her: 3 gjeldende siffer)

Notasjon:  $[l] = \text{m}$

"SI-enheten til lengde er meter"

Grunnenheter i SI-systemet:

Lengde  $[l] = \text{m}$

Masse  $[m] = \text{kg}$

Tid  $[t] = \text{s}$

Strømstyrke  $[I] = \text{A}$

Temperatur  $[T] = \text{K}$

Stoffmengde  $[n] = \text{mol}$

Lysstyrke  $[I] = \text{cd}$

②

Sammensatte enheter:

Hastighet  $[v] = \text{m/s}$

Akselerasjon  $[a] = \text{m/s}^2$

Impuls (beregelsesmengde)  $[p] = \text{kg m/s}$

osv.

Avledete enheter (med egne symboler):

Kraft  $[F] = \text{kg m/s}^2 = \text{N}$

Energi  $[W] = \text{N m} = \text{J}$

Effekt  $[P] = \text{J/s} = \text{W}$

Ladning  $[Q] = \text{A s} = \text{C}$

osv.

Se f.eks [wikipedia.no](http://wikipedia.no)

Se også (f. eks)

[www.nature.com/articles/nphys3612.pdf](http://www.nature.com/articles/nphys3612.pdf)

om redefinisjon av kg, A, K og mol,  
muligens vedtatt allerede 16.11.2018!

Se også "1001 Gram", med Ane Dahl Torp !!

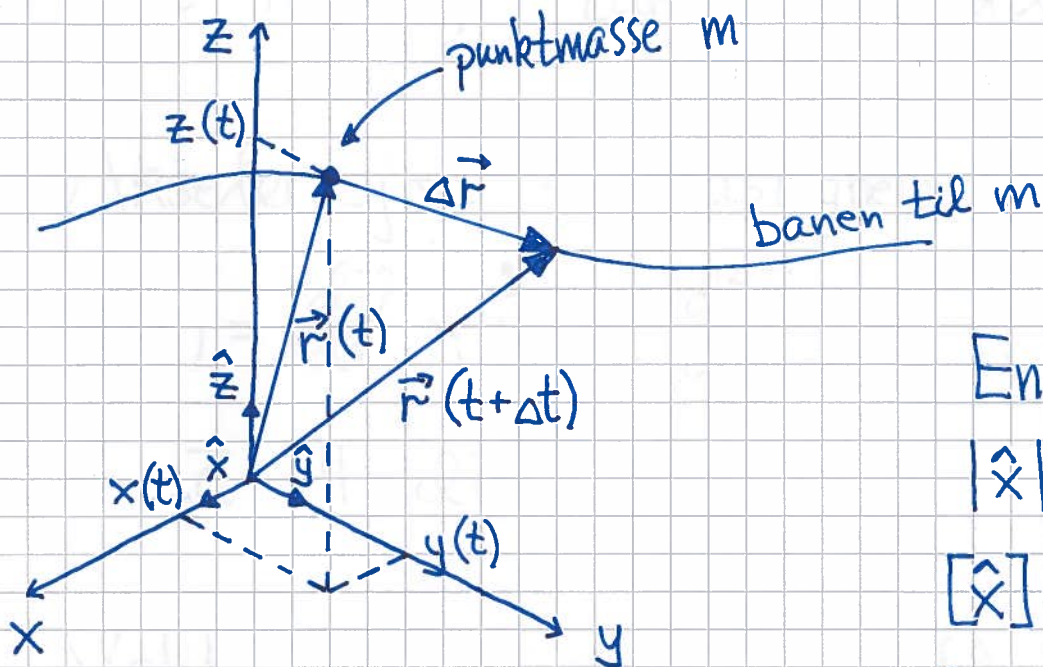
# MEKANIKK

[YF 2-11, 14; LL 1-7, 9]

(3)

## Kinematikk

[YF 2, 3; LL 1]



Enhetsvektorer:

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1$$

(dvs dimensjonsløse)

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 ; \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

Posisjon (til m, ved tid  $t$ ):

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

Forflytning (i løpet av  $\Delta t$ ):

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet  $\stackrel{\text{def}}{=} \text{forflytning pr tidsenhet}$

(4)

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow \vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$ , tangentiell til banen

Akselerasjon  $\stackrel{\text{def}}{=} \text{hastighetsendring pr tidsenhet}$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow \vec{a} \parallel d\vec{v}$

Vektorrelasjonene må gjelde komponentvis:

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z}$$

med  $v_x = dx/dt = \dot{x}$  osv

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}$$

med  $a_x = dv_x/dt = d^2x/dt^2$  osv

Derivasjon gir  $\vec{v}$  fra  $\vec{r}$  og  $\vec{a}$  fra  $\vec{v}$  (5)

$\Rightarrow$  Integrasjon gir  $\vec{r}$  fra  $\vec{v}$  og  $\vec{v}$  fra  $\vec{a}$ :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt}$$

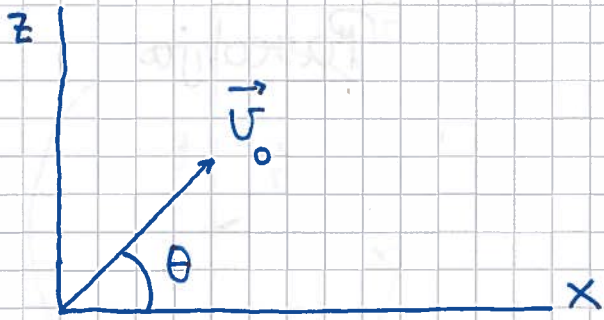
Dersom  $\vec{a}$  er konstant:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t ; \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 ; \quad \vec{r}(0) = \vec{r}_0$$

# Eks: Kast i tyngdefeltet

(6)



$$\vec{a} = -g \hat{z}$$

$$\vec{r}(0) = 0, \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0$$

Find  $\vec{r}(t)$  og banen  $z(x)$

Løsn:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t = \vec{v}_0 - gt \hat{z}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{z}$$

$$\Rightarrow x(t) = v_0 t \cos \theta, \quad z(t) = v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

Banen:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \theta}$$

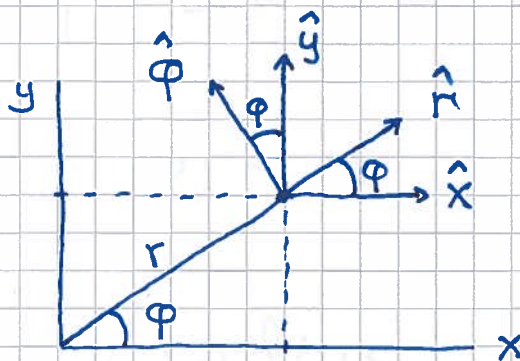
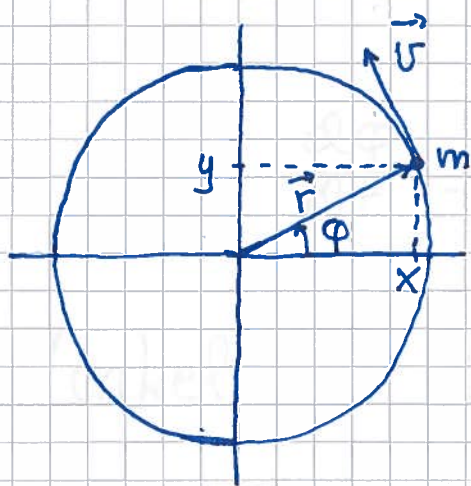
$$\Rightarrow z(x) = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$$

Parabel (som observeret)

# Sirkelbevegelse

[YF 3.4 ; LL 1.7, 1.8]

(7)



Polarkoordinater :

$r$  = avstand fra origo

$\varphi$  = vinkel mellom  $\hat{x}$  og  $\hat{r}$ , positiv mot klokka

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$\varphi = \arctan(y/x), \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{r} = \hat{x} r \cos \varphi + \hat{y} r \sin \varphi = r \hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

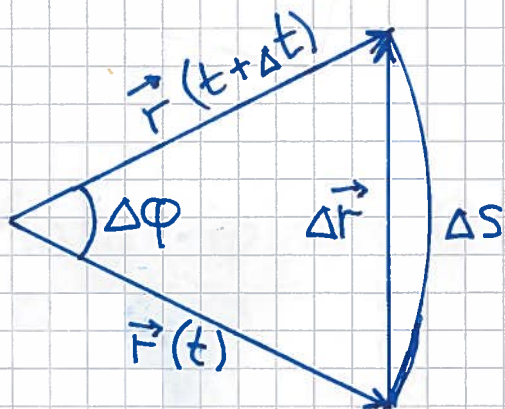
Vinkelhastighet  $\stackrel{\text{def}}{=}$  omløpt vinkel  
pr tidsenhet

⑧

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} ; [\omega] = s^{-1}$$

Vinkel  $\stackrel{\text{def}}{=}$  buelengde / radius

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r} ; [\varphi] = 1 \text{ (rad)}$$



Når  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\Delta\varphi \rightarrow 0$$

$$\Delta r = |\Delta\vec{r}| \rightarrow \Delta s = r \Delta\varphi$$

$$\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$$

$$\Rightarrow v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta\varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega$$

$$\vec{v} \parallel \Delta\vec{r} \text{ og } \Delta\vec{r} \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{r}$$

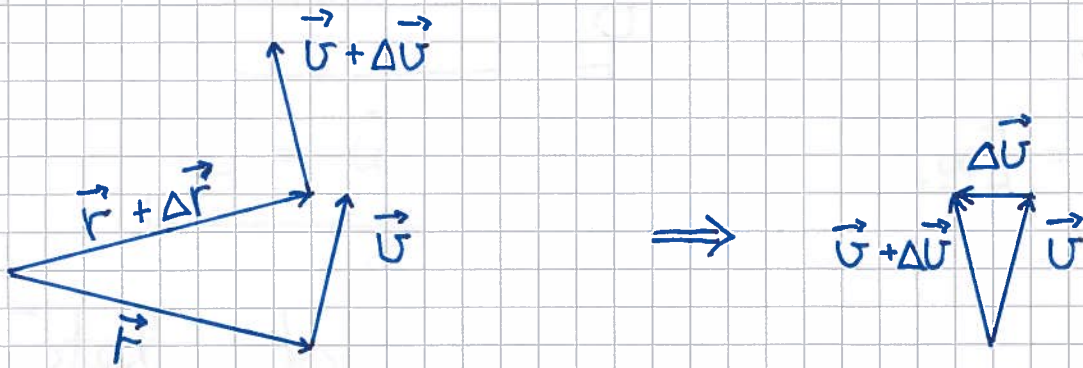
$$\Rightarrow \vec{v} = v \hat{\varphi} = r\omega \hat{\varphi}$$



Akselerasjon ved sirkelbevegelse:

(9)

Anta uniform sirkelbevegelse, dvs konstant  $\omega$  og  $v$ . Ser da at  $\Delta \vec{v}$ , og dermed  $\vec{a}$ , peker inn mot sentrum:



Anta  $\varphi(0) = 0$

$$\Rightarrow \int_0^{\varphi} d\varphi = \omega \int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \hat{x} r \cos \omega t + \hat{y} r \sin \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = -\hat{x} \omega r \sin \omega t + \hat{y} \omega r \cos \omega t$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{a}(t) &= -\hat{x} \omega^2 r \cos \omega t - \hat{y} \omega^2 r \sin \omega t \\ &= -\omega^2 \vec{r}(t) \end{aligned}$$

som kalles sentripetalakselerasjonen

$$\boxed{\vec{a}_{\perp} = -\omega^2 \vec{r}}$$

Dersom  $\omega$  og  $v$  også endrer seg,  
har vi baneakselerasjon ;

$$a_{\parallel} = \dot{v} = r \dot{\omega}$$

og vinkelakselerasjon

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$$

$$[\alpha] = s^{-2}$$

Total akselerasjon blir

$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel} = -\omega^2 r \hat{r} + \dot{\omega} r \hat{\varphi}$$

$$\omega = v/r \Rightarrow \vec{a}_{\perp} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$$

Periode = tid pr omløp :  $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$

Frekvens = antall omløp pr tidsenhet :  $f = \frac{1}{T}$

$$\Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

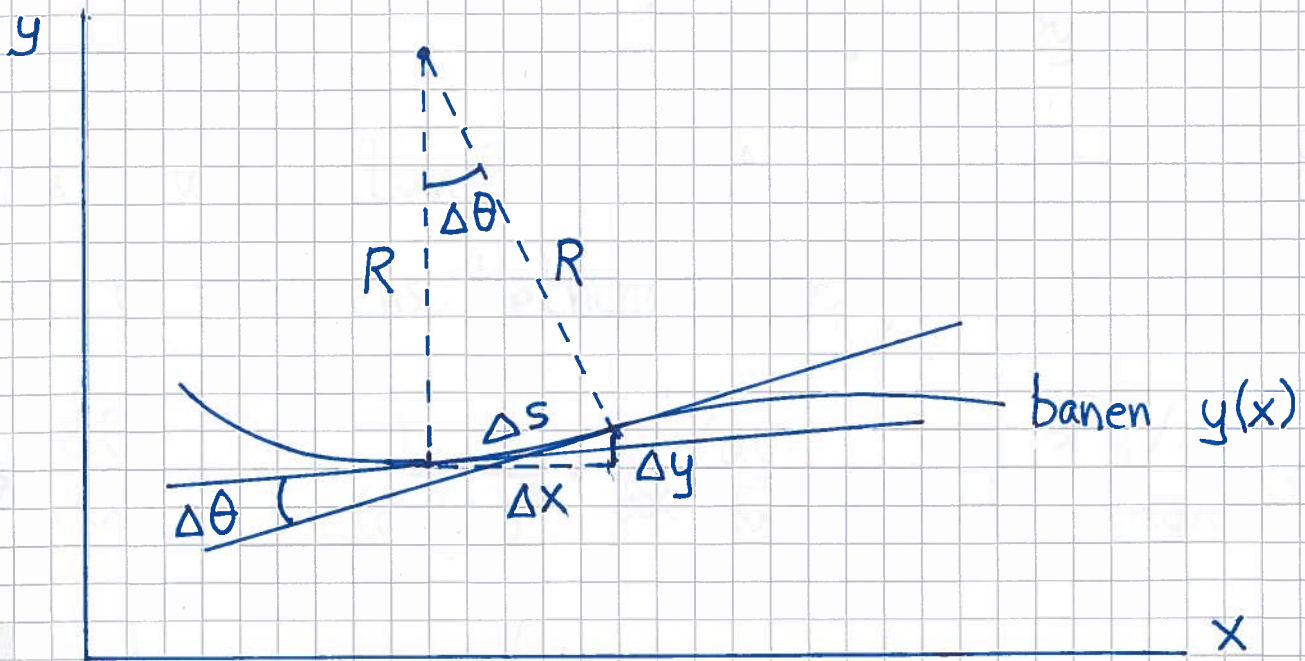
$$[T] = s ; [f] = s^{-1} = \text{Hz} \quad (\text{hertz})$$

$$[\omega] = s^{-1}$$

# Krumlinjet bevegelse

(11)

(Ff. lab og kumpete veier)



$$a_{\perp} = v^2/R$$

$R$  = radius i "tenkt" sirkel som best tangerer banen  $y(x)$  = krumningsradien

Små  $\Delta s$  og  $\Delta \theta \Rightarrow \Delta s \rightarrow ds, \Delta \theta \rightarrow d\theta$

Vinkeldef:  $d\theta = ds/R \Rightarrow R = ds/d\theta$

Pythagoras:  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$$\Rightarrow ds = dx \cdot \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$$

$$\text{Kjernerregel: } \frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds}$$

(12)

$$= \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}$$

Fra figur:  $\tan \theta = dy/dx \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$   
(der  $\theta$  = banens helningsvinkel)

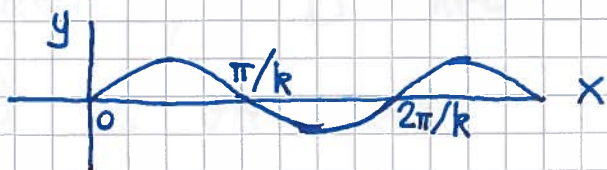
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1 + (dy/dx)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y/dx^2}{1 + (dy/dx)^2}$$

Gir krumningsradius

$$R = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

(der  $R$  velges positiv)

Eks:  $y(x) = y_0 \sin kx$



$$y'(x) = y_0 k \cos kx, \quad y''(x) = -y_0 k^2 \sin kx$$

$$\Rightarrow R = [1 + y_0^2 k^2 \cos^2 kx]^{3/2} / |y_0 k^2 \sin kx|$$

da  $R \rightarrow \infty$  for  $kx = n\pi$

$$\Rightarrow \kappa = 1/R = \text{"krumningen"} = 0 \quad \text{for } kx = n\pi$$

# Newton's lover [YF 4,5; LL 2,3] (13)

$m, \vec{v}, \vec{a}$  = legemets masse, hastighet, akselerasjon

$\vec{F}$  = netto ytre kraft på legemet

N1:  $\vec{F} = 0 \iff \vec{v} = \text{konstant}$

N2:  $\vec{F} = m\vec{a}$

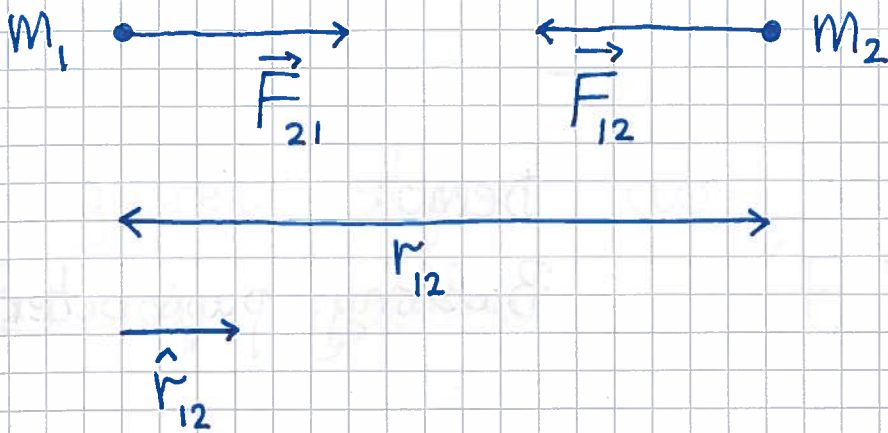
N3:  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Dvs: Krefter er vekselvirkning mellom legemer. Dersom A virker på B med kraft  $\vec{F}_{AB}$ , virker B på A med kraft  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

$$[F] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \quad (\text{newton})$$

# Fundamentale krefter i naturen [YFS.5; LL 2.1] (14)

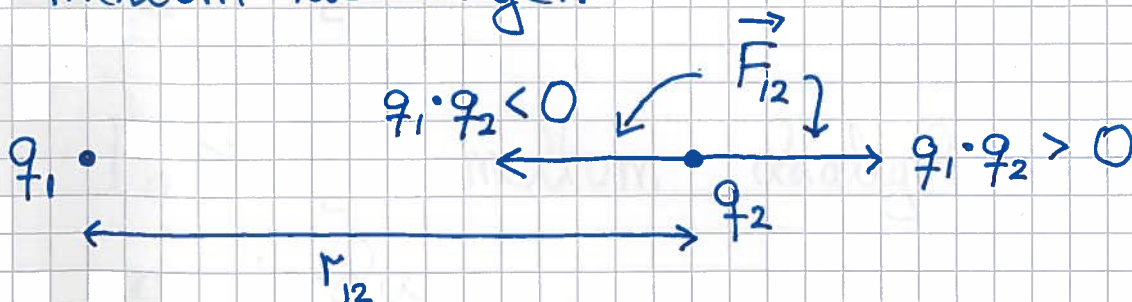
- Gravitasjon. Svak tiltrekning mellom masser.



Newton's gravitasjonslov: 
$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Gravitasjonskonstanten:  $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

- Elektromagnetisk v.u. Tiltrekning/frastøtning mellom ladninger.



Coulombs lov: 
$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$[q] = C = A \cdot s$  (coulomb)

Vakuumpemittiviteten:  $\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}$

- Kjernekrefter, svake og sterke. Svært kort rekkevidde. Gir hhv radioaktivitet og stabile atomkjerener. (15)



Dagliglivet styres av coulombkrefter ( $F_E$ ) og gravitasjon ( $F_G$ ).

Protonet:  $m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg,  $q = e \approx 1.6 \cdot 10^{-19}$  C

Elektronet:  $m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31}$  kg,  $q = -e$

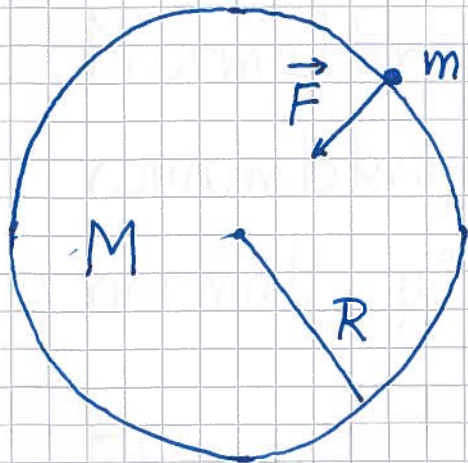
$\Rightarrow F_E \gg F_G$  mellom elementærpartikler, atomer, molekyler og "dagligdagse" legemer

$F_G \gg F_E$  mellom himmellegemer

$F_G \gg F_E$  mellom dagligdags legeme og jorda

# Tyngde [YF 4.4 ; LL 2.5]

16



Tyngden til  $m =$   
gravitasjonskraften på  
 $m$  fra  $M$  :

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

Jorda :  $M \approx 6 \cdot 10^{24}$  kg ,  $R \approx 6370$  km

$$\Rightarrow g = GM/R^2 \approx 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{tyngdens akselerasjon,}$$

når  $m$  er nær jordas overflate

Fritt fall hvis tyngdekraften  $mg$  er  
eneste kraft på  $m$  :

$$N2 : mg = ma \Rightarrow \underline{a = g}$$

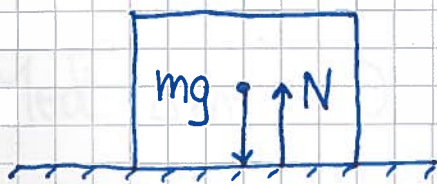


# Kontaktkrefter [YF 4.1 ; LL 3] (17)

Normalkraft:  $N$  = netto frastøtende coulombkraft mellom to legemer i kontakt, normalt på kontaktflaten

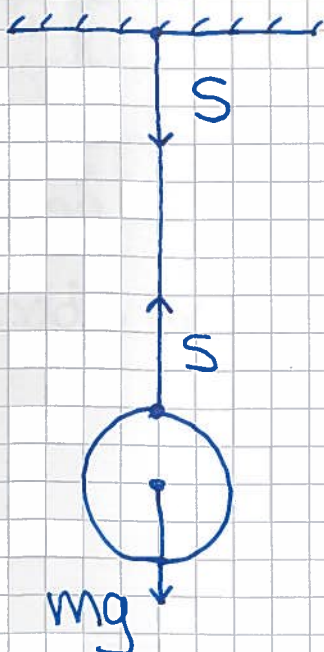
Eks:

Hvis kloss i ro:



$$N = mg \quad (\text{pga } N1)$$

Snorkraft:  $S$  = netto tiltrekkende coulombkraft mellom snora og legemet som henger i snora

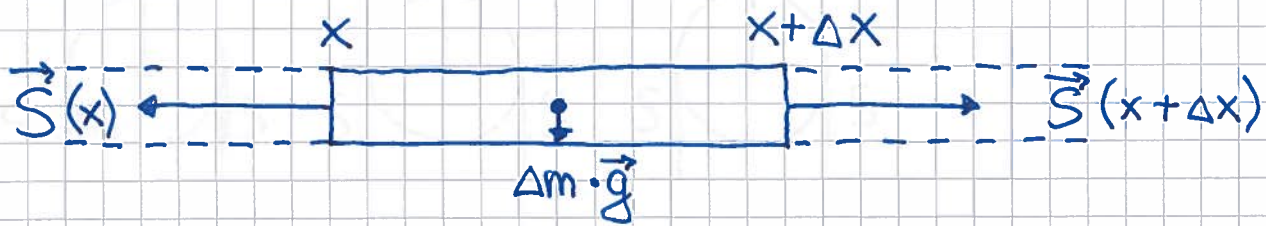


Hvis kule i ro:

$$S = mg \quad (\text{pga } N1)$$

[ Hva er "N3-motkreftene" til  $mg$ ,  $N$  og  $S$  ? ]

Lett og stram snor blir rett, med (18)  
konstant snordrag  $S$ :

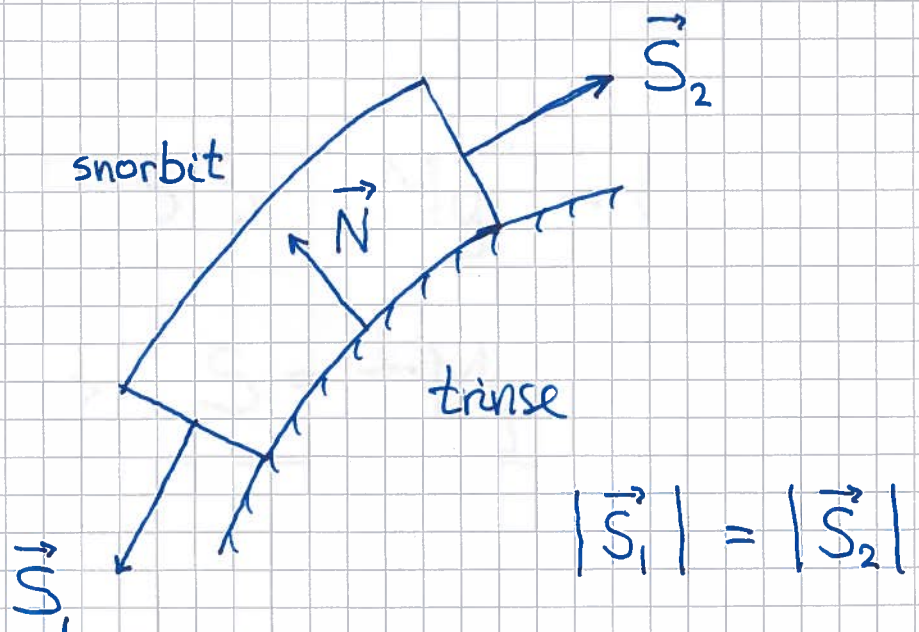
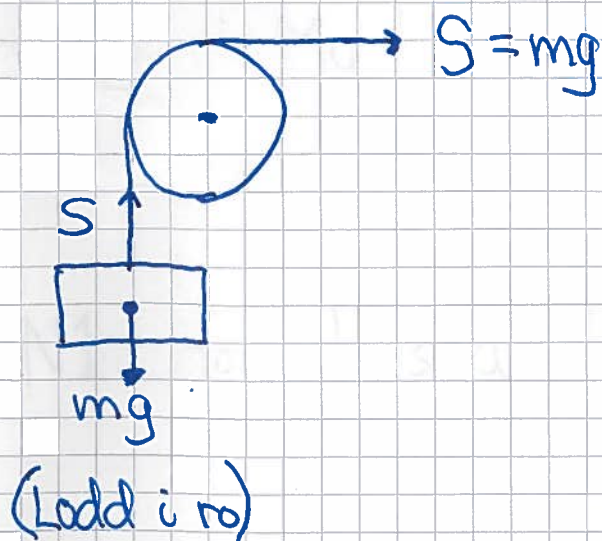


$$N2: \vec{S}(x) + \vec{S}(x+\Delta x) + \Delta m \cdot \vec{g} = \Delta m \cdot \vec{a}$$

Med  $\Delta m \approx 0$  er  $\vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x)$

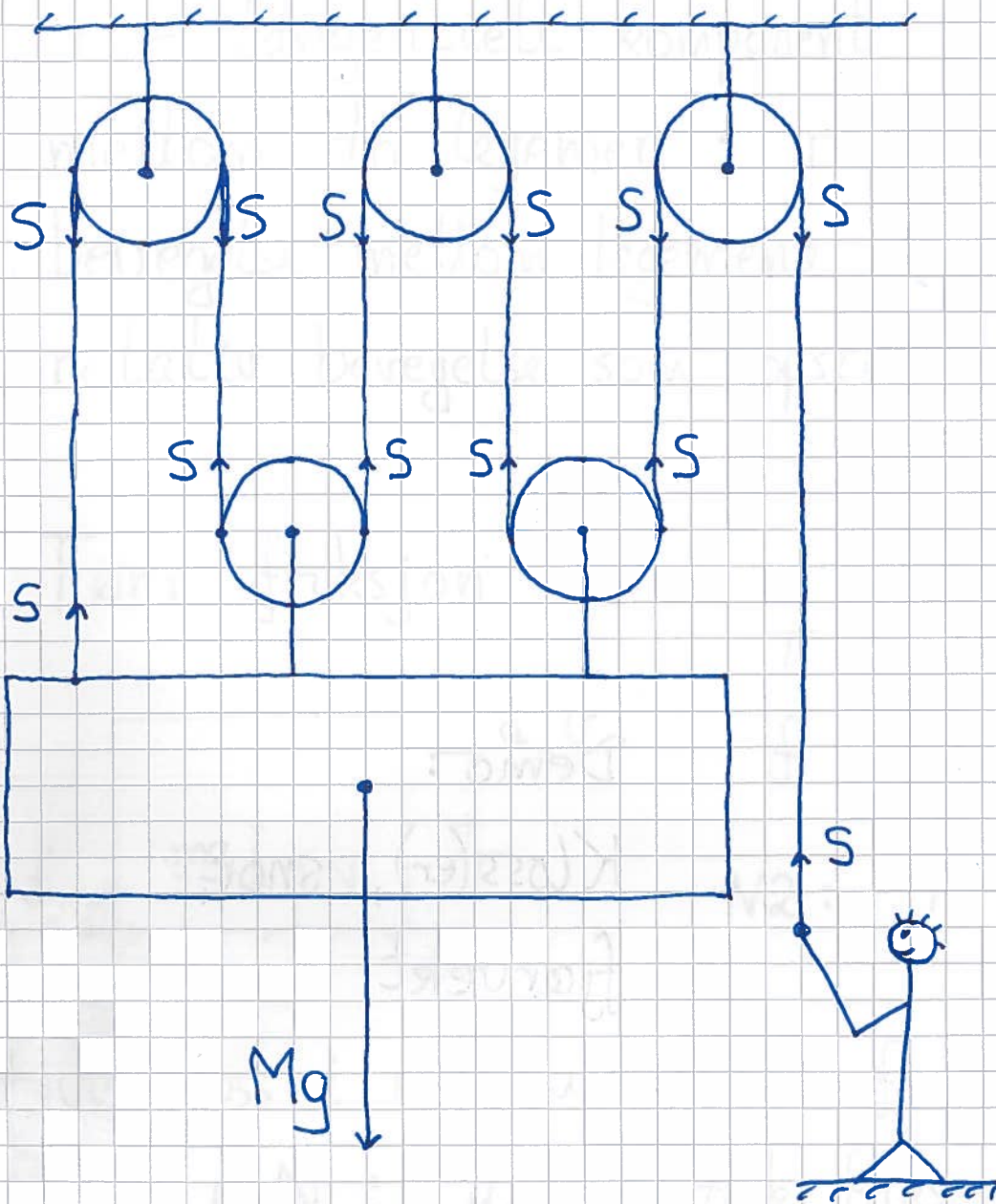
$\Rightarrow S = |\vec{S}|$  konstant langs snora

Friksjonsfri trinse endrer retning på  $\vec{S}$ :



Talje :

19



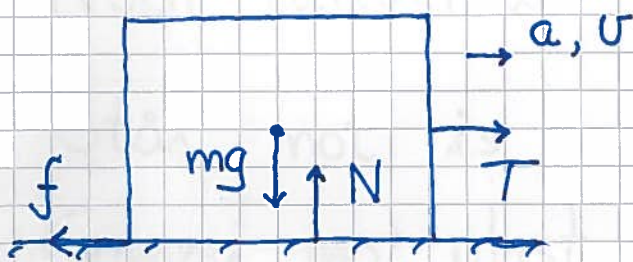
$$N1 \text{ for kassa: } 5S - Mg = 0$$

$$\Rightarrow \underline{S = \frac{1}{5} Mg}$$

# Friksjonskrefter: [YF 5.3; LL 3.1] (20)

$f$  = tangentiell komponent av kontaktkraft mellom to legemer; retning mot relativ bevegelse mellom legemene (ert: mot relativ bevegelse som oppstår uten friksjon)

## Tørr friksjon



$T$  = trekk-kraft

$f$  = friksjonskraft

$$N2: T - f = ma$$

Hvis kloss i ro ( $a = 0$ ):  $f = T$ ;

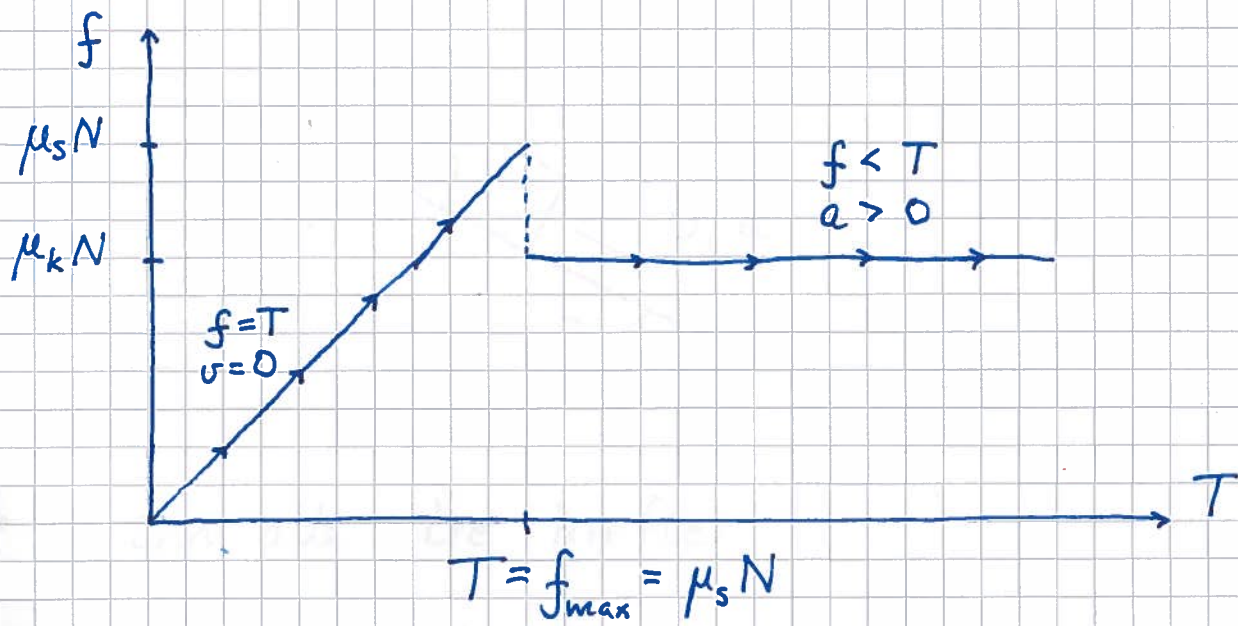
$f_{\max} = \mu_s N$ ;  $\mu_s$  = statisk friksjonskoeffisient

Klossen glir hvis  $T > f_{\max}$ ; da er

$f = \mu_k N$ ;  $\mu_k$  = kinetisk friksjonskoeffisient

Som regel er  $\mu_k \lesssim \mu_s$ : ujevnheter i overflatene gir best grep når  $v = 0$

Grafisk,  $f(T)$ :



Noen tallverdier:

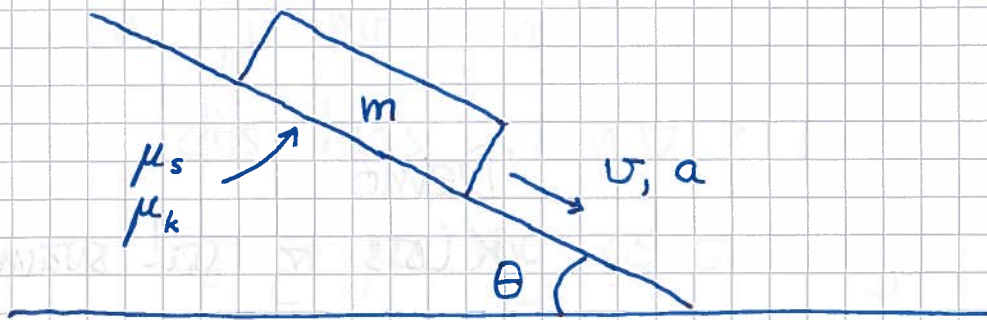
Stål mot is  $\mu_s \approx 0.03$

Gummi mot plast  $\mu_s \sim 1$

Våt svamp mot bordplate  $\mu_s > 1$

Eks (inkl problemløsningsstrategi):

(22)



- Finn alle ytre krefter



“fritt-legeme-diagram”

- Velg koordinatsystem. Dekomponer.



$$N = N_{\perp}, \quad N_{\parallel} = 0, \quad f = f_{\parallel}, \quad f_{\perp} = 0$$

$$G_{\perp} = mg \cos \theta, \quad G_{\parallel} = mg \sin \theta$$

- Bruk N1 ( $\sum_i \vec{F}_i = 0$ ) eller N2 ( $\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m$ )

$$N1, \perp : \quad N = mg \cos \theta$$

$$N2, \parallel : \quad mg \sin \theta - f = ma$$

Hvis kloss i ro :  $f = mg \sin \theta$  ( $a=0$ ) (23)

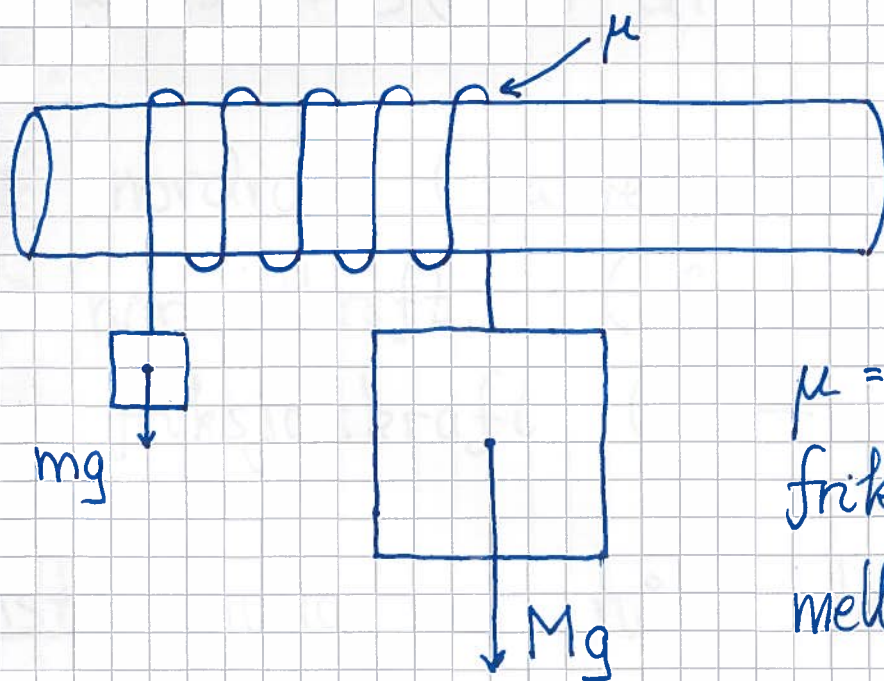
Klossen glir hvis  $mg \sin \theta > f_{\max} = \mu_s mg \cos \theta$   
dvs hvis  $\tan \theta > \mu_s$

Da er  $f = \mu_k mg \cos \theta$  og  
 $a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$

---

Eks : Snorfriksjon

[ "Med livet som innsats", youtube/nrk ]



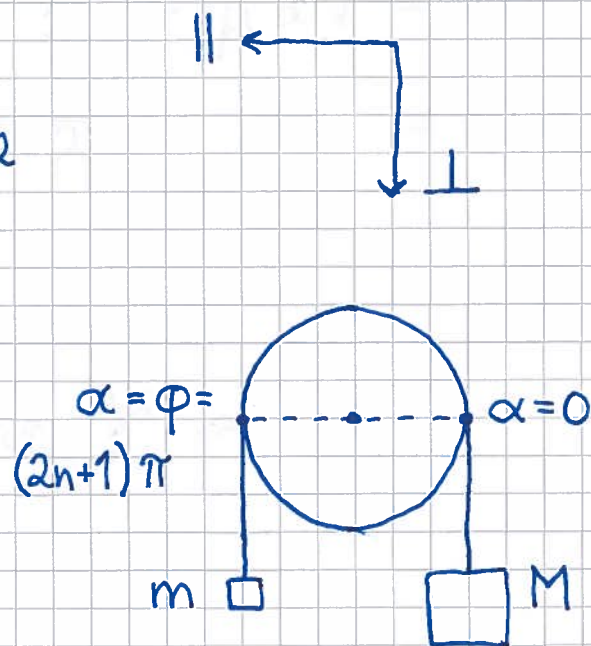
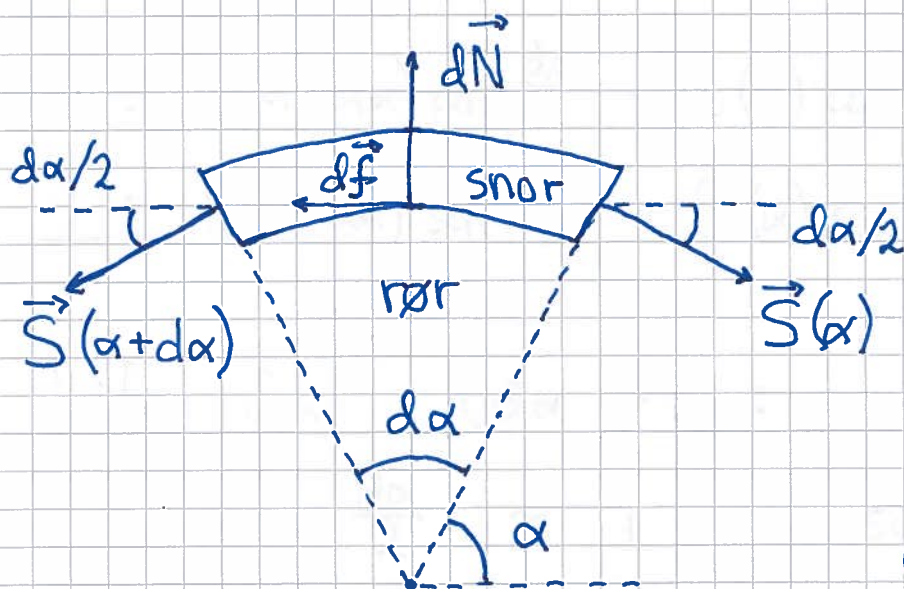
$\mu$  = statisk  
friksjonskoeff.  
mellom snor og rør

Bestem minste  $m$  som holder  $M$  oppe  
med kontaktvinkel  $\varphi$  mellom snor og rør.

I figuren er  $\varphi = 9\pi$ .

Løsn: N1 for liten snorbit

24



$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{S}(\alpha+d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$$

$\vec{S}$  = snordrag (fra resten av snora)

$d\vec{N}$  = normalkraft (fra røret)

$d\vec{f}$  = friksjonskraft ( — || — )

Minste mulige  $m$  når statisk friksjon er størst mulig, dvs

$$df = df_{\max} = \mu \cdot dN$$



Dekomponerer:

(25)

$$\parallel : S(\alpha + d\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} + \mu dN = 0$$

$$\perp : S(\alpha + d\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

Liten  $d\alpha$  ( $d\alpha \rightarrow 0$ ):

$$\cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

$$S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

$$S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha) = 2S$$

Dermed:

$$dS = -\mu dN, \quad S d\alpha = dN$$

$$\Rightarrow dS/S = -\mu d\alpha$$

Integrerer fra  $\alpha = 0$  til  $\alpha = \varphi$

(der  $\varphi = 9\pi$  ved 4.5 runder med snora):

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\mu \int_0^{\varphi} d\alpha \quad \Rightarrow \ln \frac{S(\varphi)}{S(0)} = -\mu\varphi$$

$$\Rightarrow \underline{S(\varphi) = S(0) e^{-\mu\varphi}}$$

Dvs, siden  $S(0) = Mg$  og  $S(\varphi) = mg$ : (26)

$$m = M \cdot \exp(-\mu\varphi)$$

I eksp. er  $\mu \approx 0.17$ ,  $M = 1 \text{ kg}$ ,  $\varphi = 9\pi$

$$\Rightarrow m = 1000 \text{ g} \cdot \exp(-0.17 \cdot 9\pi) \approx 8 \text{ g}$$

Omvendt: Nødvendig kraft for å heise

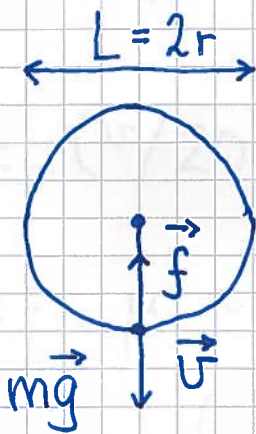
$M$  opp er  $S(\varphi) = S(0) \cdot \exp(+\mu\varphi)$

$$\Rightarrow m = 1 \text{ kg} \cdot \exp(+0.17 \cdot 9\pi) \approx 122 \text{ kg}$$

# Friksjon i fluider: [YF 5.3; LL 8]

Anta symmetrisk legeme med lineær utstrekning  $L$  på tvers av  $\vec{v}$ ; omgivende fluid (gass, væske) med massetetthet  $\rho$  og dynamisk viskositet  $\mu$ .

Eks: Ball som faller i luft

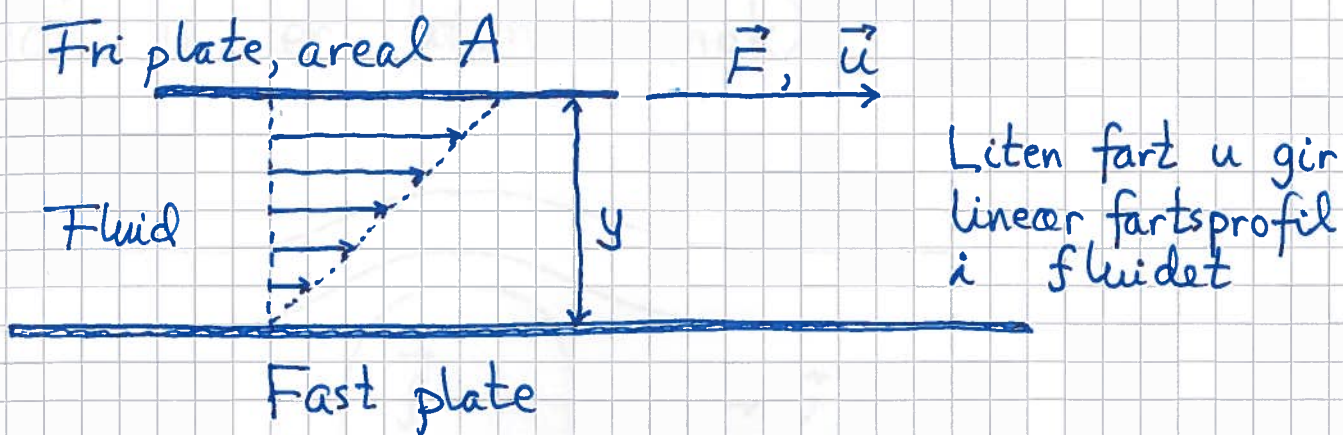


Luftmotstand  $\vec{f}$

~~$$A = \pi r^2$$~~

$$A = \pi r^2$$

Definisjon og måling av  $\mu$ :



Exp. gir  $F = \mu \cdot \frac{A \cdot u}{y}$

der  $\mu$  = fluidets dynamiske viskositet;  $[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$

Eks: ( $v/20^\circ\text{C}$ )

Luft:  $\mu \approx 2 \cdot 10^{-5}$

Vann:  $10^{-3}$

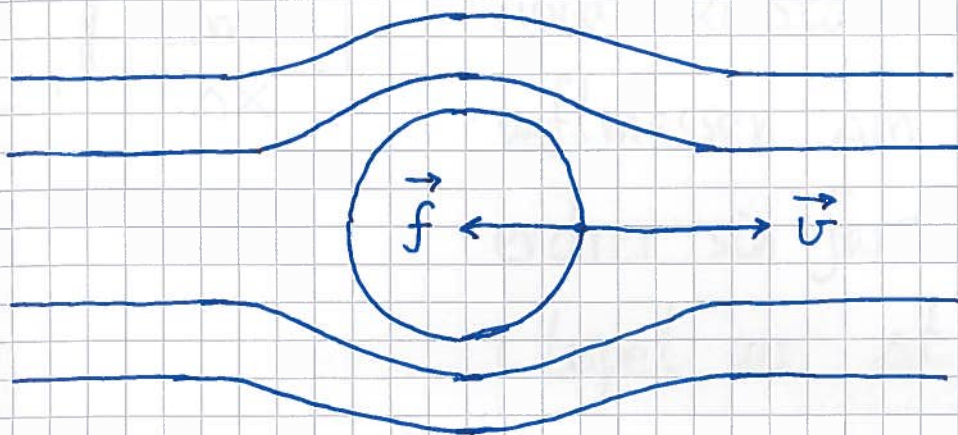
Glyserol: 1

Sirup:  $10^2$

Laminær strømning (pen, lagdelt)

(29)

når  $v$  er liten (nok):



$$\vec{f} = -k \vec{v}$$

Kule med radius  $r$  :  $k = 6\pi\mu r$

(Stokes' lov)

Turbulent strømning (uordnet, virvler)

når  $v$  er stor (nok):

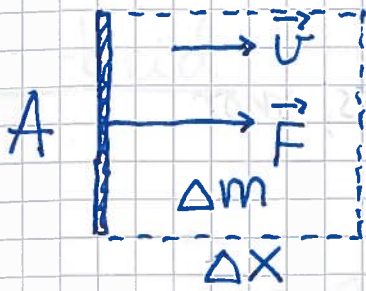
$$\vec{f} = -\left(\frac{1}{2} \rho A C_d\right) v^2 \hat{v}$$

$C_d$  = drag-koeffisienten

(Kule :  $C_d \approx 0.5$ )

Eks:  $C_d$  for plate

(30)



Må dytte med kraft  $F$  for å holde konstant fart  $v$ , fordi luftmassen  $\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta x$  endrer sin fart fra 0 til  $v$  i løpet av  $\Delta t = \Delta x / v$

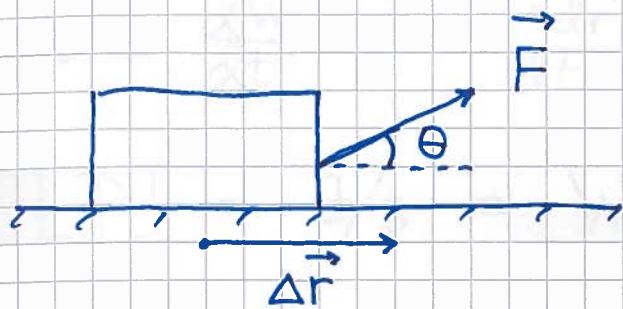
$$\Rightarrow F = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{\rho A \Delta x \cdot v}{\Delta t} = \rho A v^2 \Rightarrow \underline{C_d = 2}$$

Eks: Bilen Revolve har  $A \approx 1.1 \text{ m}^2$   
og  $C_d \approx 1.35$ . Luftmotstand ved  
 $v = 60 \text{ km/h}$  er da ca

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} \rho A C_d v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 1.1 \cdot 1.35 \cdot (60/3.6)^2 \text{ N} \\ &\approx \underline{250 \text{ N}} \end{aligned}$$

# Arbeid og energi [YF 6,7; LL4] (31)

## Arbeid [YF 6.1-6.3; LL 4.1]



Kraft  $\vec{F}$  utfører arbeid på klossen.

arbeid  $\stackrel{\text{def}}{=}$  kraft  $\times$  forflytning

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \text{ (joule)}$$

Generelt:



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \rightarrow 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeidet utført av  $\vec{F}$  ved forflytningen fra  $\vec{r}_i$  til  $\vec{r}_f$

# Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1] (32)

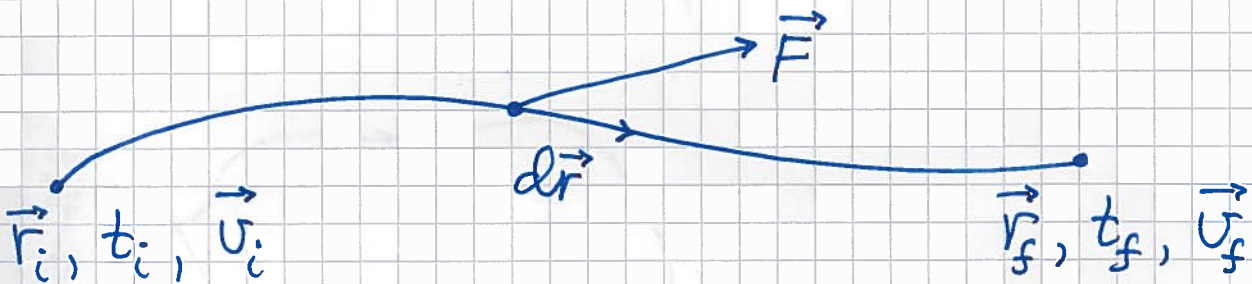
effekt  $\stackrel{\text{def}}{=}$  arbeid (evt. energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \text{J/s} = \text{W (watt)}$$

$$\underline{1 \text{ kWh}} = 1000 \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = \underline{3.6 \text{ MJ}}$$

# Kinetisk energi [YF 6.2 ; LL 4.2]



$$W = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_i^f m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_i^f \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$



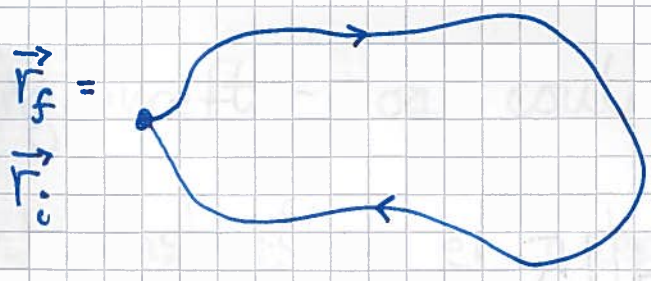
$K = \text{kinetisk energi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2$

Dermed:  $W = \Delta K = K_f - K_i$

Arbeid  $W$  utført på et legeme tilsvarer endringen i legemets kin. energi,  $\Delta K$ .

Konservative krefter [YF 7.3 ; LL 4]

Anta at  $\vec{F}$  virker på et legeme som kommer tilbake der det startet, dvs  $\vec{r}_f = \vec{r}_i$  :

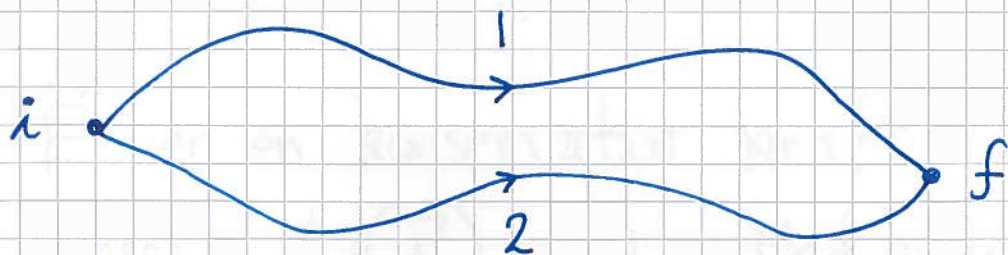


Hvis  $K_f = K_i$ , er  $W = \Delta K = 0$ , dvs

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Da er  $\vec{F}$  en konservativ kraft.

Når  $\vec{F}$  er konservativ, er arbeidet (34)  
 $W$  uavhengig av veien :



$$0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2$$
$$= W_1 - W_2$$

$$\Rightarrow W_1 = W_2 \quad (\text{qed})$$

Tyngdekrefter og coulombkrefter er konservative.

Friksjonskrefter er ikke konservative.

# Potensiell energi [YF 7.1-7.4; LL 4.3-4.4] (35)

$$U(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

der  $\vec{F}$  er en konservativ kraft, og der vi har valgt  $U(\vec{r}_0) = 0$ . Med andre ord, kun forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

## Bevarelse av mekanisk energi

[YF 7.1-7.3 ; LL 4.5]



$$\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$U_2 - U_1 = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \left( - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \right) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W$$

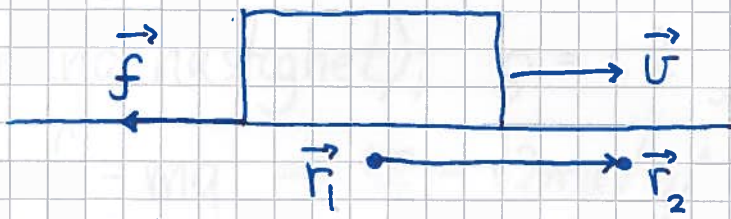
$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Total mekanisk energi:  $E = K + U$

(36)

$\Rightarrow E$  er bevart i et konservativt system

## Friksjonsarbeid [YF 7.3; LL 4.5]



$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{da } \vec{f} \text{ alltid rettet } \underline{\text{mot}} \ d\vec{r}$$

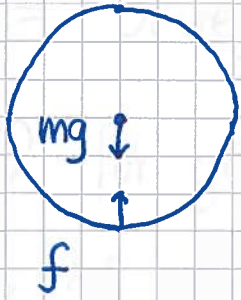
$\Rightarrow$  Mek energi tapes; omdannes til varme, lyd etc.

$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{f} \text{ er } \underline{\text{ikke}} \text{ konservativ}$$

Lab: Rulling uten å gli ("ren rulling")  
gir bevart mek. energi. Statisk friksjons-  
kraft gjør ikke arbeid (ideelt sett).

# Eks: Fallende bordtennisball

37



$$m = 2.7 \text{ g} , \quad r = 20 \text{ mm}$$

- Max hastighet?
- Tapet andel mek. energi?

Løsn: Antar  $f = \frac{1}{2} \rho A C_d v_t^2$  når  $v = v_{\text{max}} = v_t$   
(terminalhastighet);  $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ ,  $A = \pi r^2$ ,  $C_d = 0.5$ .

$$\text{N1: } f = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{2mg / \rho A C_d} \approx \underline{8.4 \text{ m/s}}$$

Anta at ballen slippes fra høyde  $h$  over gulvet.

$$\Rightarrow E_i = U_i = mgh ; \quad E_f = \frac{1}{2} m v_t^2$$

$$\frac{E_i - E_f}{E_i} = 1 - \frac{m}{\rho A C_d h}$$

$$\approx 64\% \quad \text{hvis } h = 10 \text{ m}$$

(Hvis fritt fall 10m:  $v_f = \sqrt{2gh} \approx 14 \text{ m/s}$ )

# Impuls [ YF 8 ; LL 5 ]

(= bevegelsesmengde = linear momentum)

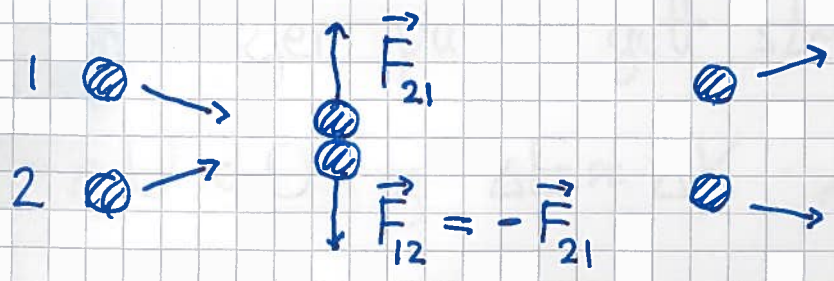
N2 for gitt m:  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$

$\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\vec{v} = \text{massens impuls} ; [p] = \text{kg m/s}$

Vi ser da:

Hvis  $\vec{F} = \sum \vec{F}_{\text{ytre}} = 0$ , er impulsen  $\vec{p}$  bevart

Indre krefter mellom legemer endrer ikke hele systemets totale impuls:



N3  $\Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$

$\stackrel{N2}{\Rightarrow} \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \} = 0$

$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$

## Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5] (39)

Total impuls er bevart i kollisjoner, mens mek. energi kan gå tapt.

Elastisk støt:  $\Delta E = 0$

Uelastisk støt:  $\Delta E < 0$

Fullstendig uelastisk støt: Max  $|\Delta E|$ .

Legemene henger sammen med felles hastighet etter kollisjonen.

Har typisk svært kortvarige kollisjoner som skjer på et gitt sted, slik at

$\Delta U \approx 0$  og  $\Delta E \approx \Delta K$  i kollisjonen.

Tapt K  $\rightarrow$  deformasjon, varme, lyd

# Sentralt støt [YF 8.2-8.4 ; LL 5.3]

(40)

Kollisjon i 1D:

Før  $m \rightarrow u$        $V \leftarrow M$        $\rightarrow +$

Etter  $u' \leftarrow m$        $M \rightarrow V'$

$$\Delta p_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow mu + MV = mu' + MV' \quad (1)$$

(a) Fullst. uel.:  $u' = V' = \frac{mu + MV}{m + M}$

(b) Delvis uel.: Har kun 1 ligning, 2 ukjente  
 $\Rightarrow$  trenger en lign./opplysning til.

(c) Elastisk:  $\Delta K = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mu'^2 + \frac{1}{2}MV'^2 \quad (2)$$

Skriver om (1) og (2):

$$m(u - u') = M(V' - V) \quad (1)$$

$$m(u - u')(u + u') = M(V' - V)(V' + V) \quad (2)$$

(2) dividert med (1):

$$u + u' = V' + V \quad (3)$$



(3) · M - (1) gir

$$u' = \frac{M}{m+M} \left\{ 2V + u \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$

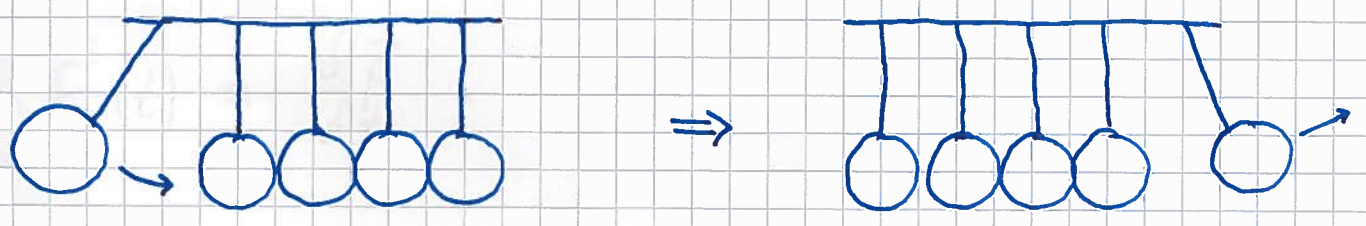
(3) · m + (1) gir

$$V' = \frac{m}{M+m} \left\{ 2u + V \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

(opplagt, v/ombytte av små og store bokstaver!)

Eks 1:  $m = M \Rightarrow V' = u, u' = V$

Kjent fra leketoxy:



Eks 2: Ball mot vegg, elastisk støt



$$u' = \frac{M}{m+M} \left\{ 0 + u \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \stackrel{m \ll M}{=} -u \quad (\text{OK})$$

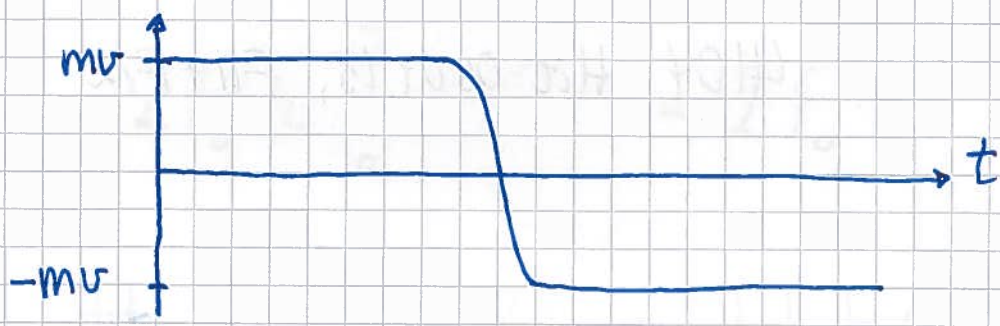
$$K' = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m v^2 = K \quad ; \quad OK$$

$$p' = m v' = -m v$$

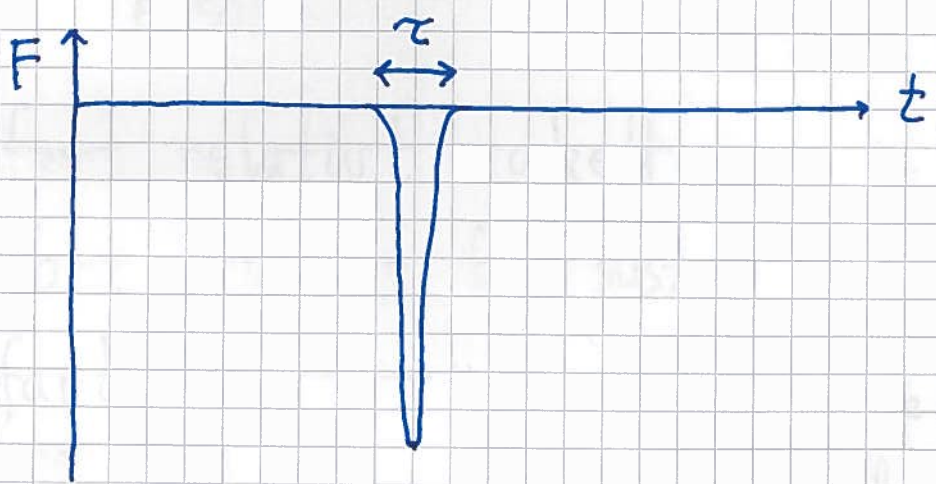
$$P' = M V' = M \frac{m}{M+m} \cdot 2v = 2m v \quad (!)$$

$$\Rightarrow p'_{tot} = m v = p_{tot} \quad ; \quad OK$$

$p(t)$  for ballen (kvalitativt):



$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} :$$



Anta f.eks.  $\tau = 2 \text{ ms}$  og  $\Delta v = 40 \text{ m/s}$  ;  
 da er  $\langle a \rangle \approx 40 / 0.002 \text{ m/s}^2 = 20 \text{ km/s}^2$  ,  
 så tyngden  $mg$  er neglisjerbar i kollisjonen.

"Kraftstøt" (eng: impulse) :

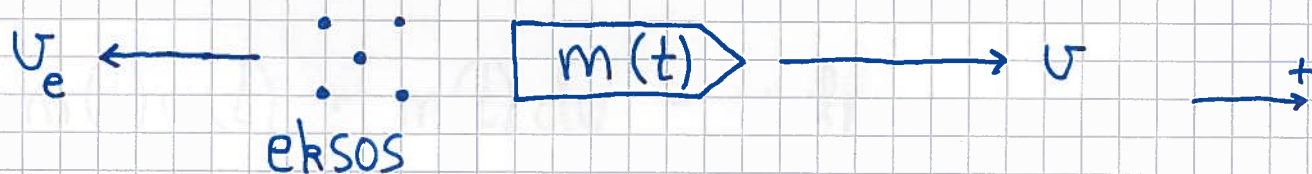
(43)

$$\Delta \vec{p} = \int d\vec{p} = \int \vec{F}(t) dt$$

Eks:  $F(t) = F_0 \exp(-|t|/\tau)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta p &= F_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/\tau} dt = 2F_0 \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} dt \\ &= 2F_0 \tau \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} dt = \underline{2F_0 \tau} \end{aligned}$$

## Rakett [YF 8.6 ; LL 5.4]



Eksosfart relativt raketten :  $u < 0$

Rakettfart relativt fast system :  $v$

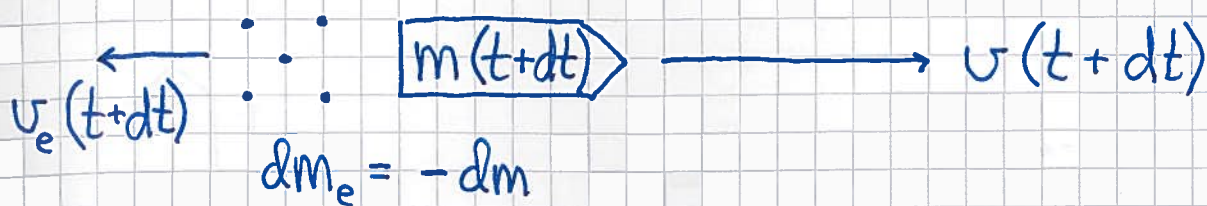
Eksosfart ——— " ——— :  $u_e = u + v$

Drivstoff-forbruk pr tidsenhet :  $dm/dt < 0$

Anta konstant  $u$ , og  $F_{ytre} = 0$  (inntil videre).

Impulsbevarelse fra  $t$  til  $t+dt$ :

(44)



Ved tid  $t$ :  $p(t) = m(t) v(t)$

Ved tid  $t+dt$ :

$$p(t+dt) = m(t+dt) v(t+dt) + dm_e \cdot v_e(t+dt)$$

$$= [m(t) + dm] \cdot [v(t) + dv] - dm \cdot [v + v(t) + dv]$$

$$= m(t) v(t) + m(t) dv - v dm$$

$$\Rightarrow m dv - v dm = 0$$

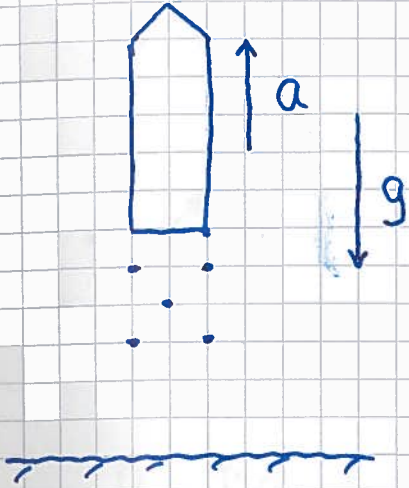
$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = v \frac{dm}{dt}$$

dvs:  $ma = F_{\text{skyv}}$

med skyvkraft ("rekyl")  $F_{\text{skyv}} = v \dot{m} > 0$

Hvis oppskyting fra bakken, virker

$$F_{\text{ytre}} = -mg \quad (\text{en stund})$$



$$\Rightarrow ma = u\dot{m} - mg$$

Dvs:  $F = u\dot{m} - mg$  er total kraft på raketten;

må ha  $u\dot{m} > mg$  for å ta av

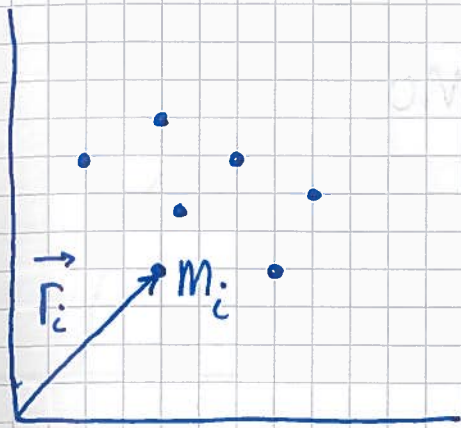
Øving:

$$-mg + u \frac{dm}{dt} = m \frac{dv}{dt} \quad / \cdot \frac{dt}{m}$$

$$\Rightarrow -g dt + u \frac{dm}{m} = dv$$

som kan integreres!

Massesenter [YF 8.5 + oppg. 8.115, 8.116; (46)  
LL 5.6, 5.8, 6.1]



Massesenter (CM) for  $N$   
punktmasser  $m_1, m_2, \dots, m_N$   
 $i$  posisjoner  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$  :

$$\vec{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

med  $M = \sum_i m_i = \text{systemets totale masse}$

For kontinuertlig massefordeling :

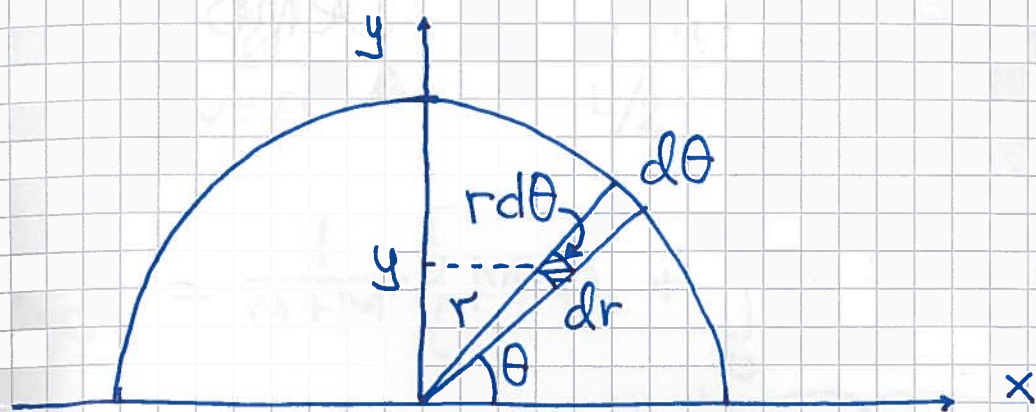
$$\left. \begin{array}{l} m_i \rightarrow dm \\ \sum_i \rightarrow \int \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M = \int dm \\ \vec{R}_{\text{CM}} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \end{array}$$

1D, 2D, 3D:  $\lambda, \sigma, \rho = \text{masse pr hhv}$   
lengde-, flate-, volumenet  
 $dl, dA, dV = \text{hhv lengde-, flate-,}$   
volumenelement

$\Rightarrow dm = \lambda dl, \sigma dA, \rho dV = \text{masseelement}$   
Hvis uniform massefordeling:  $dm/M = dV/V$  osv

Eks 1:  $\vec{R}_{cm}$  for halvdelen av tynn skive med radius  $R$ .

(47)



$\Sigma_{cm} = 0$  pga symmetri  $\Rightarrow \vec{R}_{cm} = Y_{cm} \hat{y}$ , med

$$Y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA, \text{ med } A = \frac{\pi R^2}{2},$$

$$dA = dr \cdot r d\theta \text{ og } y = r \sin \theta$$

$$\Rightarrow Y_{cm} = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta \cdot dr \cdot r d\theta$$

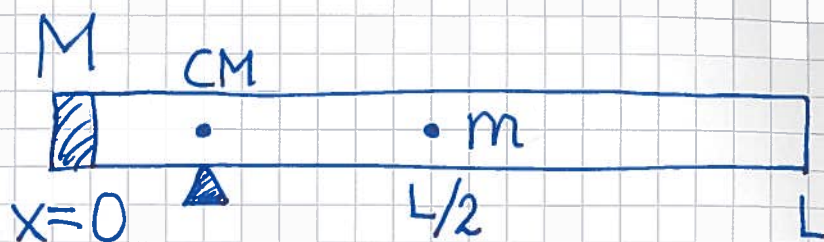
$$= \frac{2}{\pi R^2} \underbrace{\int_0^R r^2 dr}_{= R^3/3} \underbrace{\int_0^\pi \sin \theta d\theta}_{= \int_0^\pi (-\cos \theta) = 2} = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R$$

Halvdelen av tynn ring:  $Y_{cm} = \frac{2R}{\pi}$

Halvdelen av kompakt kule:  $Y_{cm} = \frac{3R}{8}$

## Eks 2: Rør med lod i enden

(48)



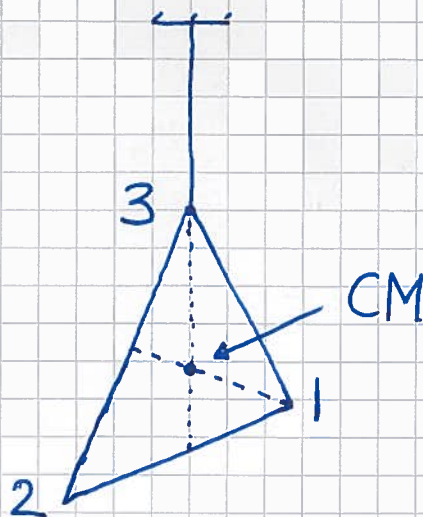
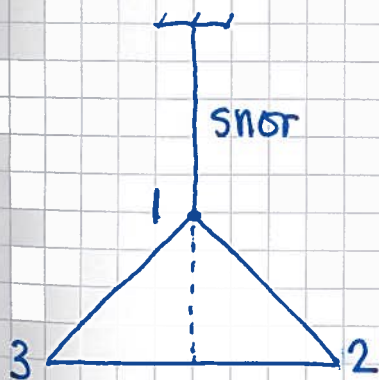
$$m = 165 \text{ g}$$

$$M = 305 \text{ g}$$

$$X_{\text{CM}} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + \underbrace{\int_0^L x \cdot \frac{m dx}{L}}_{= m \cdot L/2} \right\}$$

$$= \frac{mL}{2(m+M)} \approx \underline{\underline{0.18L}}$$

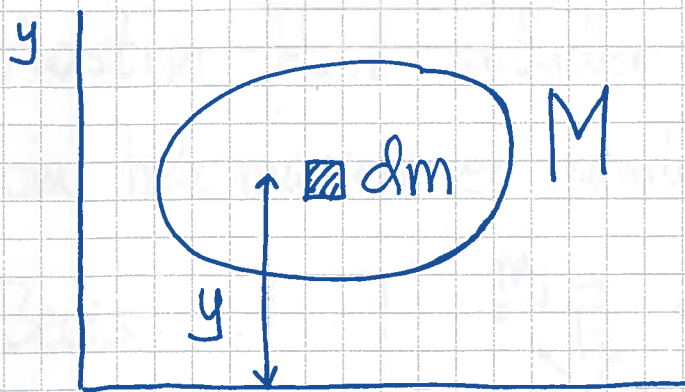
## Eks 3: Eksperimentell lokalisering av CM





# Potensiell energi i tyngdefeltet

(49)



Velger  $U(0) = 0$

$$U = \int dU = \int g \cdot y \cdot dm$$

Anta  $g = \text{konstant}$  (dvs  $y_{\text{max}} - y_{\text{min}} \ll \text{jordradien}$ )

$$\Rightarrow U = g \cdot \int y dm = g \cdot M \cdot Y_{\text{CM}}$$

dvs som om hele  $M$  var samlet i høyden  $Y_{\text{CM}}$ , f.eks. i  $\vec{R}_{\text{CM}}$

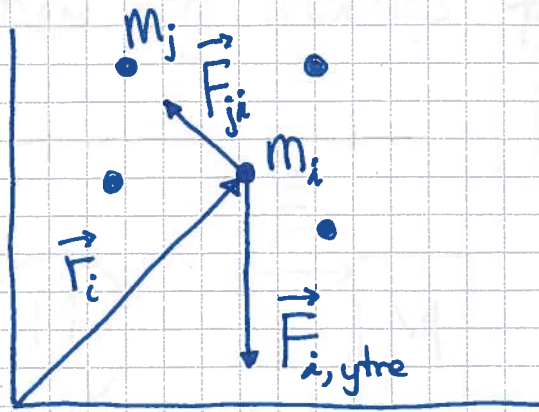
Tyngdepunkt: Der legemet balanserer.

Hvis  $g$  er konstant (for hele legemet), er tyngdepunkt og massesenter samme sted.

# Massesenterets bevegelse [YF 8.5; LL5.8] (50)

Plastrør-kast antyder at CM beveger seg som om hele massen er samlet i CM. Dette stemmer!

Bewis:



N2 for  $m_i$ :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ytre}}_{\text{Total ytre kraft p\aa } m_i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{Total indre kraft p\aa } m_i}$$

Tar  $\sum_i$  p\aa begge sider.

$$\text{VS: } \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ M \vec{R}_{CM} \right\} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

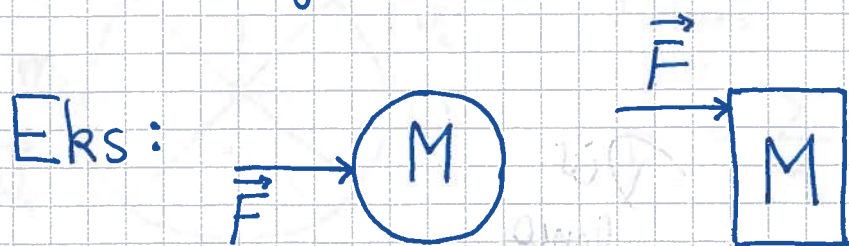
$$\text{HS: } \sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft p\aa systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \dots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{\text{ytre}} = M \ddot{\vec{R}}_{\text{CM}}}$$

(51)

Dvs: Bevegelsen til CM blir som om hele  $M$  er samlet i  $\vec{R}_{\text{CM}}$  og utsettes for netto ytre kraft  $\vec{F}_{\text{ytre}}$ .



$$\Rightarrow \vec{A}_{\text{CM}} = \vec{F}/M ; \text{ den samme for de to legemene}$$

---

I tillegg til CMs bevegelse,

for stive legemer: rotasjon om CM

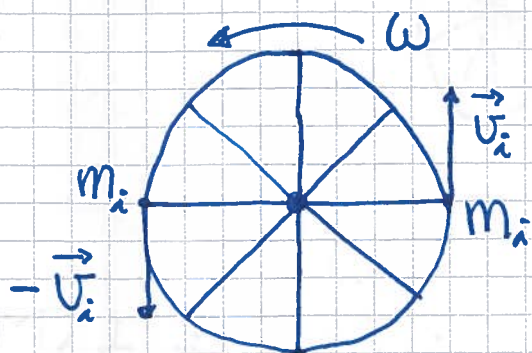
for ikke helt stive legemer: også vibrasjon

# Rotasjon [YF 9,10; LL 6 (5)]

(52)

Innledende kommentarer:

- Ren rotasjon (typisk om CM, men ikke nødv. vis)



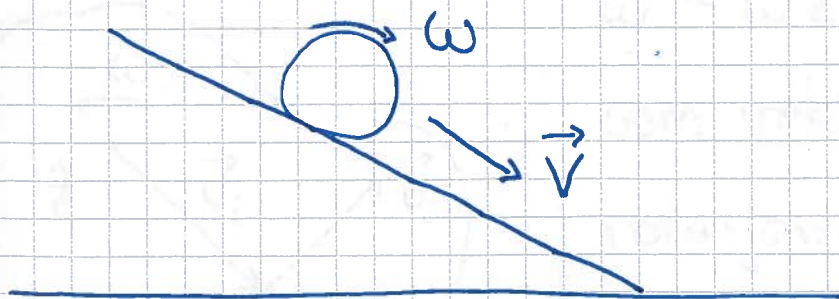
$$K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M \dot{R}_{\text{CM}}^2 = 0$$

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

$$K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \neq 0$$

$$\vec{L} = \text{hjulets dreieimpuls} \neq 0$$

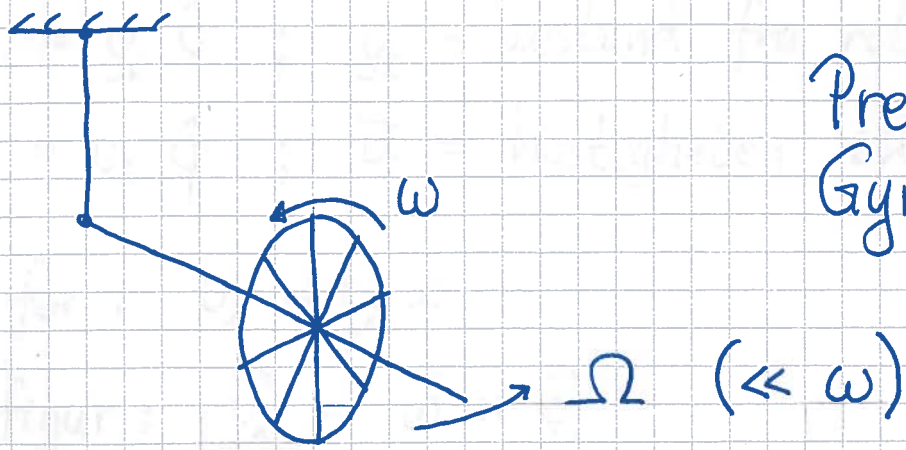
- Rulling = Translasjon av CM + Rotasjon om CM



$\dot{v} > 0$  pga ytre kraft (langs skr pplanet)

$\dot{\omega} > 0$  pga ytre dreiemoment (mhp CM)

- Overraskende (?) dynamikk

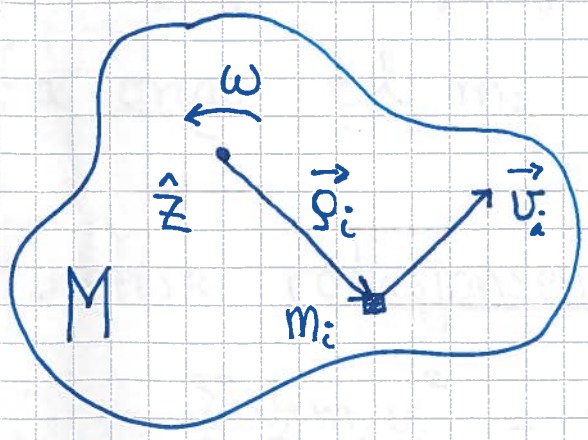


Presejjon.  
Gyroskop.

Rotasjonsenergi og treghetsmoment  
[YF 9.4 ; LL 6.4, 6.3]

Ser først på ren rotasjon av stivt legeme, om fast akse, ikke nødvis gjennom CM.

Med rotasjonsaksen langs  $\hat{z}$ , ut av planet:



“høyrehandsregel”

$\vec{\omega} = \omega \hat{z} =$  vinkelhast.

som vektor, langs rotasjonsaksen ; 4 fingre på høyre hånd i rotasjonsretningen (her: mot klokka) gir tommelen langs  $\vec{\omega}$

Videre er:

$$\vec{\rho}_i = \rho_i \hat{\rho} ; \rho_i = \text{avstand fra rot.aksen til } m_i$$

$$\vec{v}_i = v_i \hat{\phi} ; \vec{v}_i = \text{hastigheten til } m_i$$

Fra før:  $v_i = \rho_i \omega$

Fra figur:  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$

Høyrehåndsregel for kryssprodukt:

4 fingre langs  $\vec{a}$  bøyes over i retning langs  $\vec{b}$  ;  
da peker tommelen langs vektoren  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ .

Vi bruker her sylinderkoordinater  $\rho, \phi, z$  ;  
dvs polarkoordinater  $\rho, \phi$  samt  $z$ .

[Unngår å bruke  $\vec{r}_i$  for avstandsvektoren fra z-aksen til  $m_i$  fordi  $\vec{r}_i$  forbeholdes posisjonsvektoren fra origo til  $m_i$  ; derfor  $\vec{\rho}_i$  ! ]

Kinetisk rotasjonsenergi for det stive legemet:

$$K_{\text{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Her er  $I$  legemets tregghetsmoment, mhp

den aktuelle akse:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i r_i^2$$

Hvis kontinuerlig massefordeling:  $m_i \rightarrow dm$ ,  $\sum_i \rightarrow \int$

$$\Rightarrow I = \int r^2 dm$$

$r$  = avstand fra akse til  $dm$

Generell bevegelse for et stivt legeme er translasjon av CM, med hastighet  $\vec{V}$ , samt rotasjon om en akse gjennom CM, med vinkelhastighet  $\vec{\omega}$ . Total kinetisk energi blir da

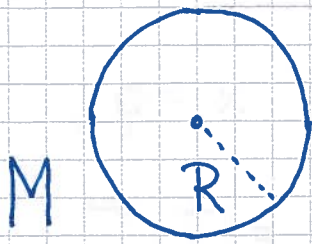
$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

[Se utlagt notat for bevis.]

Notasjon:  $I_0$  betyr at akse går gjennom CM.

# Treghetsmoment; eksempler [YF 9.6; LL 6.3] (56)

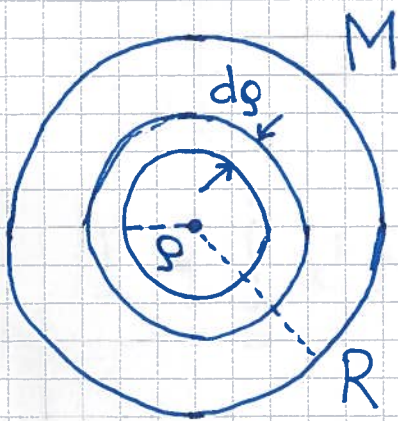
- Ring (og hul sylinder)



$$I_o = \int \rho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

[Må kunnes; oppgis ikke til eksamen.]

- Skive (og kompakt sylinder)



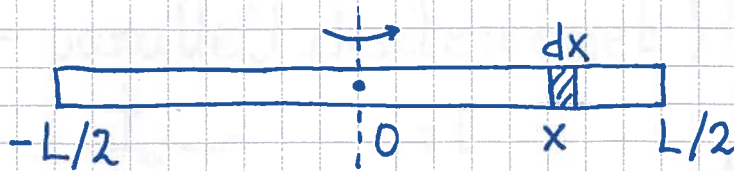
Bidrag fra tynn ring med radius  $\rho$ , tykkelse  $d\rho$ , areal  $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$  og masse  $dm = M \cdot dA / \pi R^2$ :  
 $dI_o = \rho^2 dm = 2M\rho^3 d\rho / R^2$

$$\Rightarrow I_o = \int dI_o = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \underline{\underline{\frac{1}{2}MR^2}}$$

(oppgis)



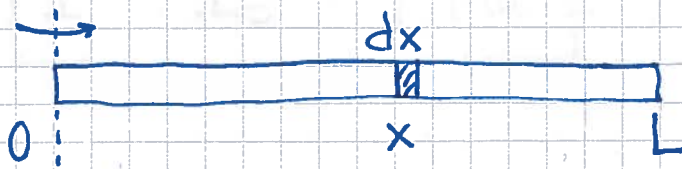
- Tynn stang (og tynn plate)



$$\rho = x, \quad dm = M \cdot dx / L$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \frac{M}{L} \left| \frac{x^3}{3} \right|_{-L/2}^{L/2} = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}} \quad (\text{oppgis})$$

Mhp akse ved stangas ende:



$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}} \quad (\text{oppgis ikke})$$

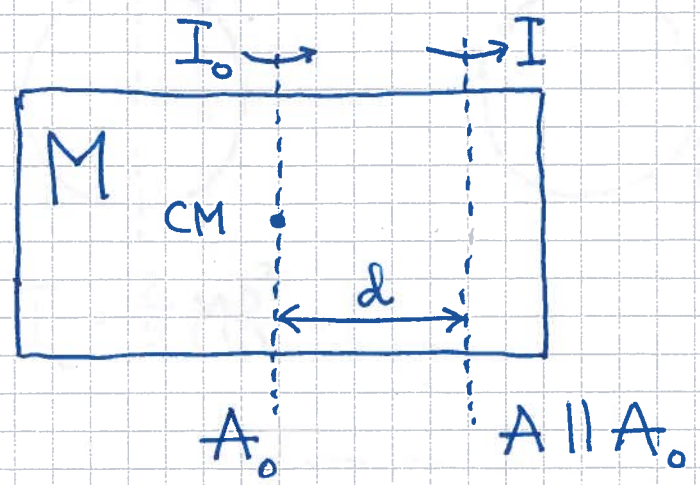
- Kuleskall  
 $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$
- Kompakt kule  
 $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Se øving og LF  
for detaljer.

Oppgis.

# Steiners sats [YF 9.5 ; LL 6.3]

(= parallellakse teoremet)

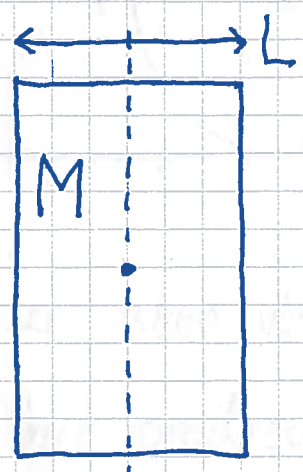


A: akse parallell med akse A<sub>0</sub>.

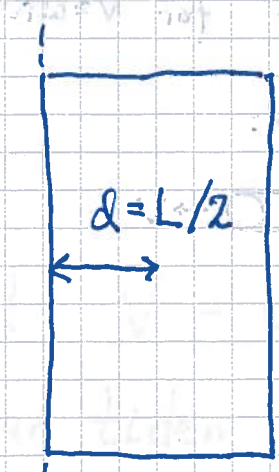
$$I = I_0 + Md^2$$

[Se notat for bevis]

Eks 1: Dør



$$I_0 = \frac{1}{12} ML^2$$



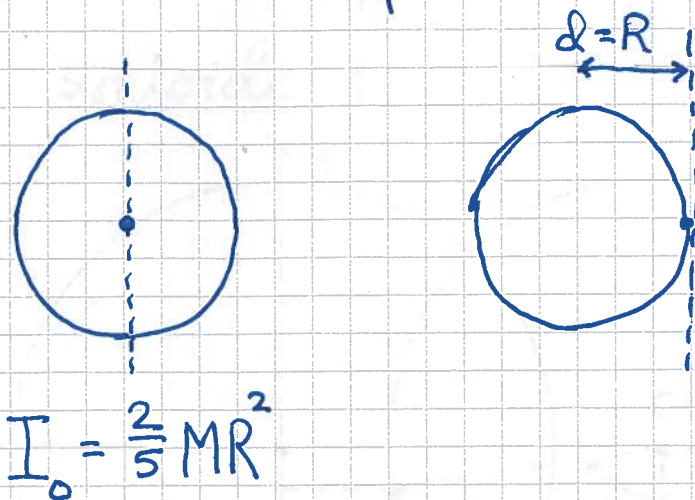
A || A<sub>0</sub>

$$\Rightarrow I = I_0 + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ML^2$$

(som s. 57)

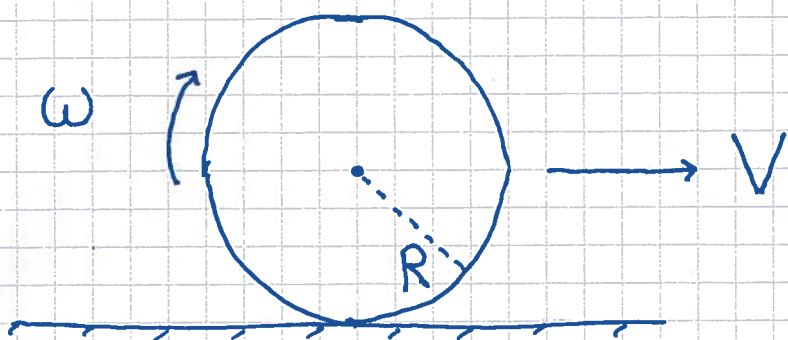
## Eks 2: Kompakt kule

59



$$I_{\#} = I_0 + MR^2 \\ = \frac{7}{5} MR^2$$

## Ren rulling [YF 10.3; LL 6.7]



Vå ser uten videre at  $V = \omega R$ :

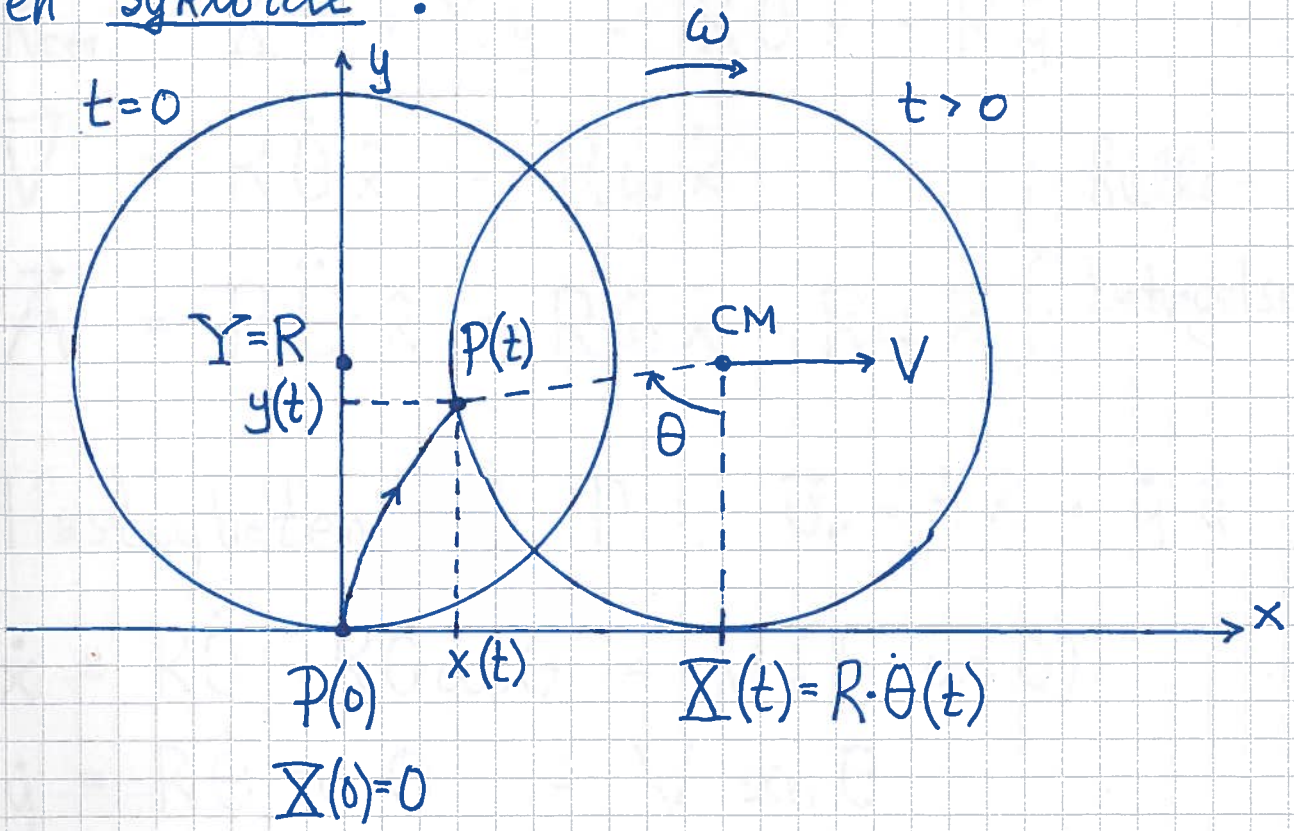
En hel omdreining tar tiden  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Da har CM (og hele legemet) flyttet seg  $2\pi R$  mot høyre.

Det gir  $V = \frac{2\pi R}{T} = \omega R$ . Evt: Liten rotasjon

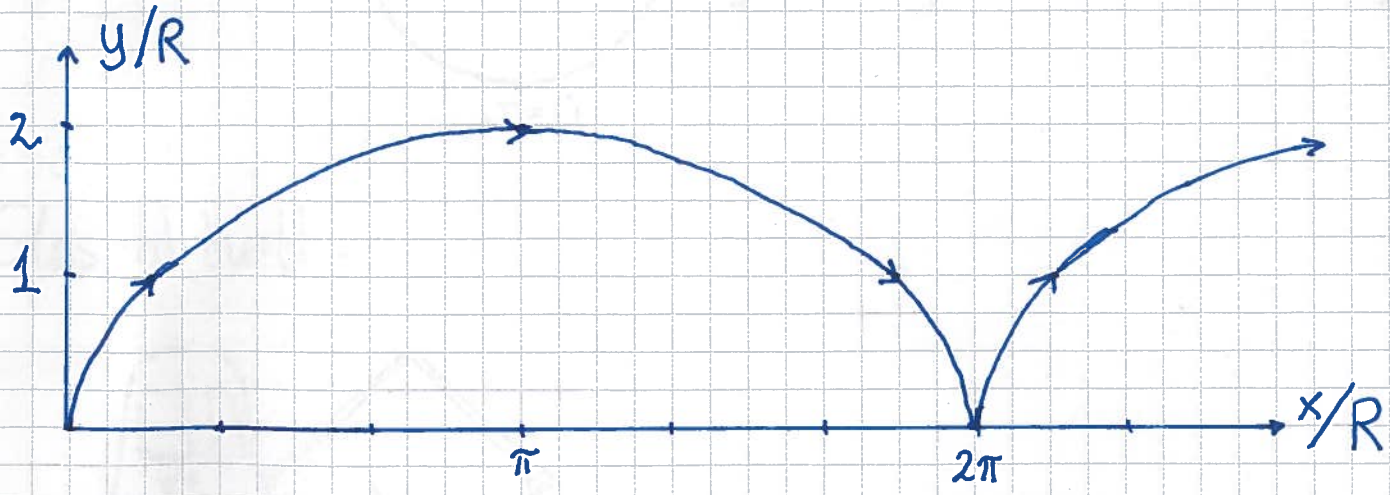
$d\theta = \omega dt$  flytter CM liten lengde  $dx = R d\theta = R \omega dt$ ,

som gir  $V = dx/dt = R\omega$ . Som er rullebetingelsen.

Banen til et punkt P på periferien er en sykloide :



Fra figuren :  $x = X - R \sin \theta = R\theta - R \sin \theta$   
 $y = Y - R \cos \theta = R - R \cos \theta$



(61)

Bewegelsen til CM:

$$\vec{R}_{cm} = X \hat{x} + Y \hat{y} = R\theta \hat{x} + R \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{V} = R\dot{\theta} \hat{x} = R\omega \hat{x}$$

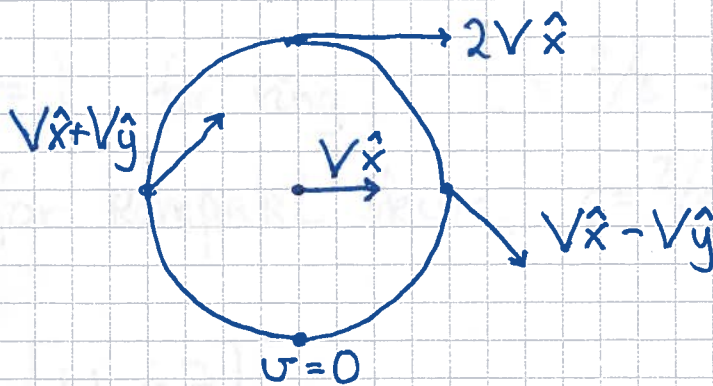
$$\Rightarrow \vec{A} = R\ddot{\theta} \hat{x} = R\dot{\omega} \hat{x} = R\alpha \hat{x}$$

Rulle-  
betingelse(r)

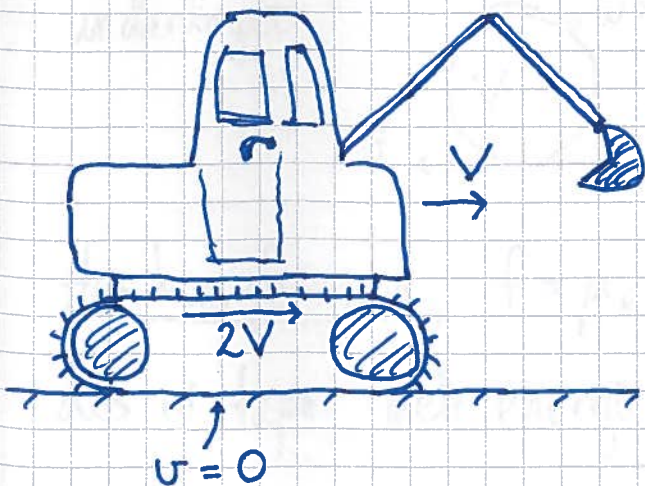
Hastigheden til P:  $\vec{U}_p = \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y}$ 

$$\dot{x} = R\dot{\theta} - R\dot{\theta} \cos\theta = V(1 - \cos\theta)$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta} \sin\theta = V \sin\theta$$



Glyks-aktuelt:



Ser at  $v=0$  for  $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ ,  
dvs når P er i kontakt med underlaget. (62)

Da er effekttapet pga friksjon

$$P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = \underline{0} \quad (\text{som nevnt s. 36})$$

Kinetisk energi ved ren rulling:

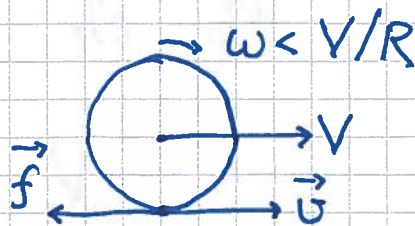
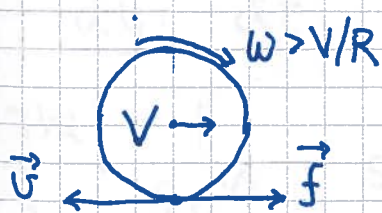
$$K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2} \cdot cMR^2 \cdot \frac{V^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{K = (1+c)\frac{1}{2}MV^2}$$

med  $c=1$  for ring,  $c=2/3$  for kuleskall,  
 $c=1/2$  for kompakt skive,  $c=2/5$  for kompakt kule.

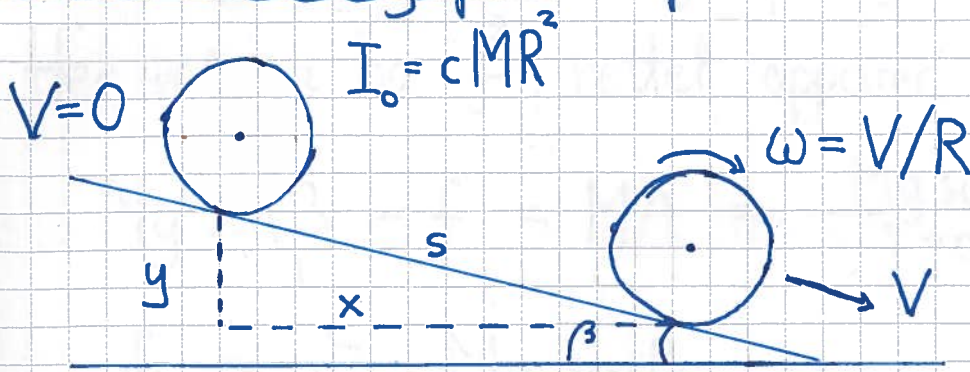
Sluring [LL 6.7]

Hvis  $\omega \neq \frac{V}{R}$ , er  $v = V - \omega R \neq 0$ , dvs objektet glir på underlaget:



Har kin. friksjon,  $f = \mu_k N$ , og effekttap,  $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$ ,  
dvs vi taper mek. energi pr tidsenhet lik  $|P_f|$ .

# Eks: Ren rulling på skråplan [TF 10.3; LL 6.8] (63)



Finn  $V$ ,  $A$ , friksjonskraften  $f$ , og minste  $\mu_s$  (evt største  $\beta$ ) som gir ren rulling.

Energibevarelse:  $Mgy = (1+c)\frac{1}{2}MV^2$

$\Rightarrow \underline{\underline{V = \left\{ \frac{2gy}{1+c} \right\}^{1/2}}}$  ; avtar med økende  $c$

$\Rightarrow V(\text{kule}) > V(\text{skive}) > V(\text{kuleskall}) > V(\text{hul sylinder})$

Akselerasjon:

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$= \left\{ \frac{2g}{1+c} \right\}^{1/2} \cdot \frac{1}{2y^{1/2}} \cdot \sin\beta \cdot V$$

$$= \left\{ \frac{2g}{1+c} \right\}^{1/2} \cdot \frac{\sin\beta}{2y^{1/2}} \cdot \left\{ \frac{2gy}{1+c} \right\}^{1/2} = \underline{\underline{\frac{g \sin\beta}{1+c}}}$$

Uten friksjon er  $F_{||} = Mg \sin \beta$  og  $A = g \sin \beta$ . (64)

$\Rightarrow$  Her må vi ha  $\vec{f}$ , rettet oppover skråplanet

$$\Rightarrow Mg \sin \beta - f = MA = \frac{Mg \sin \beta}{1+c}$$

$$\Rightarrow \underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta}$$

Maksimal statisk friksjon er  $f_{\max} = \mu_s N$ , og  $N = Mg \cos \beta$ . Må derfor, for å ha ren rulling, oppfylle ulikheten  $f \leq f_{\max}$ , dvs

$$\frac{c}{1+c} Mg \sin \beta \leq \mu_s Mg \cos \beta$$

$$\Rightarrow \underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c} \tan \beta}, \text{ evt. } \underline{\beta \leq \arctan \left\{ \mu_s \cdot \frac{1+c}{c} \right\}}$$

Lab: Krum bane. Ren rulling gir fortsatt energibevarelse og

$$A = \frac{g \sin \beta}{1+c}$$

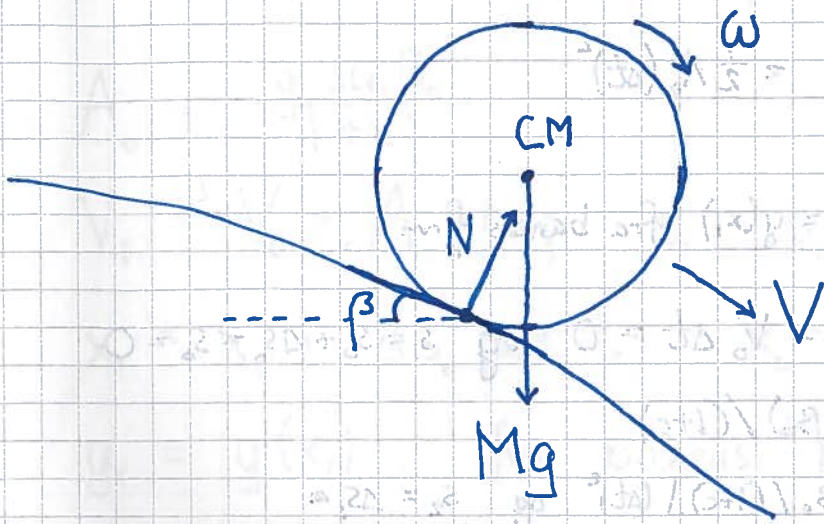
tangentielt med banen, men ikke lenger konstant.



Har også akselerasjon normalt på banen,

$$A_{\perp} = V^2 / \rho \quad ; \quad \rho = [1 + (y')^2]^{3/2} / |y''|$$

slik at normalkraften  $N$  varierer langs banen  $y(x)$ .



$N \perp$  banen gir

$$MA_{\perp} = \pm (Mg \cos \beta - N) \quad ; \quad \text{krumning} \begin{matrix} \text{nedover} \\ \text{oppover} \end{matrix}$$

dvs  $N$  kan beregnes når  $V$  og  $y(x)$  er kjent. Merk at  $y' = dy/dx = \tan \beta$ .

Målt bevegelse gir  $x(t)$  og  $y(t)$ .

Beregnet / Teoretisk bevegelse fås ved å løse

" $N_2$ " langs banen numerisk, f.eks med

Euler - metoden :

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Rightarrow \Delta V = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Delta t = A \Delta t \quad (66)$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = V \Rightarrow \Delta s = V \Delta t$$

Med f. eks.  $t_0 = 0$ ,  $V_0 = V(t_0) = 0$  og  $s_0 = s(t_0) = 0$ :

$$A_0 = \frac{g \sin \beta_0}{1+c}$$

$$V_1 = V_0 + A_0 \Delta t; \quad s_1 = s_0 + V_0 \Delta t;$$

$$x_1 = x_0 + \Delta s_0 \cos \beta_0 = x_0 + V_0 \Delta t \cos \beta_0$$

$y_1 = y(x_1)$ , fra banens kjente form

$$A_1 = \frac{g \sin \beta_1}{1+c}$$

$$V_2 = V_1 + A_1 \Delta t; \quad s_2 = s_1 + V_1 \Delta t;$$

$$x_2 = x_1 + \Delta s_1 \cos \beta_1 = x_1 + (s_2 - s_1) \cos \beta_1$$

$$y_2 = y(x_2)$$

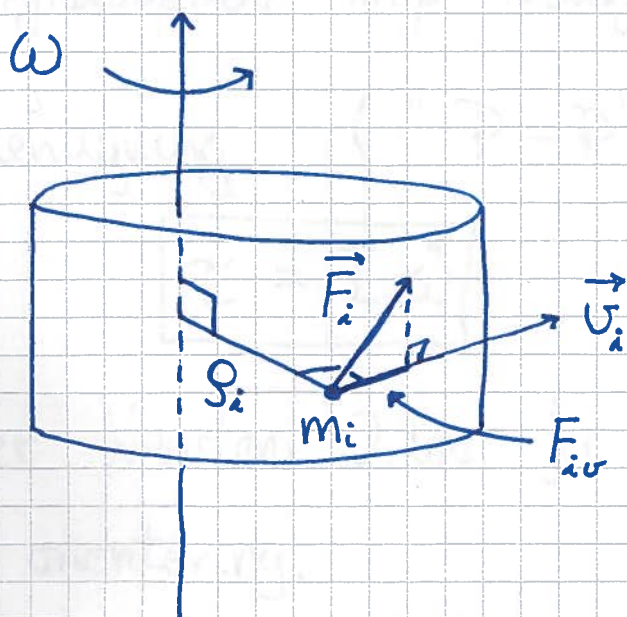
OSU

# Krefter og rotasjon: Rotasjonsdynamikk

(67)

## Akse med fast orientering [YF 10.1, 10.2; LL 6.2]

Dette er essensielt et endimensjonalt problem, der vi betrakter rotasjonsdelen av den totale bevegelsen.



$$\vec{v}_i = \rho_i \omega$$

$$(\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)$$

$F_{i\omega}$  = komponent langs  $\vec{v}_i$  av ytre kraft  $\vec{F}_i$  på  $m_i$

"Triks": Vi beregner tilført effekt,

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{i\omega} v_i$$

på to måter og sammenligner uttrykkene vi finner.

(1) Bruker  $v_i = \rho_i \omega$ :

$$P = \left\{ \sum_i F_{i\omega} \rho_i \right\} \omega = \tau \omega$$

Her er  $\tau = \sum_i F_{i\omega} \rho_i =$  netto ytre dreiemoment på legemet, mhp rotasjonsaksen ("kraft ganget med arm")

(2) Bruker  $\vec{F}_i = m_i d\vec{v}_i/dt$  : (68)

$$P = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_i m_i v_i^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} \omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$$= I \omega \dot{\omega} \quad (\text{der } I = \sum_i m_i r_i^2 \text{ er legemets} \\ \text{tregghetsmoment mhp rotasjonsaksen})$$

Sammenligning ("P=P") gir nå

$$\boxed{\tau = I \dot{\omega}}$$

som er Newtons 2. lov for rotasjon om akse med fast orientering.

Jf. N2 for translasjon :  $F = m \dot{v}$

Arbeid utført av dreiemomentet [YF 10.4 ; LL 6.4]

Vi har  $P = \tau \omega = \tau d\phi/dt$  og  $P = dW/dt$ , som gir

$$\boxed{dW = \tau d\phi}$$

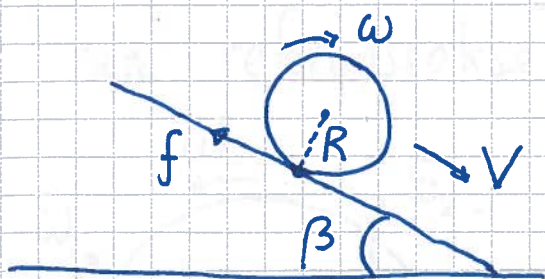
som er arbeid utført av  $\tau$  ved en vinkelendring  $d\phi$

Jf. arbeid utført av kraft ved translasjon :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

# Eks 1: Ren rulling på skråplan

(69)



$$\omega = v/R, \quad \dot{\omega} = \dot{v}/R$$

N2 langs skråplanet:  $Mg \sin \beta - f = M\dot{v}$

N2, rotasjon om akse gjennom CM (fast orientering):

$$\tau = I_0 \dot{\omega}, \quad \text{med } I_0 = c \cdot MR^2, \quad \dot{\omega} = \dot{v}/R \quad \text{og}$$

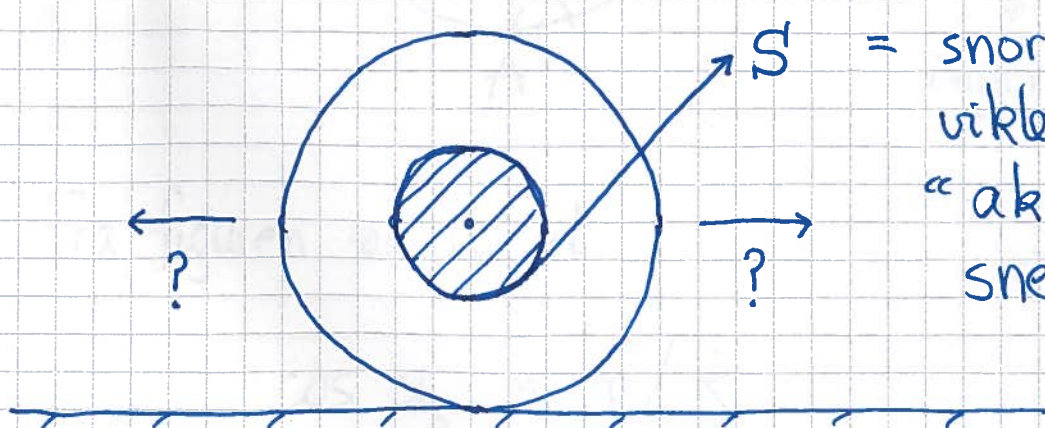
$\tau = f \cdot R$  (siden  $\vec{N}$  og  $M\vec{g}$  begge har null arm relativt akse gjennom CM) gir

$$f \cdot R = cMR\dot{v}, \quad \text{dvs } f = cM\dot{v}$$

som innsatt i "translasjonslign." gir

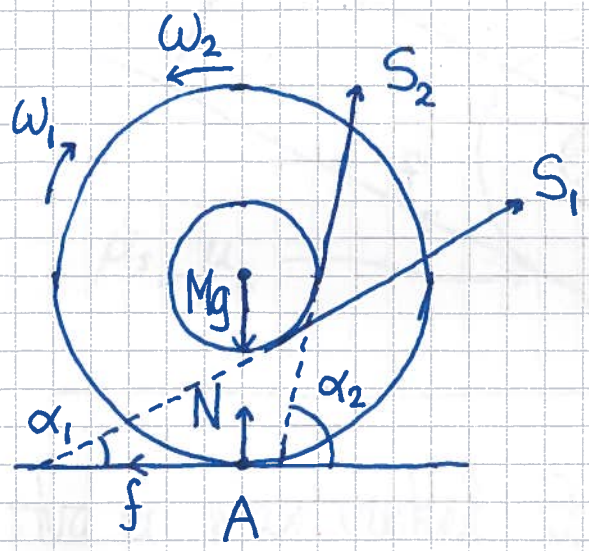
$$Mg \sin \beta - cM\dot{v} = M\dot{v}, \quad \text{dvs } \underline{\dot{v} = \frac{g \sin \beta}{1+c}}, \quad \text{som s. 63.}$$

# Eks 2: Rulling mot høyre eller venstre?



$S$  = snordrag i snor viklet opp rundt "akslingen" på snella

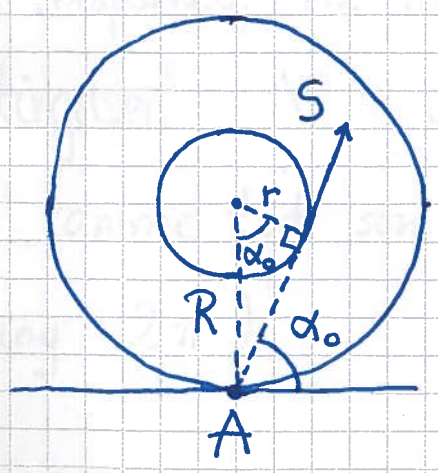
"Triks": Velg kontaktlinja mellom snelle og gulv som referanseakse A.



Mg, N og f har alle null  
arm mhp aksen A  
 => kun snordrag S har  
 dreiemoment mhp aksen A

- S1 : liten alpha, rulling mot høyre
- S2 : stor alpha, ——— " ——— venstre

Hvis  $\vec{S}$  går gjennom A, har vi statisk likevekt:



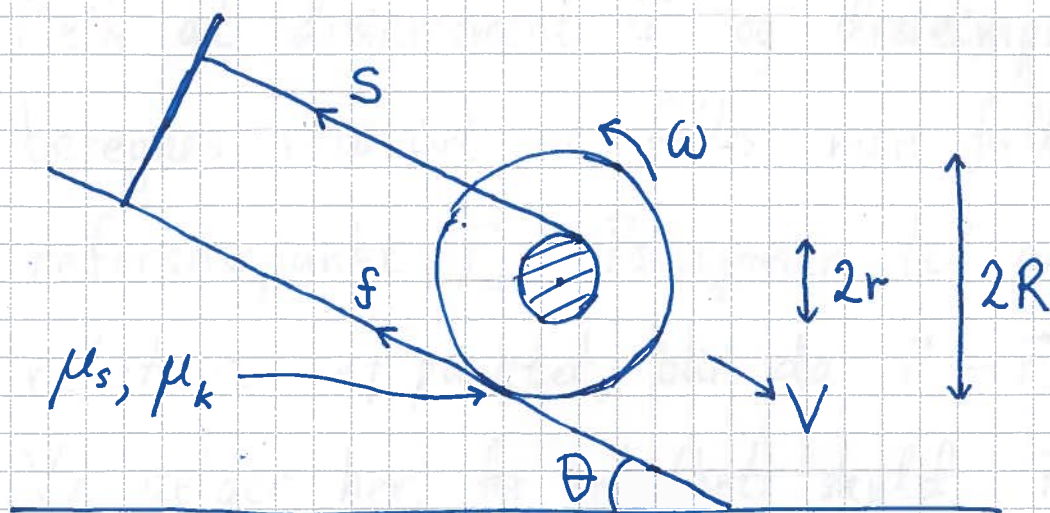
$$\begin{aligned} \sum \tau_A &= 0 \\ \downarrow \\ \dot{\omega} &= 0 \\ \downarrow \\ &\text{ingen rotasjon} \end{aligned}$$

Fra figuren ser vi at

$$\cos \alpha_0 = r/R$$

# Eks 3: Snelle på skråplan (Øv. 6)

(71)



Hva er max vinkel  $\theta_0$  uten at snella slurer "baklengs" nedover?

Tips:  $N \perp$  skråplanet,  $N \perp$  rot. om CM,  $f = f_{\max} = \mu_s N$

Hvis  $\theta > \theta_0$ , hva blir snordraget  $S$  og akselerasjonen  $a$ ?

Tips:  $N \perp$  skråplanet,  $N \perp$  rot. om CM,  $f = \mu_k N$ ,

og "rullebetingelsen"  $V = \omega R$  (da translasjon

$2\pi r$  tar samme tid som én omdreining, dvs vinkelendring  $2\pi$ ).

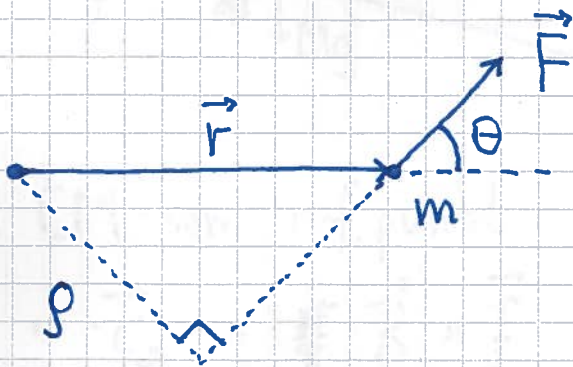
# Tredimensjonal rotasjonsdynamikk

(72)

Merk at dreiemoment  $\vec{\tau}$  og dreieimpuls  $\vec{L}$  beregnes relativt et felles, men fritt valgt, referansepunkt  $\vec{r}_0$ . Posisjonen til en punktmasse, relativt ref. punktet, blir da  $\vec{r} - \vec{r}_0$ .

Vi velger her, for enkelhets skyld,  $\vec{r}_0 = 0$ .

## Dreiemoment [YF 10.1; LL 5.5, 6.4]



Kraftens dreiemoment på m:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Retning:  $\vec{\tau} \perp \vec{r}$  og  $\vec{F}$ ; her ut av planet

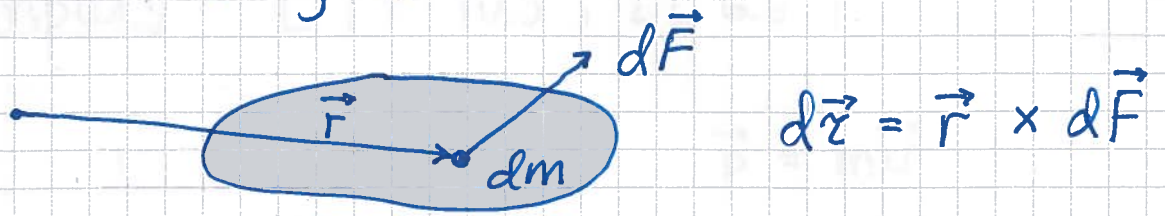
Abs.verdi:  $\tau = r \cdot F \cdot \sin \theta = \rho \cdot F$ ;

som s. 67, "arm  $\times$  kraft".



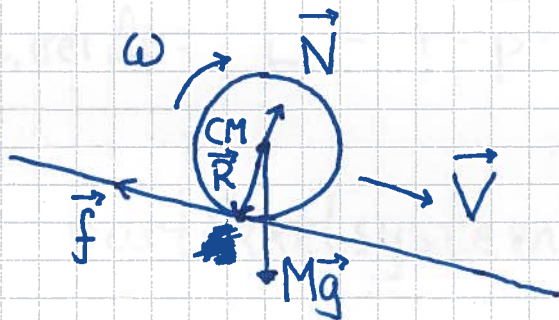
For partikkelsystem:

(73)



$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \text{totalt dreiemoment p\u00e5 systemet}$$

Eks: Rullende kule (se s. 69)



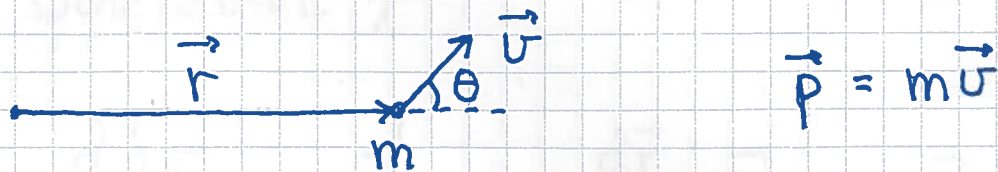
Med CM som ref.punkt:  $\vec{L}_N = \vec{L}_g = 0$

$$\Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_f = \vec{R} \times \vec{f} = \text{vektor inn i planet,}$$

med abs.verdi  $\tau = R \cdot f$ , da  $\vec{R} \perp \vec{f}$ .

Vi noterer oss at  $\vec{\omega}$  og  $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$  her ogs\u00e5 er vektorer inn i planet.

# Dreieimpuls [YF 10.5 ; LL 6.6]

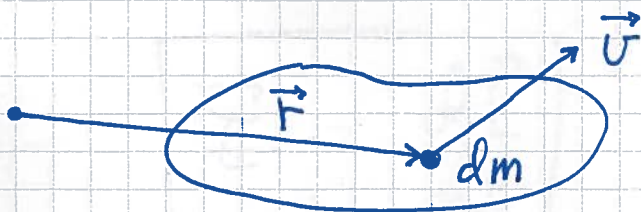


Massens dreieimpuls:  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Retning:  $\vec{L} \perp \vec{r}$  og  $\vec{p}$  (her: ut av planet)

Abs.verdi:  $L = r \cdot p \cdot \sin \theta$

For partikkelsystem:

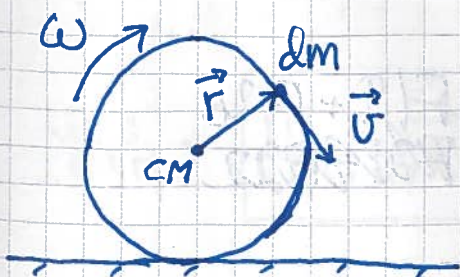


$$d\vec{p} = dm \cdot \vec{u}$$

$$d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p}$$

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times d\vec{p} = \text{systemets totale dreieimpuls}$$

Eks: Rullende ring; CM som ref.punkt



$$d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{u} dm = r \cdot v \cdot dm \cdot \hat{\omega}$$

$$= r \cdot r\omega \cdot dm \cdot \hat{\omega} = dm \cdot R^2 \cdot \hat{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = MR^2 \vec{\omega} = I_0 \vec{\omega}$$

$\hat{\omega}$  inn i planet

## N2 for rotasjon ("spinnsetsen")

[YF 10.5; LL 6.6]

(75)

$$\begin{aligned}\underline{\frac{d\vec{L}}{dt}} &= \frac{d}{dt} \left\{ \vec{r} \times m\vec{v} \right\} = m \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{=\vec{v} \times \vec{v} = 0} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \vec{r} \times (m\vec{a}) \stackrel{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \underline{\vec{\tau}}\end{aligned}$$

(som generaliseres til partikkelsystem på tilsvarende vis som s. 73 og s. 74)

Altså:

$$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

med

$\vec{\tau}$  = netto ytre dreiemoment på systemet  
 $\vec{L}$  = systemets totale dreieimpuls

Jf.  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ ; N2 for translasjon

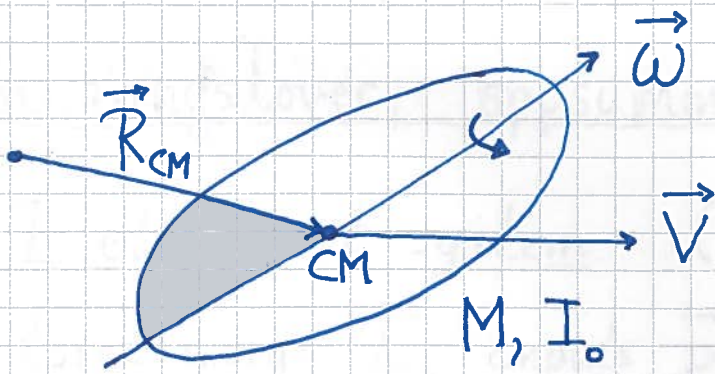
Merk:  $\boxed{\text{Hvis } \vec{\tau} = 0, \text{ er } \vec{L} \text{ bevart}}$

## Total $\vec{L}$ for stivt legeme [YF 10.5; LL 6.6] (76)

- Fra def. følger at for punktmasse  $M$  i avstand  $\vec{R}_{cm}$  fra ref.punktet (=origo), og med hastighet  $\vec{V}$ , er  $\vec{L}_b = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V}$ .
- Eks. side 74 antyder at stivt legeme med treghetsmoment  $I_0$  mhp akse gjennom CM, og med vinkelhastighet  $\omega$  om denne akse, dvs  $\vec{\omega}$  langs samme akse gjennom CM, har dreieimpuls  $\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$  mhp CM.
- Det kan vises (se utlagt notat) at for stivt legeme med refleksjonssymmetri<sup>(\*)</sup> om rotasjonsaksen er total dreieimpuls

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{L}_b + \vec{L}_s \\ &= \vec{R}_{cm} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega}\end{aligned}$$

(\*) Symmetrisk når  $\vec{g} \rightarrow -\vec{g}$



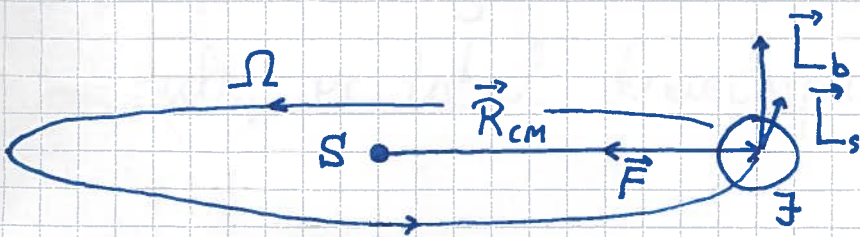
Banedreieimpuls, pga bevegelsen til CM:

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$$

Indre dreieimpuls ("spinn"), pga rotasjon om CM:

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$$

Eks: Jordas  $\vec{L}$  relativt sola



$$\vec{\tau} = \vec{R}_{CM} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \text{konstant}$$

$$L_b = R_{CM} M V = R_{CM}^2 M \Omega \sim (1.5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ år}} \\ \sim 2.7 \cdot 10^{40} \text{ Js}$$

$$L_s = I_0 \omega \approx \frac{1}{3} M R^2 \omega$$

$$\sim \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (6.37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ døgn}} \sim 6 \cdot 10^{33} \text{ Js}$$

$$\Rightarrow L \approx L_b$$

## Bevaningslover, oppsummert

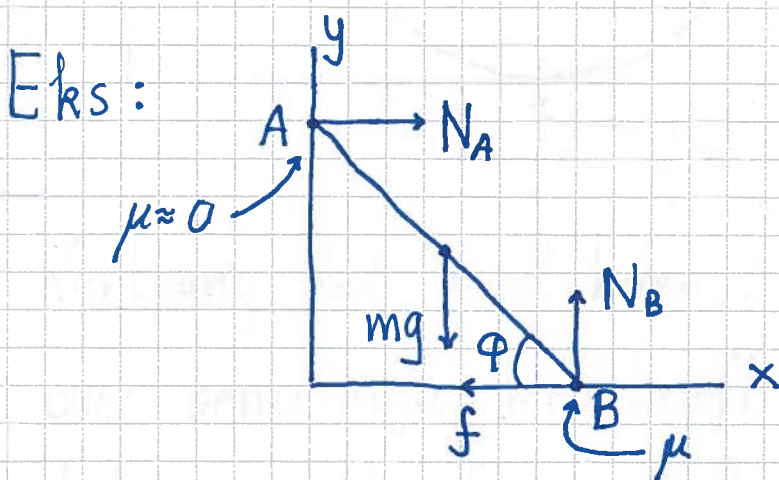
78

- I et isolert system (ingen ytre krefter) er total energi  $E$ , impuls  $\vec{p}$  og dreieimpuls  $\vec{L}$  bevart.
- I et konservativt system er mekanisk energi  $K + U$  bevart.
- Hvis netto ytre kraft på et system er null, er total impuls  $\vec{p}$  bevart.
- Hvis netto ytre dreiemoment på et system er null, er total dreieimpuls  $\vec{L}$  bevart.

# Statisk likevekt [YF 11.1-11.3; LL 7.1] (79)

Et stivt legeme forblir i ro, med  $\vec{p} = 0$  og  $\vec{L} = 0$ , bare dersom netto ytre kraft og netto ytre dreiemoment begge er lik null.

---



$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f = N_A \quad ; \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = mg$$

$$\sum \tau_B = 0 \Rightarrow mg \frac{L}{2} \cos \varphi - N_A L \sin \varphi = 0$$

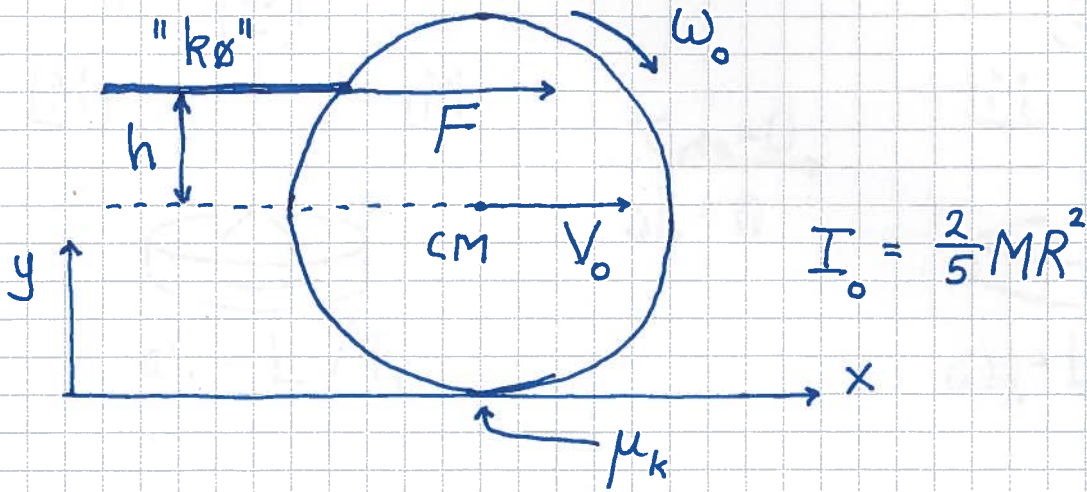
$$f_{\max} = \mu N_B = \mu mg \quad ; \quad f = N_A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cos \varphi_{\min} = \mu \sin \varphi_{\min} \Rightarrow \tan \varphi_{\min} = \frac{1}{2\mu}$$

$$\text{Hvis } \mu = 0.3, \text{ er } \varphi_{\min} = \arctan\left\{\frac{1}{0.6}\right\} = 59^\circ$$

# Rotasjonsdynamikk ; eksempler.

Eks 1: Snooker [LL 6.7 ; Øv. 6]



Kortvarig støt med køen,  $\Delta t \approx 0$ , i høyde  $h$  over sentertinja med kraft  $F \gg f$  ;  $f =$  friksjonskraft fra underlaget.

N2, trans. :  $F \Delta t = \Delta p = Mv_0$

N2, rot. om CM :  $\tau \Delta t = Fh \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$

$\Rightarrow$  Sluring i starten, med mindre  $h = \dots$

Ren rulling etter hvert, uansett  $h$ -verdi.

Med origo som ref. punkt:

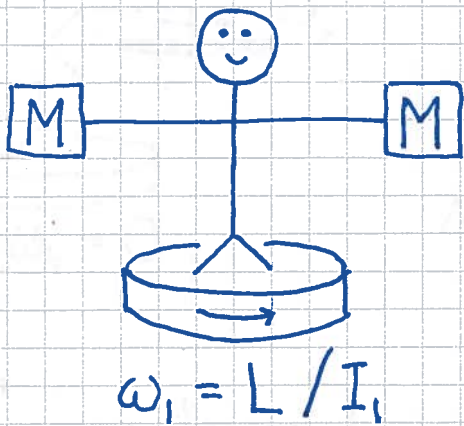
$$\left. \begin{aligned} \vec{L}_b &= \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = -RMV \hat{z} \\ \vec{L}_s &= I_0 \vec{\omega} = -\frac{2}{5}RMV \hat{z} \end{aligned} \right\} \text{ ved ren rulling}$$



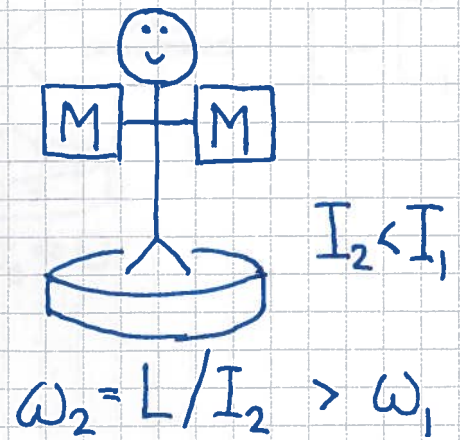
## Eks 2: Piruett [YF 10.6; LL 6.5]

(81)

Prinsipp: Bevart  $L = I\omega$ , redusert  $I$ , økt  $\omega$ .



$$\begin{array}{c} \sum \tau_{\text{ytre}} = 0 \\ \hline \Delta L = 0 \end{array} \rightarrow$$



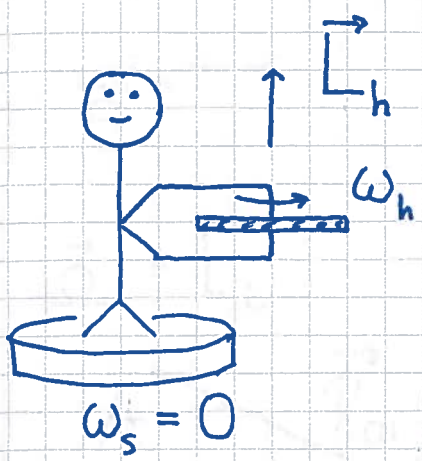
$K_{\text{rot}}$  øker:

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$

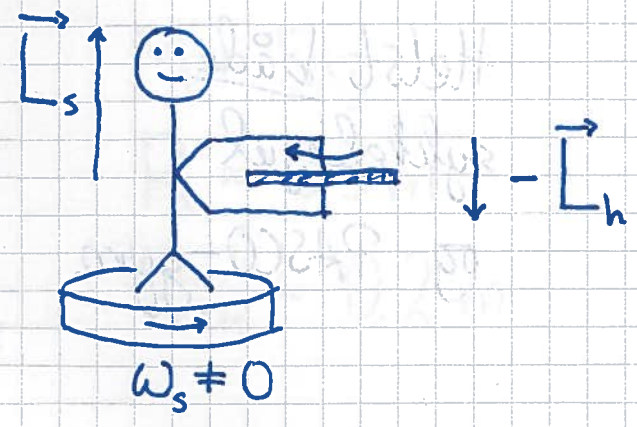
$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1 \cdot \omega_2 = K_1 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} > K_1$$

Musklene gjør arbeid på de to massene M.

# Eks 3: Student med roterende hjul



Snu hjul  
 $\vec{\tau}_{\text{ytre}} = 0$   
 $\Delta \vec{L} = 0$



$\vec{L}$  er bevart.

Før:  $\vec{L} = \vec{L}_h$

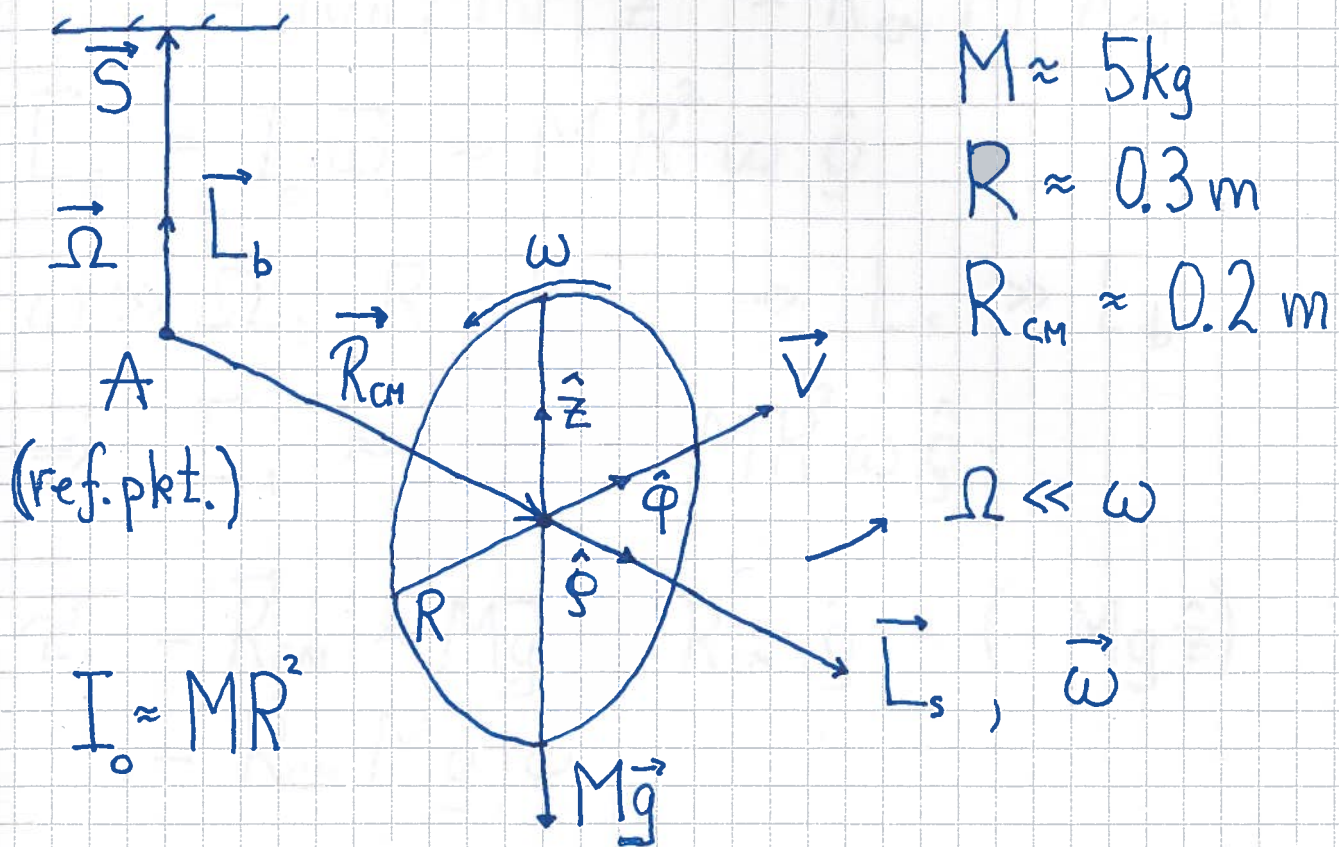
Etter:  $\vec{L} = \vec{L}_s - \vec{L}_h$

$\Rightarrow \vec{L}_s = 2\vec{L}_h$

$\Rightarrow \omega_s \neq 0$

# Eks 4: Presesjon [YF 10.7 ; LL 6.10]

(83)



Exp:  $T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 5 \text{ s}$  når hjulet settes i rotasjon for hånd.

Finn sammenheng mellom  $\omega$  og  $\Omega$ .

Løsning: N2 for rotasjon om A.

$$\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A / dt$$

med 
$$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s$$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V} = R_{cm} \hat{g} \times MV \hat{\phi} \quad (84)$$

$$= R_{cm} MV \hat{z} = R_{cm} M R_{cm} \Omega \hat{z}$$

$$\vec{L}_s = I_o \vec{\omega} \approx MR^2 \omega \hat{g}$$

$$\omega \gg \Omega, \quad R \sim R_{cm} \Rightarrow L_s \gg L_b$$

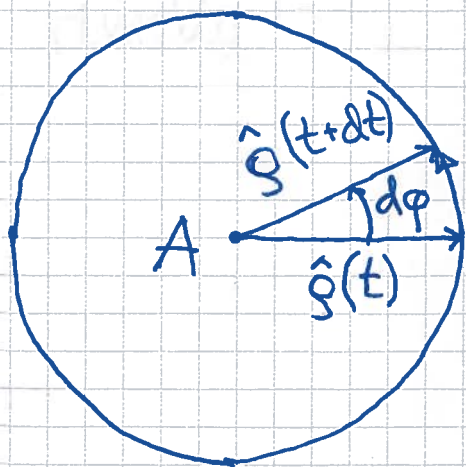
$$\Rightarrow \vec{L}_A \approx \vec{L}_s = MR^2 \omega \hat{g}$$

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} = R_{cm} \hat{g} \times (-Mg \hat{z})$$

$$= R_{cm} Mg \hat{\phi}$$

$$d\vec{L}_A/dt = MR^2 \omega d\hat{g}/dt$$

Sett ned langs z-aksen:



$$d\hat{g} = \underbrace{|\hat{g}|}_{=1} \cdot d\phi \cdot \hat{\phi} = d\phi \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{g}}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \cdot \hat{\phi} = \Omega \cdot \hat{\phi}$$

Dermed:

$$R_{cm} Mg \hat{\phi} = MR^2 \omega \Omega \hat{\phi}$$

$$\Rightarrow \omega = R_{cm} g / R^2 \Omega$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{T_\omega} = \frac{R_{cm} g T_\Omega}{R^2 \cdot 2\pi}$$

$$\Rightarrow \underline{T_\omega = \frac{(2\pi R)^2}{R_{cm} g T_\Omega}}$$

Tallverdi:

$$T_\omega \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 5} \approx \frac{2^2}{10} = \underline{0.4 s}$$

dus ca 2.5 omdreiningen pr sekund;  
rimelig!

# Swingninger [YF 14 ; LL 9] (86)

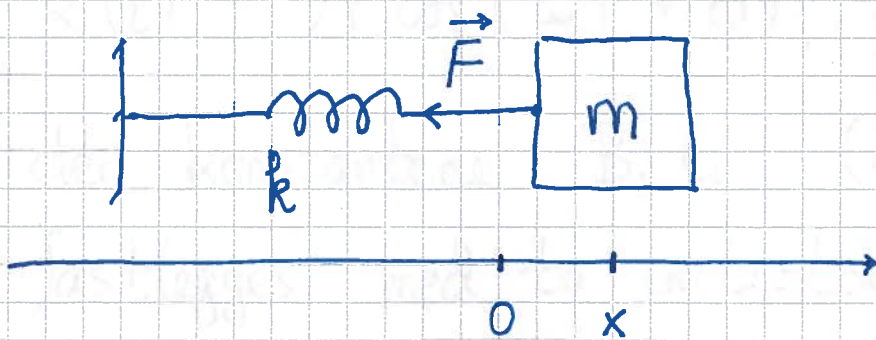
Generelt: Periodisk oppførsel omkring en likevekt.

En kraft trekker systemet tilbake mot likevekt. (Eng: "restoring force")

Eks: Masse / fjær. Pendler. Fiolinstreng.  
Atomer i molekylar og faste stoffer. Osu.

---

## Harmonisk oscillator [YF 14.2; LL 9.1-9.3]



Likevekt ( $F=0$ )

når  $m$  er i  
posisjon  $x=0$ .

$x$  = posisjonen til  $m$

= fjæras forlengelse ( $x > 0$ ) eller  
sammenpressing ( $x < 0$ )

$\vec{F}$  = kraft på  $m$  fra fjæra; retning tilbake  
mot likevekt

Ideell fjær oppfyller Hookes lov :

$$\vec{F} = -k \times \hat{x}$$

$k$  = fjærkonstanten

$$[k] = \text{N/m}$$

$$N2: -kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = k/m$$

som er bevegelsesligning for harmonisk oscillator i 1D, med løsning

$$x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t, \text{ evt.}$$

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

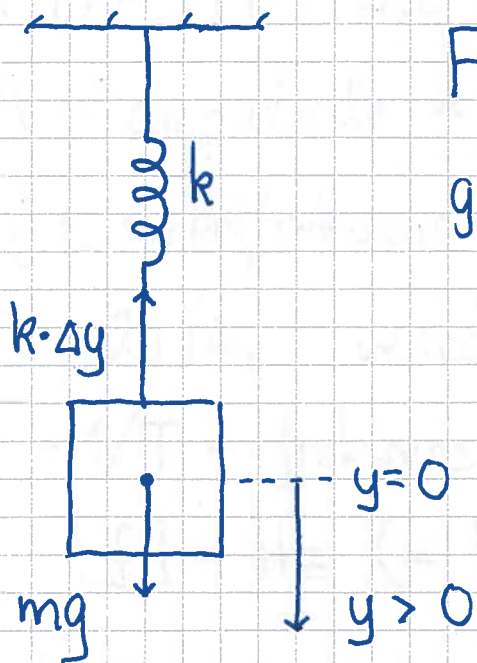
der konstantene  $B, C$  (evt.  $A, \varphi$ )

fastlegges med to initialbetingelser,

$$\text{f.eks. } x(0) = x_0 \text{ og } \dot{x}(0) = v_0$$

En konstant tilleggskraft forandrer likevektsposisjonen, men gir uendret bevegelsesligning.

# Eks: Masse og fjær i tyngdefeltet



Fjærforlengelse i likevekt,  $\Delta y$ ,  
gitt ved N1:

$$k \cdot \Delta y = mg \Rightarrow \Delta y = mg/k$$

Anta  $m$  (CM) i  $y=0$   
i strukket likevekt.

N2 når  $m$  er i posisjon  $y$ :

$$m\ddot{y} = mg - k(\Delta y + y) = -ky$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = k/m$$

dos harmoniske svingninger omkring den  
strukkede likevekten



Diverse størrelser (jf. sirkelbevegelse):

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  = utsving fra likevekt

A = amplitude = max utsving fra likevekt; [A] = [x]

$\omega_0$  = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet; [ $\omega_0$ ] = 1/s

T =  $2\pi / \omega_0$  = periode = tid pr hel svingning; [T] = s

f =  $1/T$  = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet;

[f] = Hz (= 1/s)

$\omega_0 t + \varphi$  = svingningens fase

$\varphi$  = fasekonstant; [ $\varphi$ ] = 1

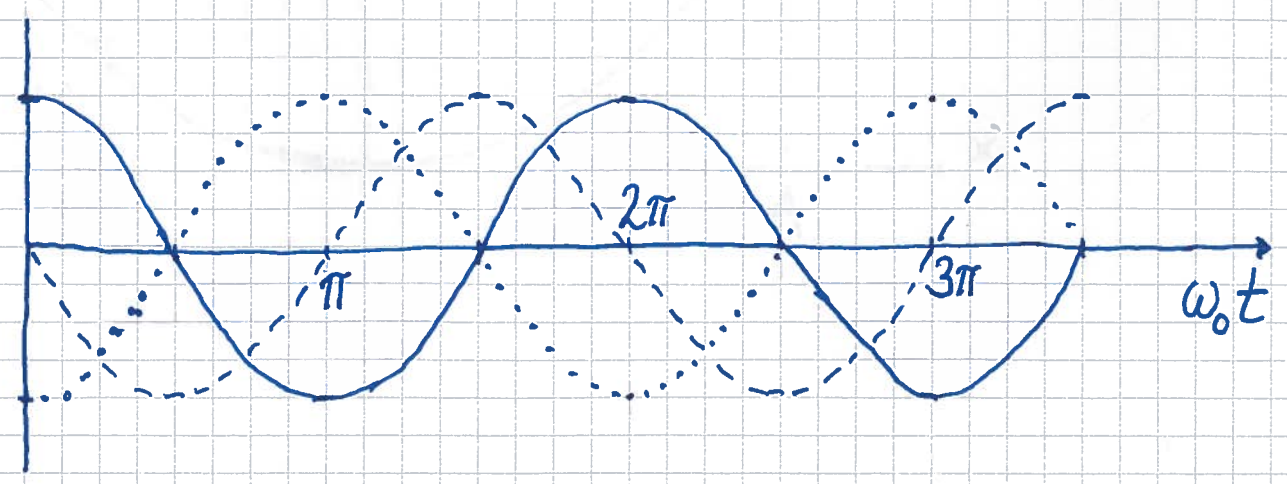
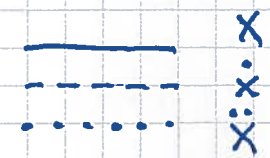
$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2)$

= hastighet

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$

= akselerasjon

Grafisk, med  $\varphi = 0$ :



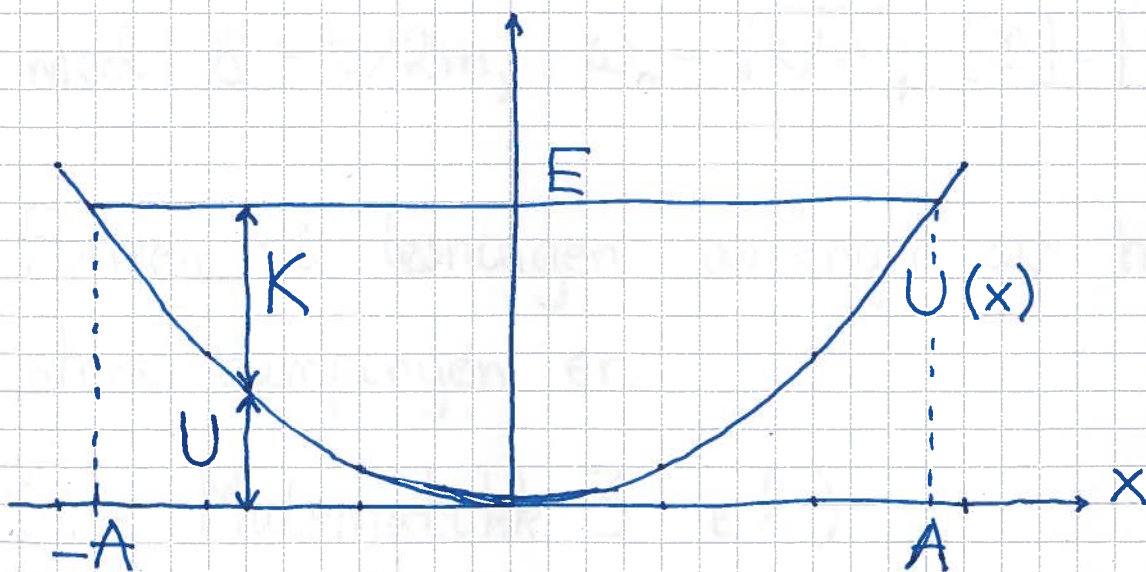
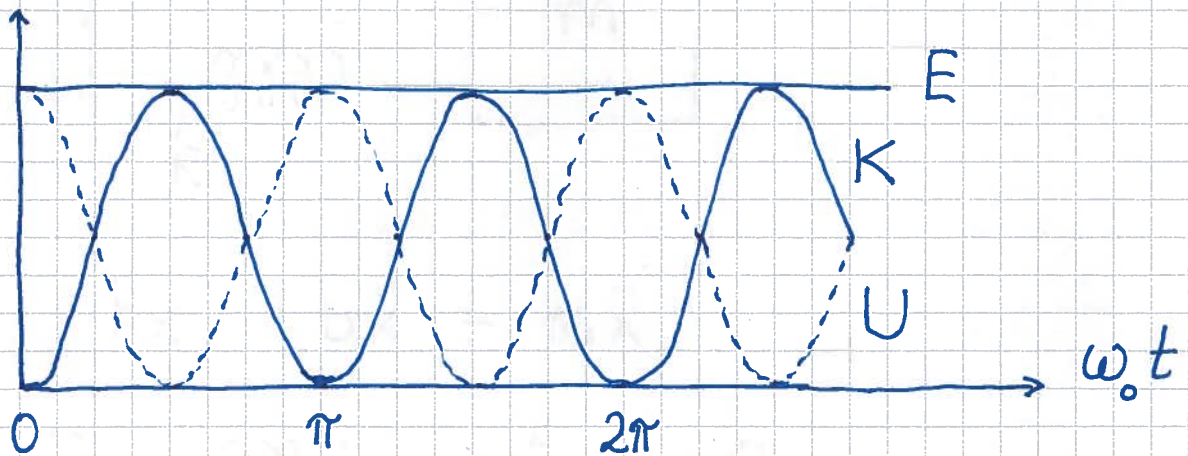
# Energi i en harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4] <sup>(90)</sup>

Konservativt system  $\Rightarrow$  Mek. energi er bevart

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$U = - \int_0^x (-kx) \cdot dx = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

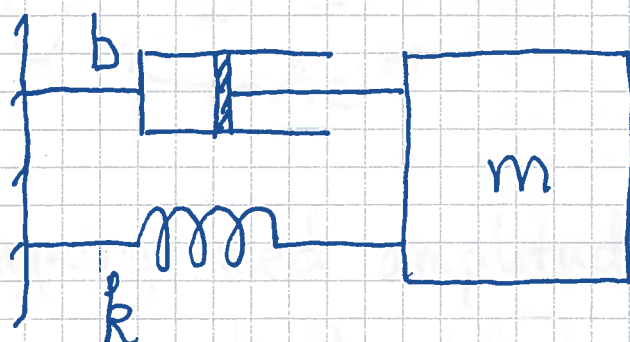
$$\Rightarrow E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 \quad (\text{uavh. av } t)$$



## Dempet fri svingning [YF 14.7; LL 9.7] (91)

Antar friksjonskraft  $f = -b\dot{x}$ , dvs som ved langsom bevegelse i fluid.

(Alternativ:  $f = -D\dot{x}^2$  eller  $f = \mu_k N$ )



$$N2: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

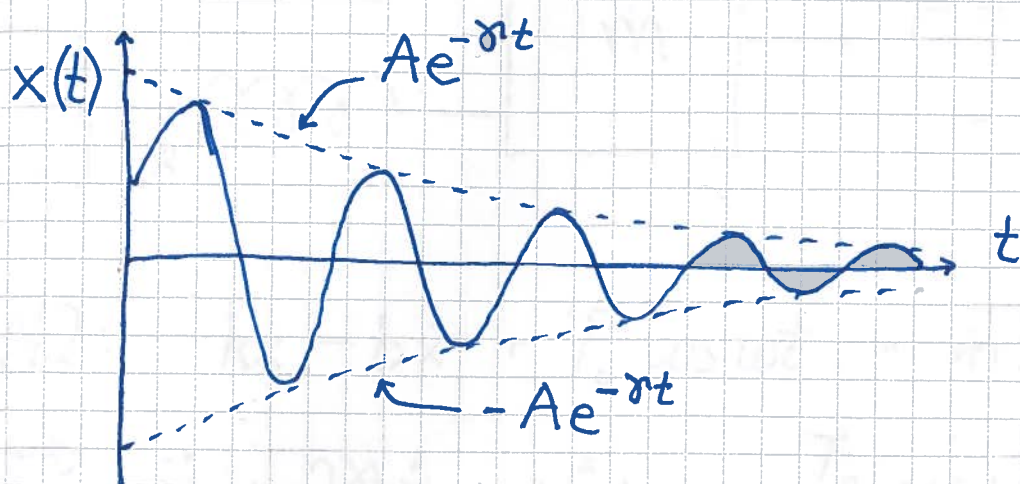
$$\text{med } \gamma = b/2m, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}; \quad [\gamma] = [\omega_0] = \frac{1}{s}$$

Formen på løsningen avhenger av hvor sterk dempingen er.

(Se Matematikk 3 e.l.)

Underkritisk (svak) damping ;  $\gamma < \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



dis svingning med amplitude,  $Ae^{-\gamma t}$ , som avtar eksponentielt med  $t$ ; etter en "karakteristisk" tid  $\tau = 1/\gamma$  er amplituden redusert til  $A/e \approx 0.37 A$ .

Overkritisk (sterk) damping ;  $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

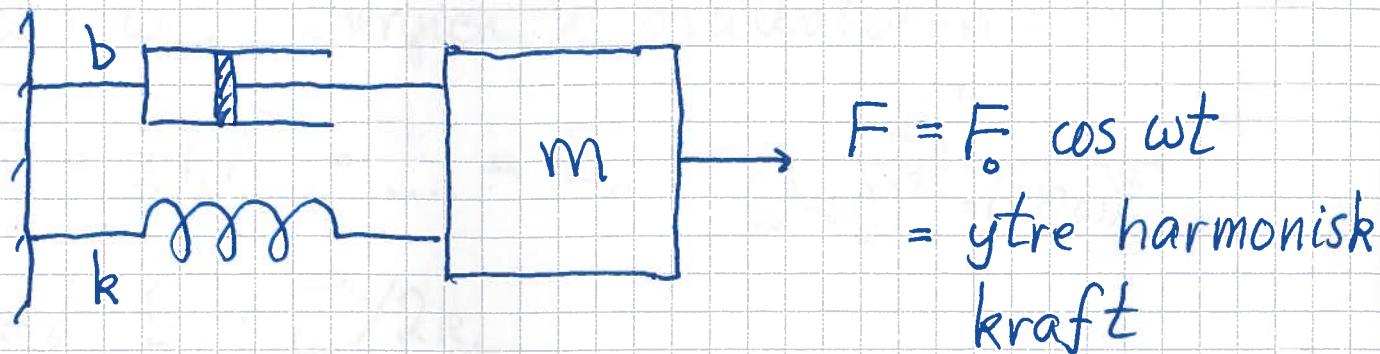
$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} , \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk damping,  $\gamma = \omega_0$  ( $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$ )

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\gamma t}$$

Minste damping som ikke gir svingninger ;  
bra f.eks. i støtdempere.

# Tvingen svingning; resonans [YF 14.8; LL 9.9] (93)



$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad \left( \begin{array}{l} \gamma = b/2m \\ \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{array} \right)$$

Generell løsning:  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

der "homogen" løsning  $x_h$  oppfyller

$$\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

slik at  $x_h \sim \exp(-\gamma t) \rightarrow 0$  når  $t \gg 1/\gamma$ . Dvs,

$x_h(t)$  er kun viktig for innsvingningsforløpet.

Antar nå at  $t \gg 1/\gamma$ , slik at

$$x(t) = x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

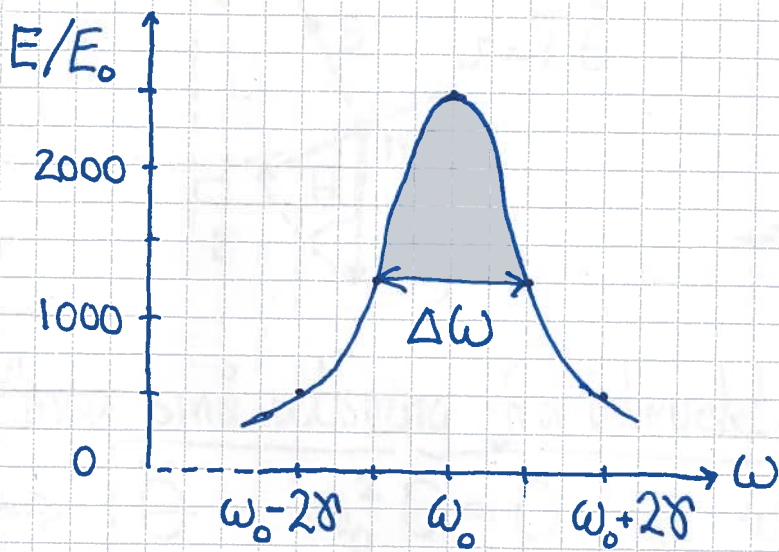
Innsetting av  $x_p$ ,  $\dot{x}_p$  og  $\ddot{x}_p$  i N2 gir

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}} \quad ; \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

Resonans:  $A$  blir stor hvis  $\gamma \ll \omega_0$  og  $\omega \approx \omega_0$ . Energien i oscillatoren:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \dots = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

med  $E_0 = F_0^2/2k$ .



Eks:  $\omega_0 = 100 \gamma$

$\omega$	$E/E_0$
$\omega_0$	2500
$\omega_0 \pm \gamma$	1250
$\omega_0 \pm 2\gamma$	500

Resonanskurvens halvverdibredde:  $\Delta\omega \approx 2\gamma$

Oscillatorens Q-faktor:  $Q \equiv \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}$

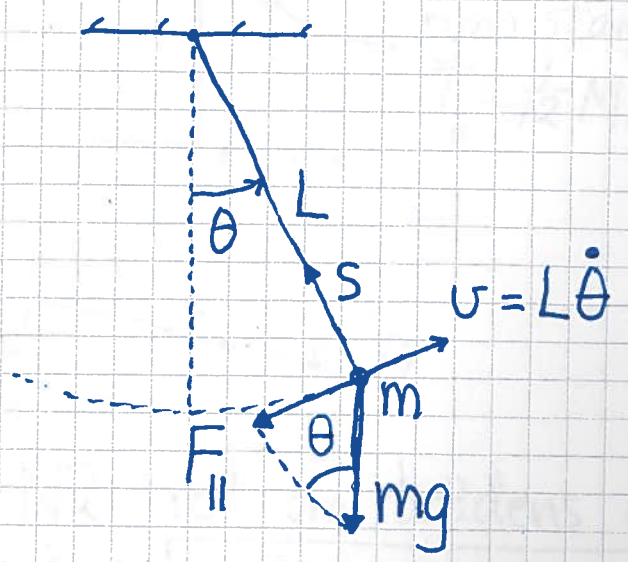
Smal resonanskurve  $\Rightarrow$  Høy Q-faktor

Demo:  $T_0 \approx 0.65 \text{ s}$ ,  $f_0 \approx 1.55 \text{ Hz}$ ,  $\Delta f \approx 0.15 \text{ Hz}$   
 $\Rightarrow Q \approx 10$

# Pendler

## Matematisk pendel [YF 14.5; LL 9.6]

Punktmasse  $m$  i masseløs snor med lengde  $L$ .



$$F_{\parallel} = ma_{\parallel} \text{ med}$$

$$F_{\parallel} = -mg \sin \theta,$$

$$a_{\parallel} = \dot{v} = L \ddot{\theta}$$

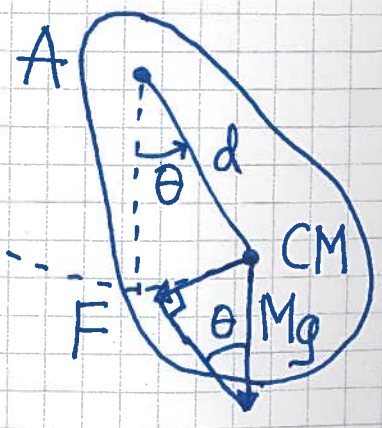
$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL \ddot{\theta}$$

Anta små utsving fra likevekt,  $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \omega_0^2 = g/L}$$

## Fysisk pendel [YF 14.6; LL 9.6]

Stivt legeme, masse  $M$ , treghetsmoment  $I$  mhp  $A$ .



N2, rotasjon om  $A$ :

$$\tau = I \ddot{\theta} \text{ med}$$

$$\tau = -F \cdot d = -Mgd \sin \theta$$

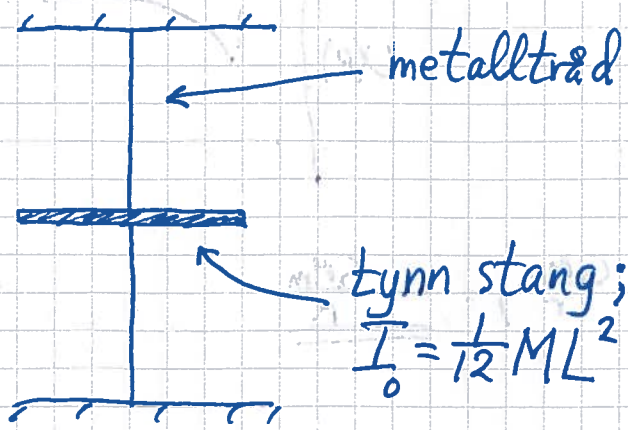
( $\tau > 0$  mot klokka)

Anta  $|\theta| \ll 1 \Rightarrow$   
( $\Rightarrow \sin \theta = \theta$ )

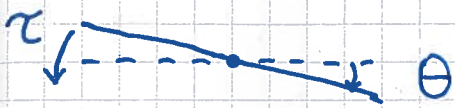
$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \omega_0^2 = Mgd/I}$$

# Torsjonsspendel [YF 14.4; LL 9.6]

(96)



Vridning vinkel  $\theta$  av metalltråden gir dreiemoment  $\tau = -\mathcal{K}\theta$  på stanga;  $\mathcal{K}$  = torsjonsstivheten til metalltråden



N2, rot. om trådens akse:  $\tau = I_0 \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \omega_0^2 = \mathcal{K} / I_0$$

Demo:  $M = 50 \text{ g}$ ,  $L = 11 \text{ cm}$ ,  $T = 0.8 \text{ s}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{K} &= I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot (2\pi/T)^2 \\ &= ML^2 \pi^2 / 3T^2 \approx \underline{0.003 \text{ Nm}} \end{aligned}$$