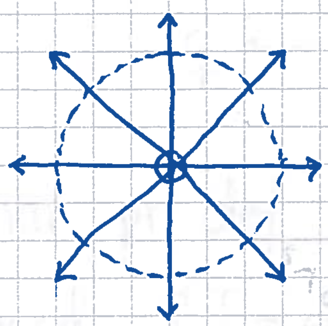
Feltlinjer for $\vec{E}$ [YF 21.6; LHL 19.6]

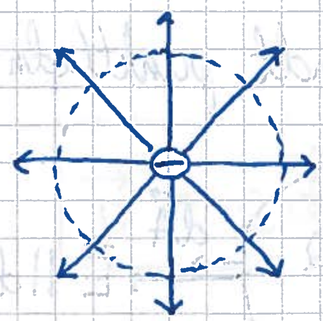
Visuelt bilde av $\vec{E}$ i området omkring ladningen(e). Retning: $\vec{E} \parallel$ feltlinjene.

Feltstyrke: $E = |\vec{E}|$ er prop. med antall feltlinjer som krysser en flate, pr flateenhet.

Eks 1: Punktladning

Feltlinjene starter/slutter på positiv/negativ ladning og går radielt utover/innover.





Anta N feltlinjer ut/inn gjennom kuleflate med radius r, areal $4\pi r^2$.

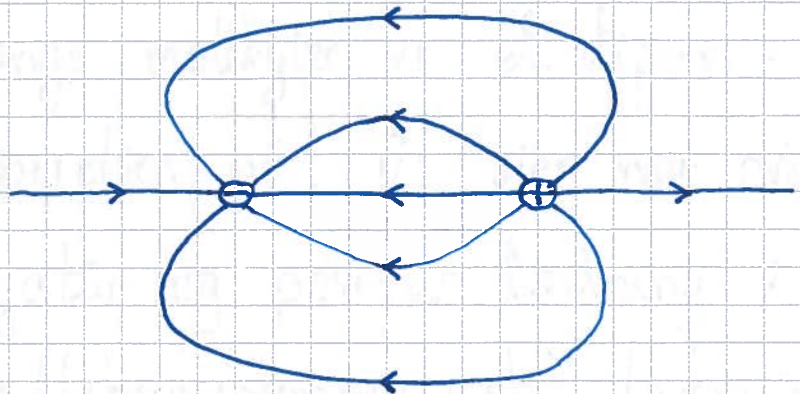
Feltlinjetetthet på kuleflaten: $\frac{N}{A} = \frac{N}{4\pi r^2}$

Feltstyrke ——"—— : $E = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$

$\Rightarrow$ E og N/A avtar begge som $1/r^2$

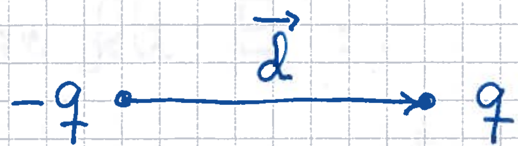
$\Rightarrow$ E er prop. med N/A, som antatt

Eks 2: Elektrisk dipol



Elektrisk dipolmoment [YF 21.7 ; LHL 19.10]

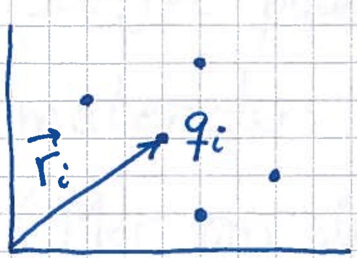
En enkel dipol,



har pr def dipolmoment $\boxed{\vec{p} = q\vec{d}}$

med SI-enhet C·m.

Generelt, for system med flere punktladninger:



$$\boxed{\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i}$$

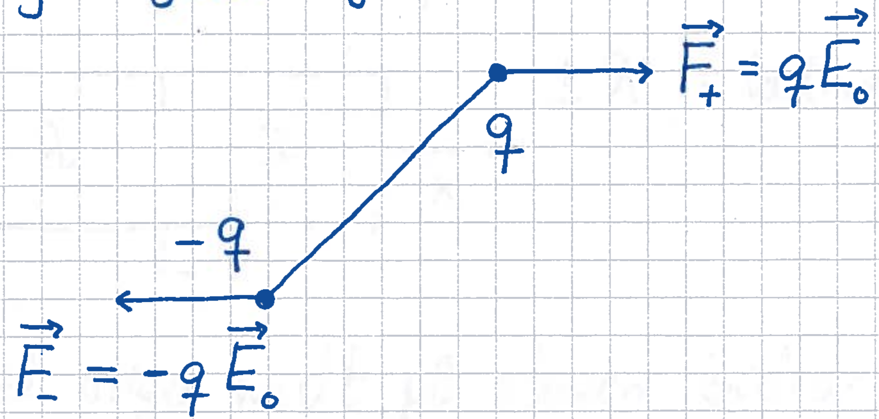
Med kontinuerlig ladningsfordeling: $\boxed{\vec{p} = \int \vec{r} \cdot dq}$

NB: Netto ladning = 0 for elektrisk dipol!

Anvendelser:

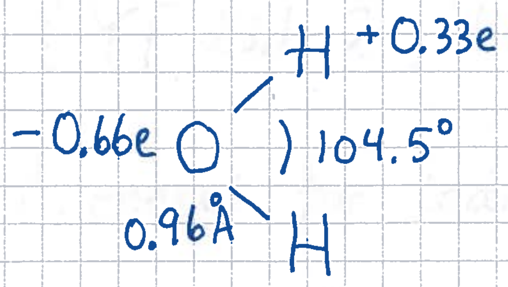
- Mange molekyler er el. dipoler: H_2O, NH_3 etc.
  Størrelsen på $|\vec{p}|$ sier noe om fordelingen av negativ og positiv ladning i molekylet.
  "Refleksjonssymmetrisk" ladningsfordeling mhp et punkt i molekylet gir $p = 0$.
  Eks: CO_2 ; $O=C=O$

- Molekylære dipoler rettes inn langs et ytre felt $\vec{E}_0$:

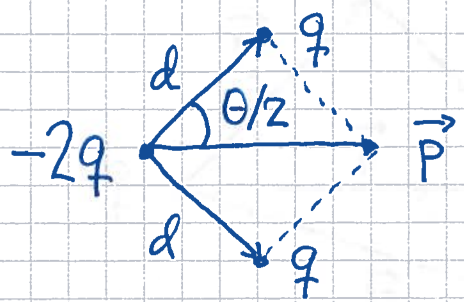


Stoffet <u>polariseres</u>. Viktig for å skjønne materialers elektriske egenskaper.
(Mer om det senere.)

Eks 1: Punktladningsmodell for H_2O



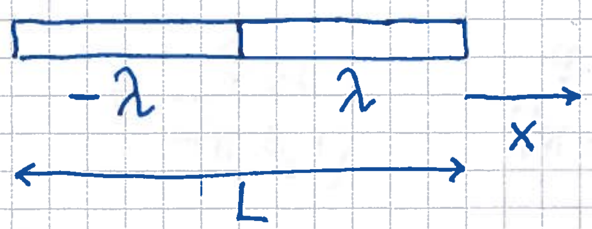
$\vec{p} = ?$



Med $-2q$ i origo:

$$p = 2\,q\,d\cos\theta/2$$
$$= 2\cdot 0.33e\cdot 0.96\,\text{Å}\cdot\cos 52.25^\circ$$
$$= \underline{\underline{0.39\,e\text{Å} = 6.2\cdot 10^{-30}\ \text{Cm}}}$$

Eks 2: Stavdipol



$\pm\lambda$ = ladning pr lengdeenhet

Med origo midt på staven bidrar ladningsparet $\pm\, dq = \pm\lambda\cdot dx$ i posisjon $\pm x$ med dipolmoment $d\vec{p} = 2x\lambda\, dx\,\hat{x}$. Totalt dipolmoment blir

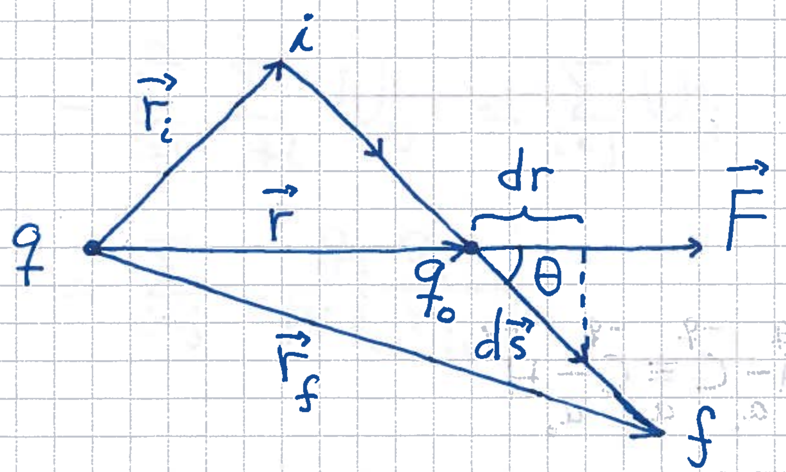
$$\vec{p} = \int d\vec{p} = \int_0^{L/2} 2x\lambda\, dx\,\hat{x} = 2\lambda\hat{x}\,\Big|_0^{L/2}\tfrac{1}{2}x^2 = \underline{\underline{\tfrac{1}{4}\lambda L^2\hat{x}}}$$

[Rimelig? $[\lambda L^2] = \text{C}\cdot\text{m}$; som punktladn. $\pm\lambda\cdot L/2$ i innbyrdes avstand $L/2$; OK!]

Potensiell energi. Elektrisk potensial

[YF 23.1-2 ; LHL 19.9, 20.3]

Pot. energi for ladningspar q og q_0 :



$$\vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cdot ds\cdot\cos\theta = F\cdot dr$$

$$\Delta U = U_f - U_i \stackrel{\text{def}}{=} -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_{r_i}^{r_f} \frac{q q_0\, dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_f} - \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

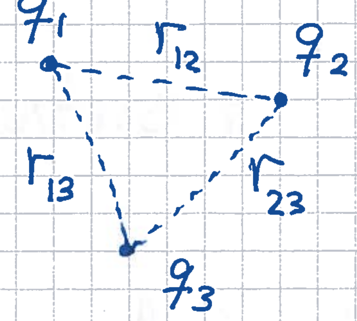
Her naturlig å velge $U = 0$ for $r \to \infty$

$$\Rightarrow \boxed{U(r) = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

for ladn. par q, q_0 i innbyrdes avstand r

Flere ladninger: Alle q_i og q_j vekselvirker parvis; med $U_{ij} = 0$ for $r_{ij} \to \infty$:

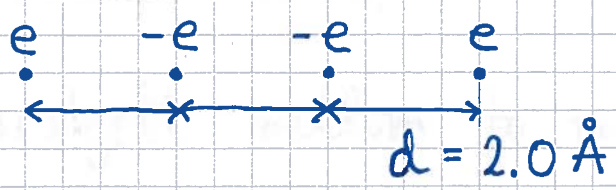
$$U = U_{12} + U_{13} + \dots + U_{23} + \dots$$



$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} U_{ij} = \sum_{i<j} U_{ij}$$

$$= \sum_{i<j} \frac{q_i \, q_j}{4\pi \varepsilon_0 r_{ij}}$$

Eks: Beregn U for systemet



Løsn: 6 ladn. par bidrar

$$U = \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 d} \left\{ 2 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{(-1)}{2} + 1 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{3} \right\}$$

$$= \frac{e^2}{4\pi \varepsilon_0 d} \cdot \left(-\frac{5}{3} \right)$$

$$\approx -9 \cdot 10^9 \cdot \frac{5 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2}{3 \cdot 2.0 \cdot 10^{-10}} \text{ J} = \underline{-1.9 \cdot 10^{-18} \text{ J}}$$

[Ser at 1 J er en stor energi på atomært nivå...!]

Elektrisk potensial $\stackrel{\text{def}}{=}$ pot.energi pr ladningsenhet

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{U}{q_0} \; ; \; [V] = J/C = V \text{ (volt)}}$$

For ladn.par q, q_0 i innbyrdes avstand r er $U = qq_0 / 4\pi\varepsilon_0 r$.

En punktladning q omgir seg derfor med potensialet

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}} \quad \text{Coulombpotensialet}$$

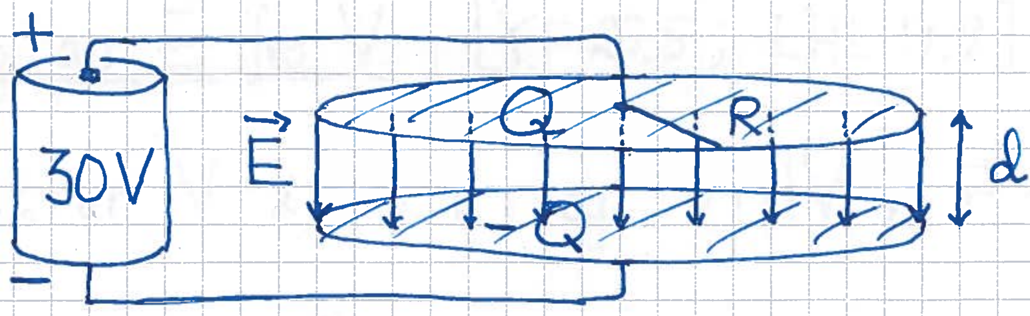
Potensialforskjell mellom to posisjoner f og i:

$$\Delta V = \frac{\Delta U}{q_0} = -\int_i^f \frac{\vec{E}}{q_0} \cdot d\vec{s} = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

dvs $$\boxed{V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}}$$

- Ser da at $[E] = V/m$ (mer brukt enn N/C)
- Energienheten eV (elektronvolt) = elementærladningen e ganget med 1 V, dvs $1\,\text{eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 1\,\text{J/C} = 1.6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$. Hensiktsmessig med eV på atomær skala.

Eks:



Platekondensator, $d = 2.0$ mm, $R = 10$ cm, $\Delta V = 30$ V.

Finn ladningen $\pm Q$ på metallplatene

Løsn: Fra s. 108 er $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/A\varepsilon_0$ mellom platene ($E = 0$ utenfor).

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_+^- E \cdot ds = E \cdot d$$

$$= Q \cdot d / A\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow Q = \Delta V \cdot A\varepsilon_0 / d = 30\,\text{V} \cdot \pi \cdot (0.10\,\text{m})^2 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N\cdot m^2} / 2.0 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$$

$$= 4.2 \cdot 10^{-9}\,\text{C} = \underline{4.2\,\text{nC}}$$

$$\left(V \cdot m^2 \cdot \frac{C^2}{Nm^2} \cdot \frac{1}{m} = \frac{J}{C} \cdot m^2 \cdot \frac{C^2}{J \cdot m} \cdot \frac{1}{m} = C \; ; \; \text{OK}\right)$$

Siden $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s}$, peker $\vec{E}$ i retning lavere potensial. Vet fra før at $\vec{E}$ går fra $+Q$ mot $-Q$. Følgelig høyere potensial på plate med pos. ladn. enn —"— —"— neg. —"—

Beregning av $\vec{E}$ fra V [YF 23.5 ; LHL 19.9]

Hvis pot. er V i pos. $\vec{r}$ og $V + dV$ i $\vec{r} + d\vec{s}$,

$$\begin{array}{ccc} \vec{r} & \xrightarrow{\quad d\vec{s} \quad} & \vec{r} + d\vec{s} \\ V & & V + dV \end{array}$$

så kan pot.endringen dV uttrykkes slik:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz \qquad \text{(et "totaltdifferensial")}$$

$$= \left\{ \hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \right\} \cdot \left\{ \hat{x}\, dx + \hat{y}\, dy + \hat{z}\, dz \right\}$$

$$= \underbrace{\nabla V}_{\text{(gradienten til } V)} \cdot \underbrace{d\vec{s}}_{\text{(veielement)}}$$

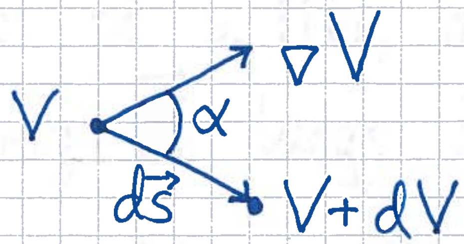
Samtidig er $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$.

Dermed må vi ha:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

(Siden $\vec{E} = \vec{F}/q_0$ og $V = U/q_0$, har vi også $\vec{F} = -\nabla U$)

Hvordan tolke vektoren ∇V ?



$$dV = \nabla V \cdot d\vec{s} = |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos\alpha$$

$\Rightarrow$ Vi får maksimal pot.endring dV dersom forflytningen $d\vec{s}$ er i samme retning som ∇V. (Da er $\alpha = 0$ og $\cos\alpha = 1$)

Med andre ord:

∇V er en vektor som peker i den retningen som V øker raskest, med absoluttverdi lik endringen i V pr lengdeenhet.

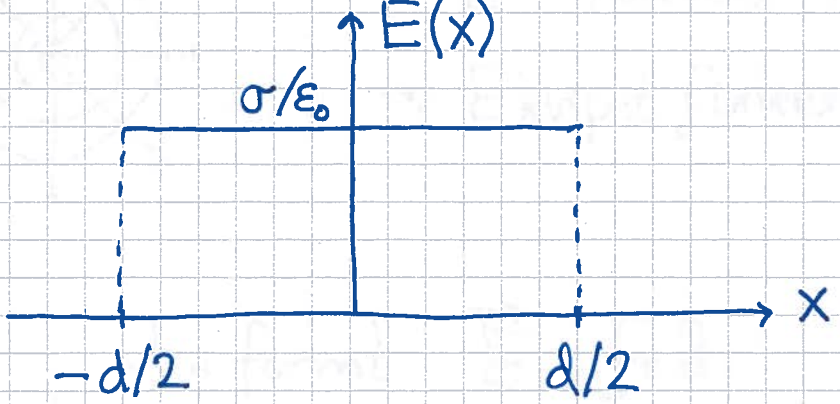
Og $|\nabla V|$ er lik den elektriske feltstyrken $|\vec{E}|$ på det aktuelle stedet.

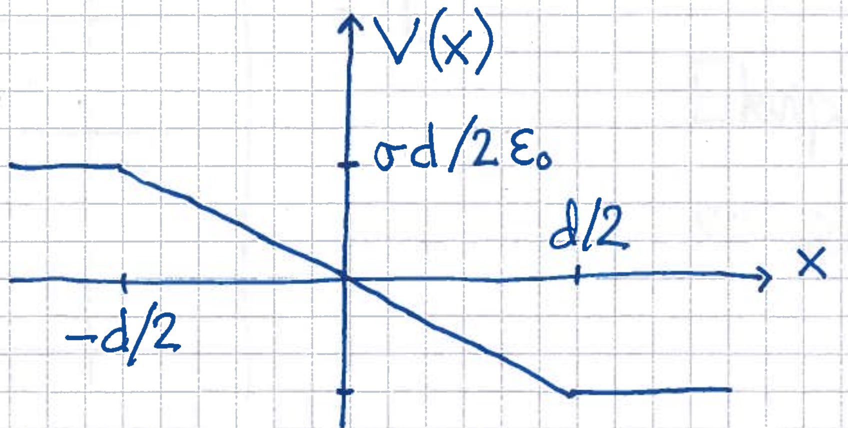
Eks: Finn uttrykk for $\vec{E}(x)$ og $V(x)$ i eks. på s. 116, og skissér $E(x)$ og $V(x)$. Velg $\vec{E}$ langs $\hat{x}$ og $x=0$ midt mellom platene.

Løsn: Mellom platene er $|\vec{E}| = Q/A\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon_0$, slik at $\vec{E} = \hat{x}\,\sigma/\varepsilon_0$ (uavh. av x). Med $\vec{E} = -\nabla V = \hat{x}\,\sigma/\varepsilon_0$ er $dV/dx = -\sigma/\varepsilon_0$, slik at $V(x) = -\sigma x/\varepsilon_0$.

(for $|x| < d/2$)

Skisser:





der vi valgte $V_+ = V(-d/2) = \sigma d/2\varepsilon_0$

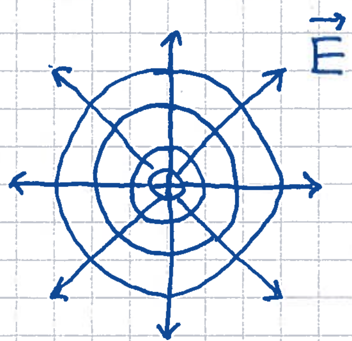
Ekvipotensialflater [YF 23.4 ; LHL 19.11]

= flater med konstant potensial V

Hvis $d\vec{s}$ er forflytning på en ekvipot. flate, er $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$, dvs $\vec{E} \perp d\vec{s}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} \perp \text{ ekvipotensialflatene}}$$

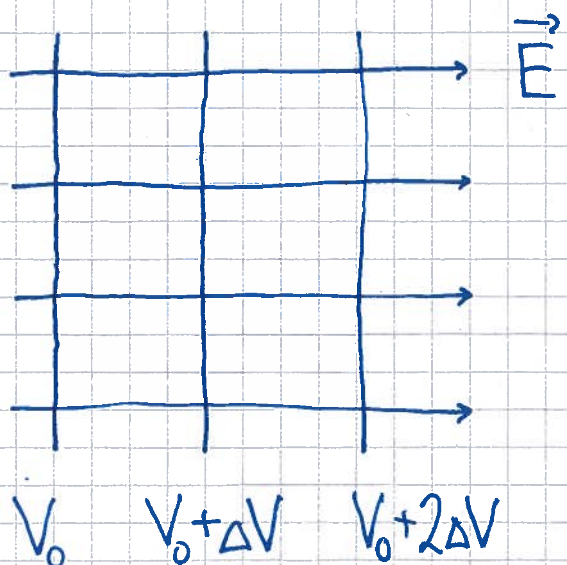
Eks 1: Punktladning



$\vec{E}$ radielt rettet

$\Rightarrow$ Ekvipot. flatene er kuleskall

Eks 2: Uniformt $\vec{E}$-felt



Ekvipot. flatene er plan $\perp$ $\vec{E}$

(her med $\Delta V < 0$)