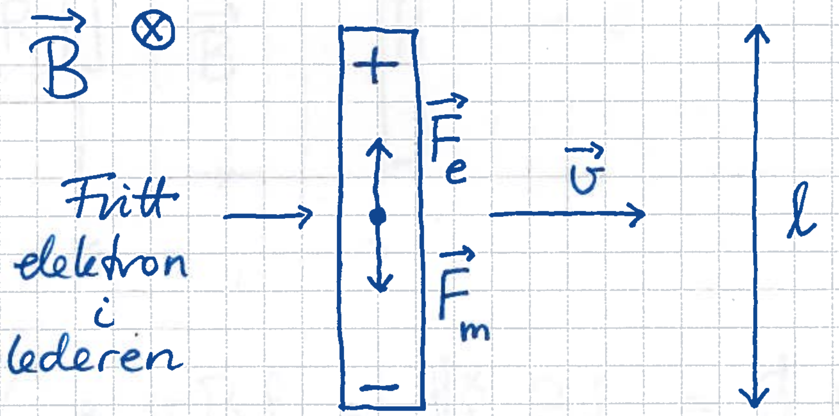
Elektrodynamikk

[YF 29-31 ; LHL 24, 25, 27]

Faradays induksjonslov [YF 29.1+2+4 ; LHL 24.1]

Vi drar en leder med lengde ℓ gjennom et uniformt magnetfelt $\vec{B}$, med hastighet $\vec{v} \perp \vec{B}$:



$\vec{F}_m = -e\,\vec{v} \times \vec{B}$ har retning nedover og gir overskudd av elektroner nederst, underskudd øverst.

Et elektrisk felt $\vec{E}$ er <u>indusert</u> i lederen, med retning fra pos. mot neg. ladning, dvs nedover.

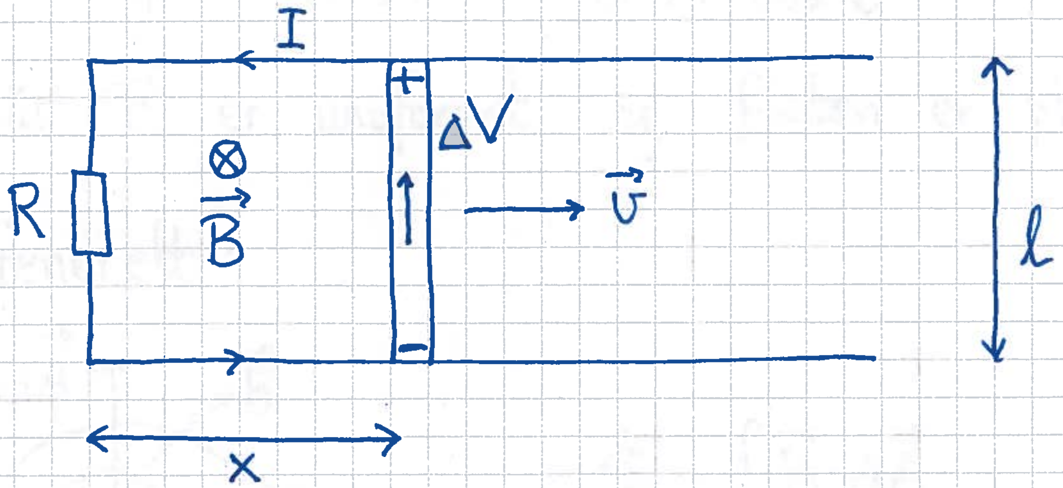
Men da er det også <u>indusert</u> en <u>spenning</u> i lederen : $\Delta V = E \cdot \ell$

Likevekt når $\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0$

$$\Rightarrow \quad eE = evB \quad \Rightarrow \quad E = vB$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = vB\ell$$

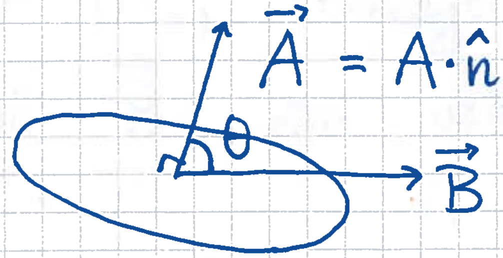
Spenningen ΔV vil drive en strøm hvis vi lager lukket krets : $I = \Delta V / R = vB\ell / R$



$$\Delta V = vB\ell = \frac{dx}{dt} B\ell = \frac{d}{dt}(B\ell x) = \frac{d}{dt}(B \cdot A)$$

med $A = \ell x$ = areal omsluttet av strømsløyfa

Magnetisk fluks [YF 27.3; LHL 23.7 (19.7)]

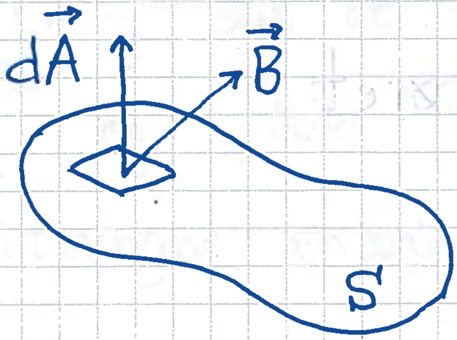


Magnetisk fluks gjennom flaten er

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos\theta$$

når $\vec{B}$ er uniformt og flaten er plan.

Generelt:



$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

I eksempelet s. 175 har vi nå:

$$\boxed{\Delta V = (-)\, d\Phi/dt}$$ Faradays induksjonslov

Indusert spenning i sløyfe er lik endring i omsluttet magnetisk fluks pr tidsenhet.

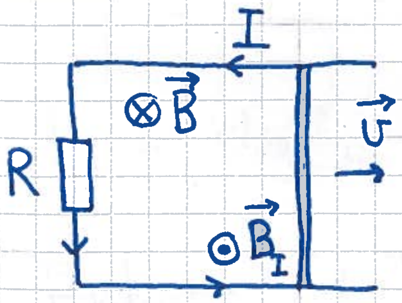
Dette viser seg å gjelde <u>generelt</u>, enten det er $|\vec{A}|$, retningen på $\vec{A}$, $|\vec{B}|$ eller retningen på $\vec{B}$ som varierer med tiden t.

<u>Lenz' lov</u> [YF 29.3 ; LHL 24.1]

"Naturen motsetter seg endringer"

Mer presist: Fortegnet på indusert spenning ΔV er slik at (en eventuell) indusert strøm I får retning slik at tilhørende indusert magnetfelt $\vec{B}_I$ og fluks $\Phi_I = \vec{B}_I \cdot \vec{A}$ motvirker den påtvungne endringen representert ved $\Delta\Phi$.

Eks:



Påtvungen endring: Økt omsluttet fluks <u>inn</u> i planet (pga større areal)

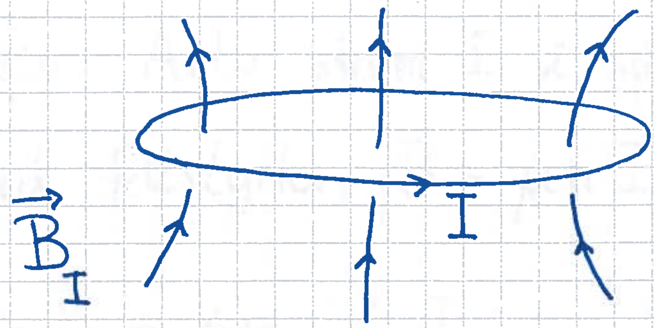
Naturens svar: Indusert strøm

I mot klokka, som gir indusert omsluttet fluks

$\Phi_I = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$ <u>ut</u> av planet, som <u>motvirker</u> endringen.

Induktans [YF 30.2 ; LHL 25.1]

Selvinduktans :



Fra Biot-Savarts lov følger det at $\vec{B}_I$ er proporsjonal med I, og dermed at omsluttet fluks

$$\phi = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$$

også er prop. med I :

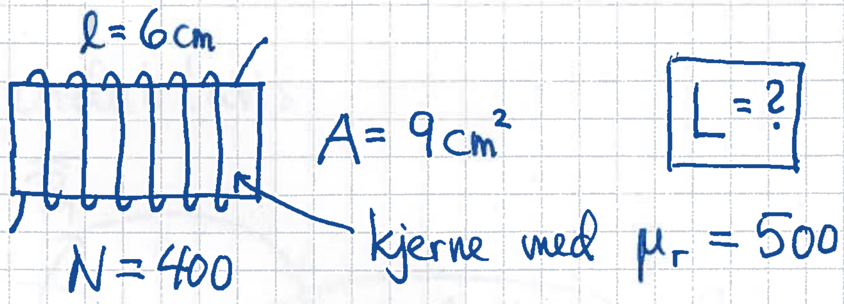
$$\boxed{\phi = L \cdot I}$$

L = sløyfas (selv-) <u>induktans</u>

Enhet: $[L] = [\phi / I] = [B \cdot A / I] = T \cdot m^2 / A$

$$= H \quad (\text{henry})$$

Eks:



$\boxed{L = ?}$

Løsn: Anta strøm I i spoletråden, og ideell spole med feltstyrke $B = \mu n I$ overalt inni spolekjernen.

$$\Rightarrow B = \mu_r \mu_0 \frac{N}{\ell} I$$

$$\Rightarrow \Phi = NBA = N^2 \mu_r \mu_0 A I / \ell$$

$$\Rightarrow L = \Phi / I = \underline{N^2 \mu_r \mu_0 A / \ell}$$

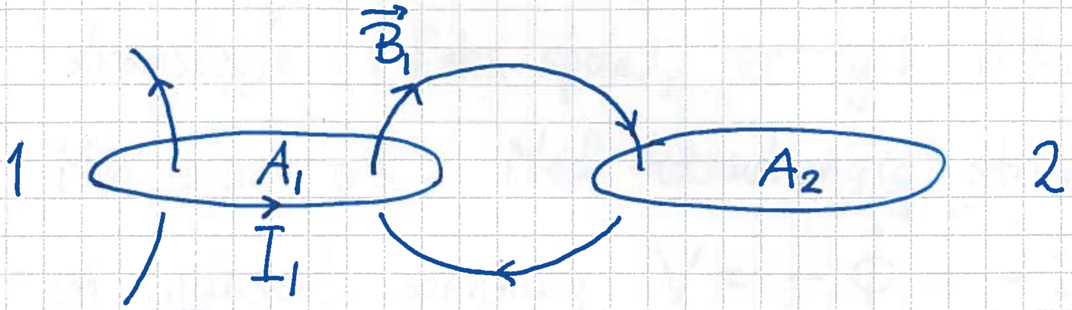
$$= 400^2 \cdot 500 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 9 \cdot 10^{-4} / 6 \cdot 10^{-2}$$

$$\approx \underline{\underline{1.5\ H}}$$

- Merk at L øker med N^2
- Med $[L] = H$ og $[A/\ell] = m$ ser vi at $[\mu] = [\mu_0] = H/m$.

(Jf $[\varepsilon] = [\varepsilon_0] = F/m$)

Gjensidig induktans



Strøm I_1 i sløyfe 1 $\Rightarrow$ Fluks $\Phi_2 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2$ omsluttet av sløyfe 2. Siden B_1 er prop. med I_1, blir Φ_2 prop. med I_1 : $\Phi_2 = M_{21} \cdot I_1$

Og omvendt: I_2 i sløyfe 2 $\Rightarrow \Phi_1 = \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1$ omsluttet av sløyfe 1, prop. med I_2 : $\Phi_1 = M_{12} \cdot I_2$

Kan vises at $M_{21} = M_{12} = M$, dvs

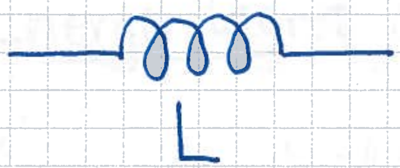
$$\Phi_2 = M I_1 \quad ; \quad \Phi_1 = M I_2$$

M = sløyfenes gjensidige induktans

$[M] = H$ (henry)

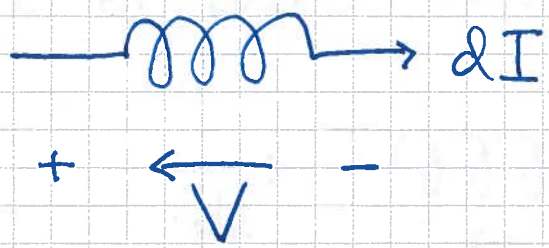
Induksjon : Dersom $dI/dt \neq 0$ i ei strømsløyfe (f.eks. spole), er også $d\phi/dt \neq 0$. Med andre ord: Med tidsavhengig strøm I fås en indusert spenning $V = -\dot{\phi} = -L\dot{I}$, med retning i tråd med Lenz' lov, dvs slik at påtvungen endring i strømmen I motvirkes.

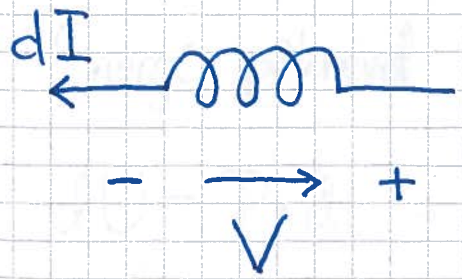
Spole som kretselement:



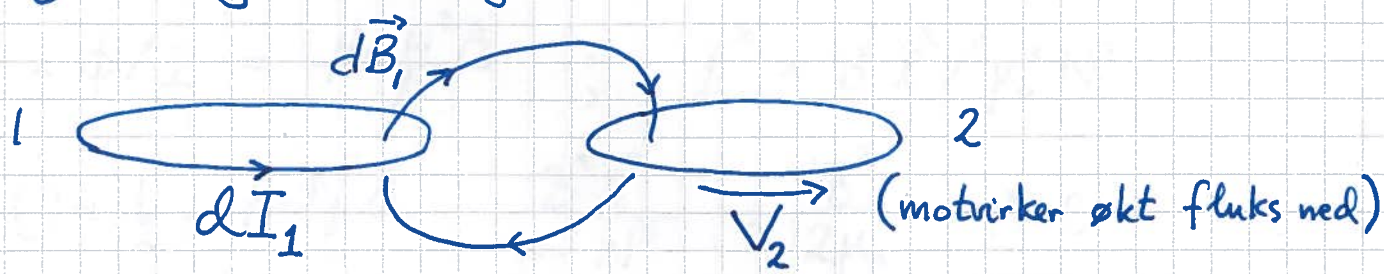
$$V = -L\frac{dI}{dt}$$

Retning på V :





Gjensidig induksjon :

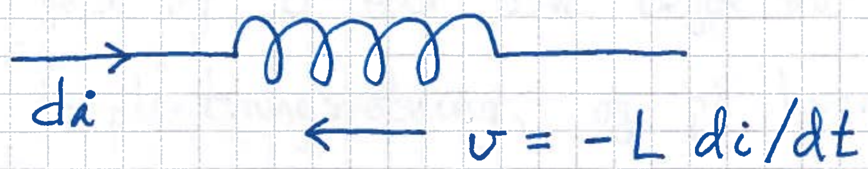


$$\dot{I}_1 \neq 0 \Rightarrow V_2 = -\dot{\Phi}_2 = -M\dot{I}_1$$

$$\dot{I}_2 \neq 0 \Rightarrow V_1 = -\dot{\Phi}_1 = -M\dot{I}_2$$

Energi lagret i $\vec{B}$-felt [YF 30.3 ; LHL 25.3]

Regner ut arbeidet som må gjøres mot den induserte spenningen for å øke strømmen fra $i=0$ til $i=I$ i en ideell spole (dvs $B=\mu_0 n I$ inni spolen).



Energi påkrevd for å øke strøm fra i til $i+di$:

$$dU = P\cdot dt = -v\cdot i\, dt = L\frac{di}{dt}\cdot i dt = L\cdot i\cdot di$$

Fra $i=0$ til $i=I$:

$$U = \int dU = \int_0^I L\, i\, di = \underline{\tfrac{1}{2}LI^2}$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \; ; \quad \phi = NAB = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} I \; ;$$

$$L = \phi / I = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \; ; \quad I^2 = B^2 \ell^2 / \mu_0^2 N^2$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell} \cdot \frac{B^2 \ell^2}{\mu_0^2 N^2} = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot \underbrace{A \cdot \ell}$$

= volum i spolen, der $B \neq 0$

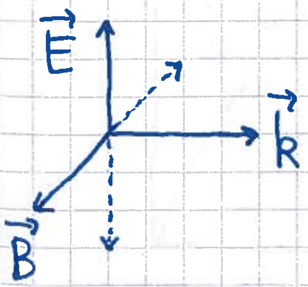
$\Rightarrow$ Energi pr volumenhet i magnetfelt:

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$\boxed{u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2}$$

Eks: Elektromagnetiske bølger (lys etc) er forplantning av $\vec{E}$-felt og $\vec{B}$-felt som begge står normalt på bølgens forplantningsretning, og på hverandre:



$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad c = \lambda f, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow c = \frac{\omega}{k}$$

$$E = c \cdot B \Rightarrow u_B = \frac{E^2/c^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = u_E$$

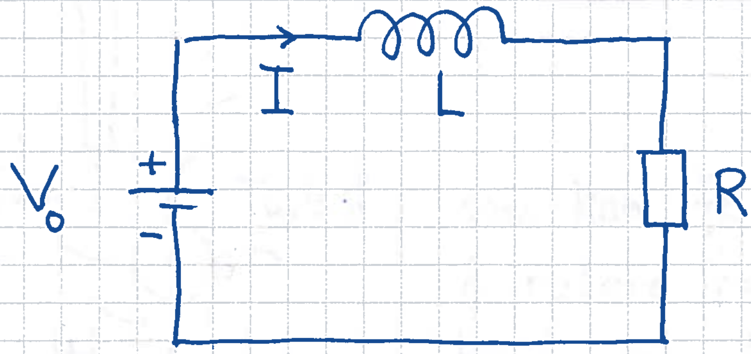
(siden $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$)

$$\Rightarrow u = 2u_E = \varepsilon_0 E^2$$

Kretser og anvendelser ; DC og AC

[YF 30.4+5+6 ; LHL 25.2, 27.1+2+3+5]

(1) RL-krets ; DC



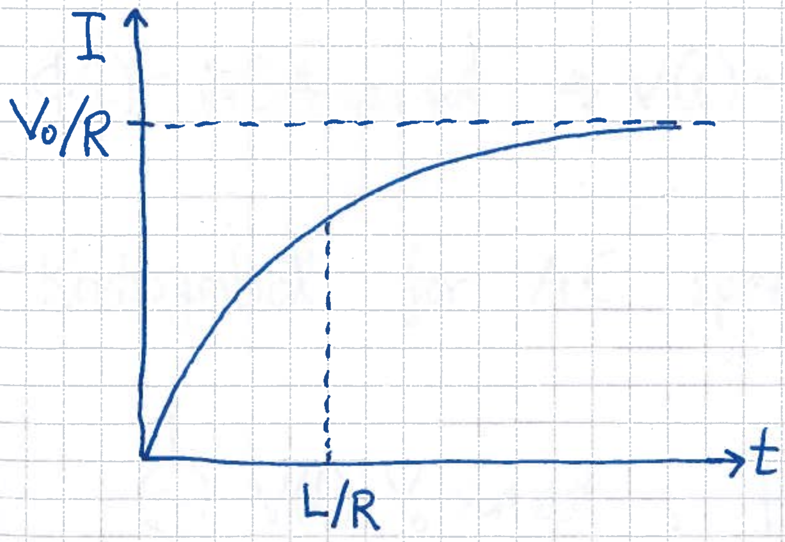
V_0 kobles til ved $t = 0$

$$K2 : \quad V_0 - L\frac{dI}{dt} - RI = 0$$

Samme ligning for I som for Q i RC-kretsen

$\Rightarrow$ Tilsvarende løsning : $I(t) = \frac{V_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

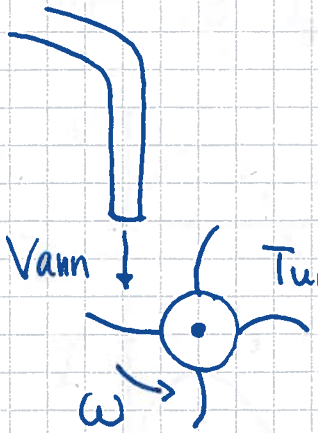
med tidskonstant $\tau = L/R$



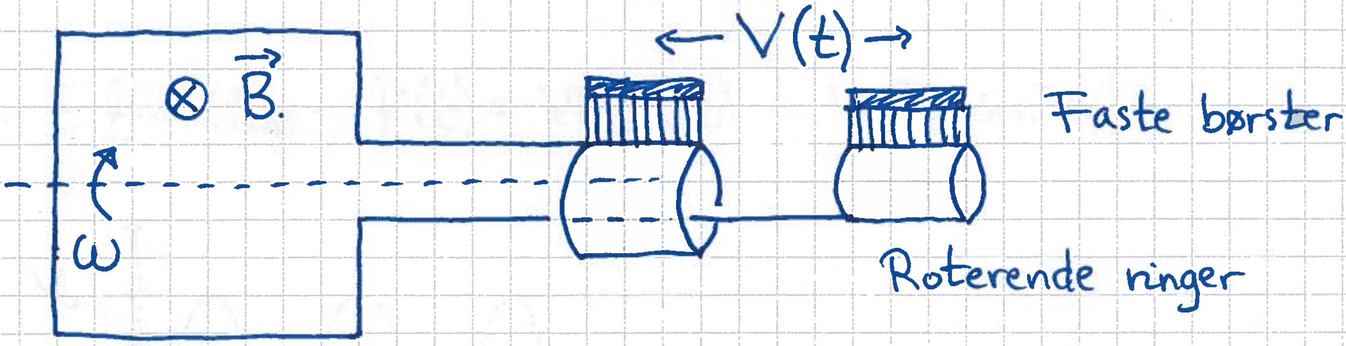
Induktansen L gir indusert motspenning i kretsen når vi med V_0 prøver å øke strømmen. Dermed blir I ikke umiddelbart lik V_0/R; det tar litt tid; tidsskala gitt av $\tau = L/R$

AC spenningskilde (AC = alternating current = vekselstrøm)

AC-generator; prinsipp:



Turbin, som kan få magneter eller spoler til å rotere relativt hverandre, og gi harmonisk tidsavhengig omsluttet fluks.



N viklinger, omsluttet areal A

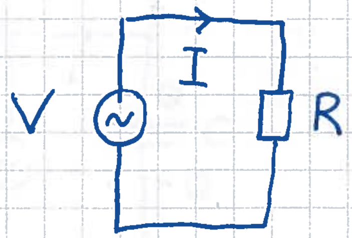
$$\Phi(t) = NBA \cos \omega t \;\Rightarrow\; V(t) = V_0 \sin \omega t \;;\quad V_0 = NBA\omega$$

Kretssymbol for AC spenningskilde:

$V(t) = V_0 \sin \omega t$; frekvens $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$

Europa: 50 Hz (USA: 60 Hz)

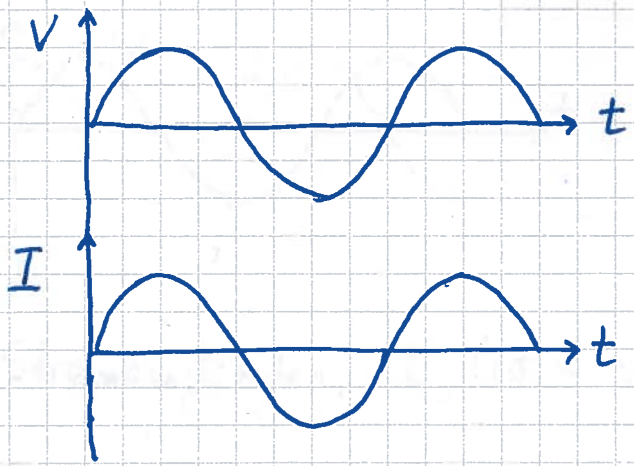
2



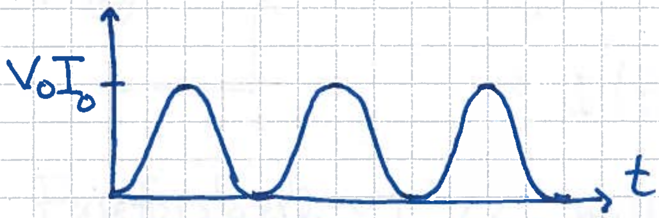
$$\text{K2: } V_0 \sin \omega t - RI = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 \sin \omega t \; ; \quad I_0 = \frac{V_0}{R}$$

$V(t)$ og $I(t)$ "svinger" fram og tilbake <u>i fase</u>:



Effekttap: $P(t) = V(t) I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$



Midlere effekttap: $\langle P \rangle = V_0 I_0 \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0$

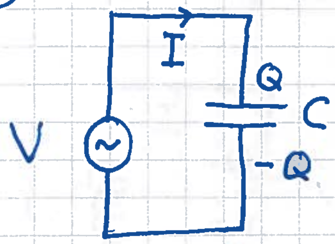
Effektivverdier: $\langle P \rangle = V_{rms} \cdot I_{rms}$ med

$V_{rms} = V_0 / \sqrt{2}$, $I_{rms} = I_0 / \sqrt{2}$

I veggkontakten: $V_{rms} \approx 230 \text{ V}$; $V_0 \approx 325 \text{ V}$

(Root Mean Square: $V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V(t)^2 \, dt} = V_0 / \sqrt{2}$)

3

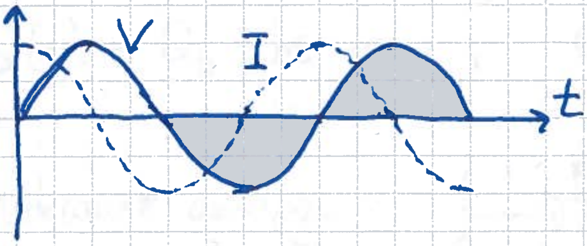


$$K2: \quad V_0 \sin \omega t - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow Q(t) = V_0 C \sin \omega t$$

$$\Rightarrow I(t) = V_0 \omega C \cos \omega t$$

Dvs faseforskjell $\pi/2$ mellom $V(t)$ og $I(t)$:

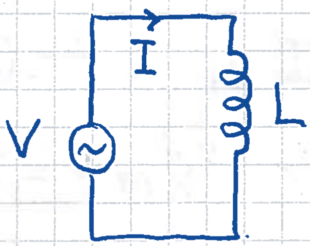


$$\langle P \rangle = V_0 I_0 \langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle$$
$$= \tfrac{1}{2} V_0 I_0 \langle \sin 2\omega t \rangle = \underline{\underline{0}}$$

<u>Tapsfritt</u> kretselement.

Strømamplituden, $I_0(\omega) = V_0 \omega C$, <u>øker</u> med frekvensen.

4

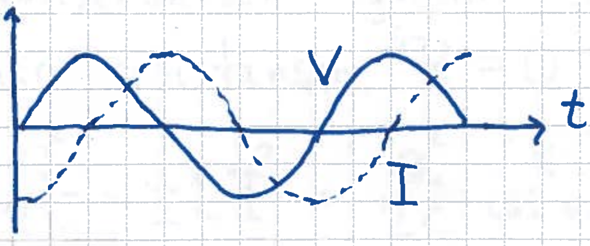


$$K2: \quad V_0 \sin \omega t - L \dot{I} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{I} = \frac{V_0}{L} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t$$

Faseforskjell $(-)\ \pi/2$ mellom $V(t)$ og $I(t)$:

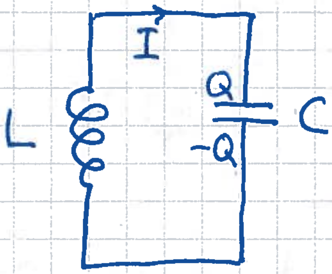


$$\langle P \rangle \sim \langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle = \underline{\underline{0}}$$

<u>Tapsfritt</u>.

$I_0(\omega) = V_0 / \omega L$ <u>avtar</u> med frekvensen.

⑤ LC-krets



Anta $Q(0) = Q_0$

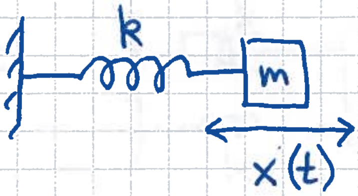
K2: $-L\dot{I} - Q/C = 0$; $I = \dot{Q}$

$\Rightarrow \ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$

$\Rightarrow$ Harmonisk oscillator !

$$Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Mekanisk analogi:



$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$

$\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Analoge størrelser:

$Q \leftrightarrow x$; $I \leftrightarrow \dot{x}$; $L \leftrightarrow m$; $C \leftrightarrow 1/k$

$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} L I^2$ = energi i $\vec{B}$-feltet i spolen

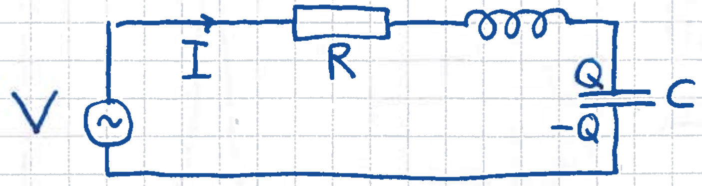
$U = \frac{1}{2} k x^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2$ = —"— $\vec{E}$-feltet i kondensatoren

Konservativt system, ingen dissipasjon av energi når resistansen $R = 0$:

$$\frac{Q^2}{2C} + \frac{1}{2} L I^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} L Q_0^2 \underbrace{\omega_0^2}_{=1/LC} \sin^2 \omega_0 t$$

$$= \frac{Q_0^2}{2C} = \text{konstant}$$

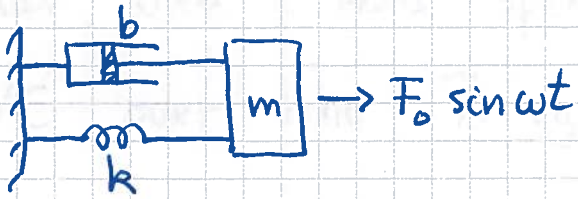
6 RLC resonanskrets



K2: $V_0 \sin\omega t - RI - L\dot{I} - \frac{Q}{C} = 0$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \sin\omega t$$

Mekanisk analogi:



N2: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$

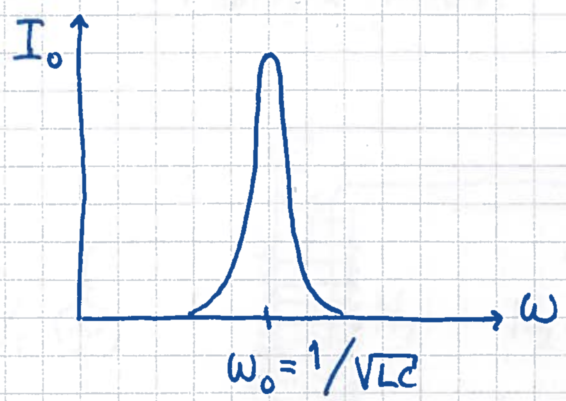
dvs $b \leftrightarrow R$ og $F_0 \leftrightarrow V_0$

$\Rightarrow$ Resonans når $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, dvs maksimal strømamplitude I_0 når $\omega \approx \omega_0$. Alt vi kan om det mek. syst. kan "oversettes" til RLC-kretsen:

$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \quad ; \quad 2\gamma = R/L$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0(\omega)\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{med} \quad I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$$



Halvverdibredde:

$\Delta\omega = 2\gamma = R/L$

Kvalitetsfaktor:

$$\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$$

Måler $I_0(\omega)$ og $Q_0(\omega)$ ved å måle spenningene $V_R = RI$ og $V_c = Q/C$ over hhv R og C.

Impedans:

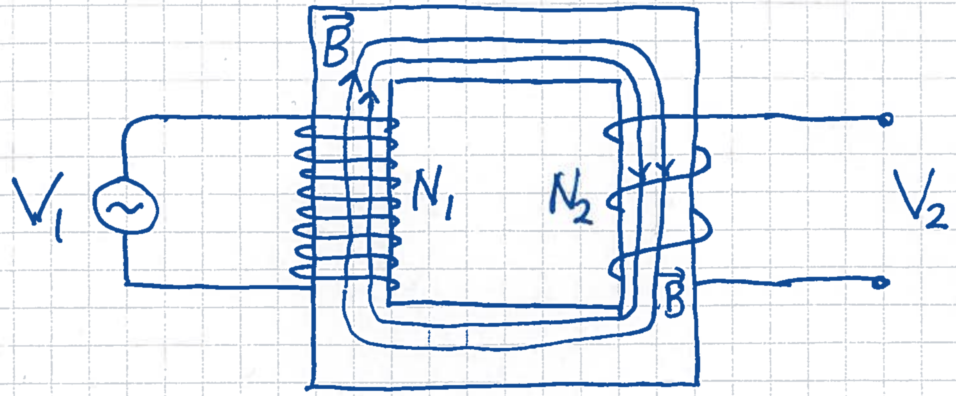
$$Z(\omega) = \frac{V_0}{I_0(\omega)}$$ = kretsens impedans; en slags generalisert motstand for AC-kretser. Vi ser at $[Z] = \Omega$, og at $Z_R = R$ (uavh. av ω), $Z_C = 1/\omega C$, $Z_L = \omega L$.

For RLC resonanskretsen:

$$Z(\omega) = \omega L \cdot \sqrt{(1 - \omega_0^2/\omega^2)^2 + (2\gamma/\omega)^2}$$

som blir spesielt liten når $\omega = \omega_0$

⑦ Transformator



Jernkjernen fører til at feltlinjene for $\vec{B}$ følger jernet

$\Rightarrow$ samme $|\vec{B}|$ i begge spoler

$\Phi_1 = N_1 A B$, $\Phi_2 = N_2 A B$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_1}{V_2} = \dot{\Phi}_1 / \dot{\Phi}_2 = \frac{N_1}{N_2}$$

$\Rightarrow$ Spenningen inn (V_1) kan transformeres til spenning ut (V_2), med redusert eller økt amplitude, med hhv $N_2 < N_1$ og $N_2 > N_1$:

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1$$