Dersom ω og v også endrer seg, har vi baneakselerasjon;

$$\boxed{a_{\parallel} = \dot{v} = r\dot{\omega}}$$

og vinkelakselerasjon

$$\boxed{\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}} \qquad [\alpha] = s^{-2}$$

Total akselerasjon blir

$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel} = -\omega^2 r\,\hat{r} + \dot{\omega} r\,\hat{\varphi}$$

$$\omega = v/r \Rightarrow \vec{a}_{\perp} = -\frac{v^2}{r}\hat{r}$$

Periode = tid pr omløp : $T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$

Frekvens = antall omløp pr tidsenhet : $f = \frac{1}{T}$

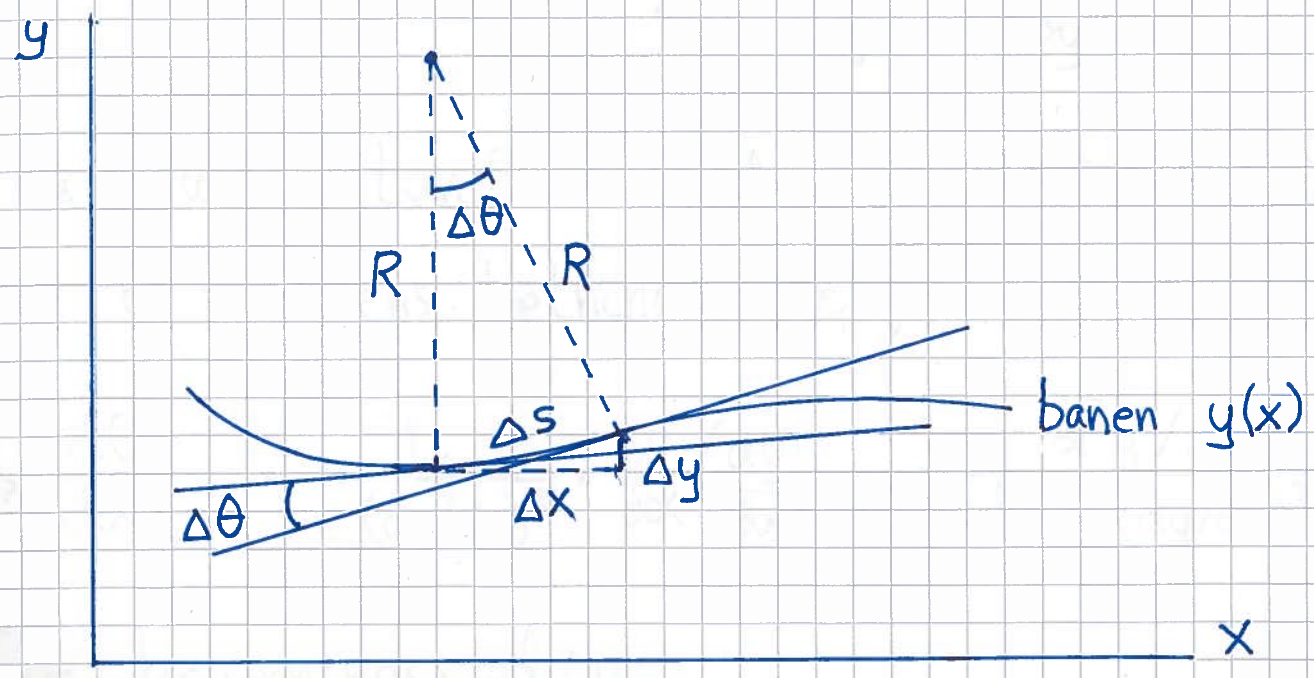
$$\Longrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$[T] = s$; $[f] = s^{-1} = Hz$ (hertz)

$[\omega] = s^{-1}$

Krumlinjet bevegelse

(Jf. lab og humpete veier)



$$a_\perp = v^2/R$$

R = radius i "tenkt" sirkel som best tangerer banen y(x) = krumningsradien

Små Δs og $\Delta\theta$ $\Rightarrow$ $\Delta s \to ds$, $\Delta\theta \to d\theta$

Vinkeldef: $d\theta = ds/R \quad \Rightarrow \quad R = ds/d\theta$

Pythagoras: $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$$\Rightarrow \quad ds = dx \cdot \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$$

Kjerneregel: $$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{d\theta}{dx}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}$$

Fra figur: $\tan\theta = dy/dx \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right)$

(der θ = banens helningsvinkel)

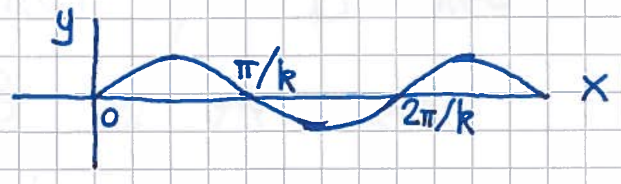
$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1+(dy/dx)^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y/dx^2}{1+(dy/dx)^2}$$

Gir krumningsradius

$$R = \frac{\left[1+(dy/dx)^2\right]^{3/2}}{\left|d^2y/dx^2\right|}$$

(der R velges positiv)

Eks: $y(x) = y_0 \sin kx$



$y'(x) = y_0 k \cos kx, \quad y''(x) = -y_0 k^2 \sin kx$

$$\Rightarrow R = \left[1+y_0^2k^2\cos^2 kx\right]^{3/2} / \left|y_0 k^2 \sin kx\right|$$

dvs $R \to \infty$ for $kx = n\pi$

$\Rightarrow \mathcal{K} = 1/R$ = "krumningen" $= 0$ for $kx = n\pi$

Newtons lover [YF 4,5 ; LL 2,3]

$m, \vec{v}, \vec{a}$ = legemets masse, hastighet, akselerasjon

$\vec{F}$ = netto ytre kraft på legemet

N1: $\boxed{\vec{F} = 0 \iff \vec{v} = \text{konstant}}$

N2: $\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$

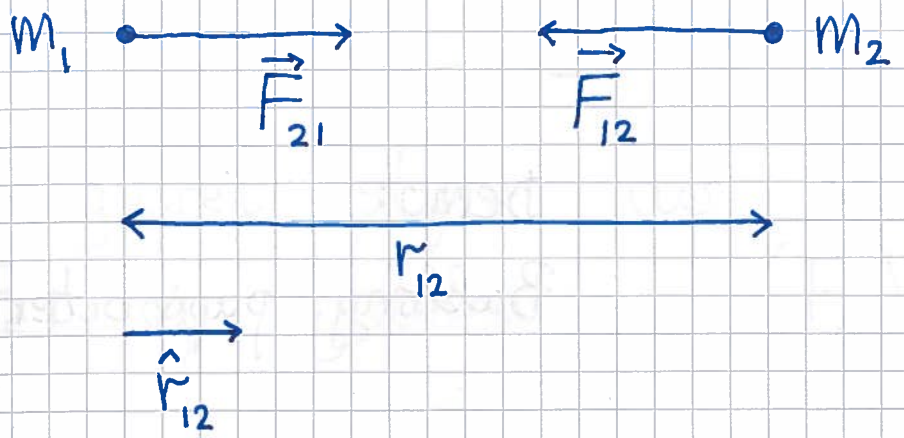
N3: $\boxed{\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}}$

Dvs: Krefter er vekselvirkning mellom legemer. Dersom A virker på B med kraft $\vec{F}_{AB}$, virker B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

$[F] = kg \cdot \frac{m}{s^2} = N$ (newton)

Fundamentale krefter i naturen [YF 5.5; LL 2.1]

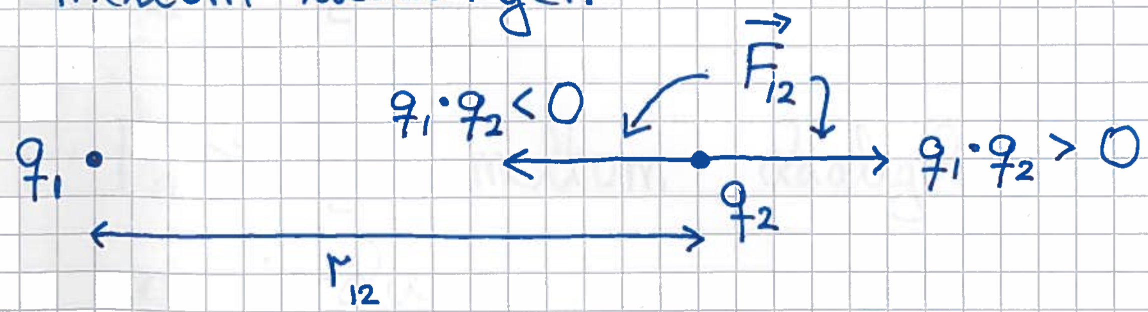
- Gravitasjon. Svak tiltrekning mellom masser.



Newtons gravitasjonslov: $\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$

Gravitasjonskonstanten: $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$

- Elektromagnetisk v.v. Tiltrekning/frastøtning mellom ladninger.



Coulombs lov: $\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$

$[q] = C = A \cdot s$ (coulomb)

Vakuumpermittiviteten: $\varepsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$

- Kjernekrefter, svake og sterke. Svært kort rekkevidde. Gir hhv radioaktivitet og stabile atomkjerner. (15)

Dagliglivet styres av coulombkrefter (F_E) og gravitasjon (F_G).

Protonet: $m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, $q = e \approx 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

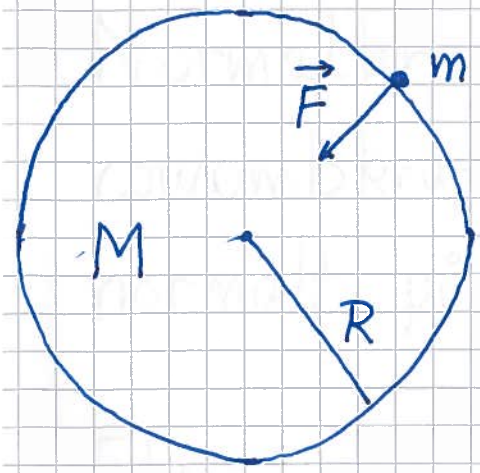
Elektronet: $m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg, $q = -e$

$\Rightarrow$ $F_E \gg F_G$ mellom elementærpartikler, atomer, molekyler og "dagligdagse" legemer

$F_G \gg F_E$ mellom himmellegemer

$F_G \gg F_E$ mellom dagligdags legeme og jorda

Tyngde [YF 4.4 ; LL 2.5]



Tyngden til m = gravitasjonskraften på m fra M :

$$F = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

Jorda : $M \approx 6 \cdot 10^{24}$ kg , $R \approx 6370$ km

$\Rightarrow g = GM/R^2 \approx 9.81 \frac{m}{s^2}$ = tyngdens akselerasjon, når m er nær jordas overflate

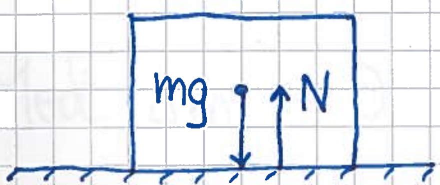
<u>Fritt fall</u> hvis tyngdekraften mg er eneste kraft på m :

N2 : $mg = ma \quad \Rightarrow \quad \underline{a = g}$

Kontaktkrefter [YF 4.1 ; LL 3]

Normalkraft: N = netto frastøtende coulombkraft mellom to legemer i kontakt, normalt på kontaktflaten

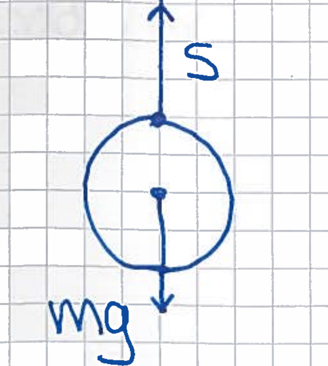
Eks:



Hvis kloss i ro:

$N = mg$ (pga N1)

Snorkraft: S = netto tiltrekkende coulombkraft mellom snora og legemet som henger i snora

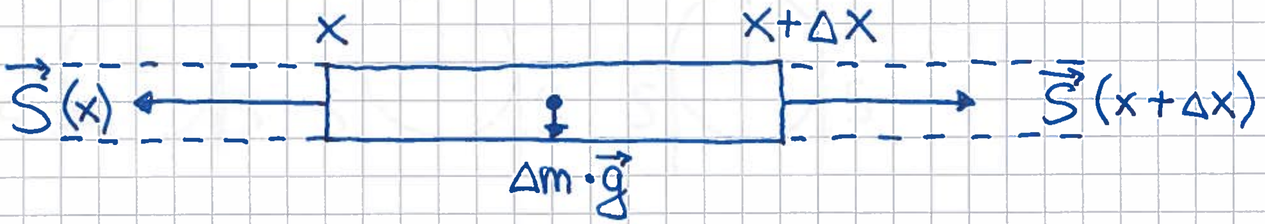


Hvis kule i ro:

$S = mg$ (pga N1)

[Hva er "N3-motkreftene" til mg, N og S ?]

Lett og stram snor blir rett, med konstant snordrag S :

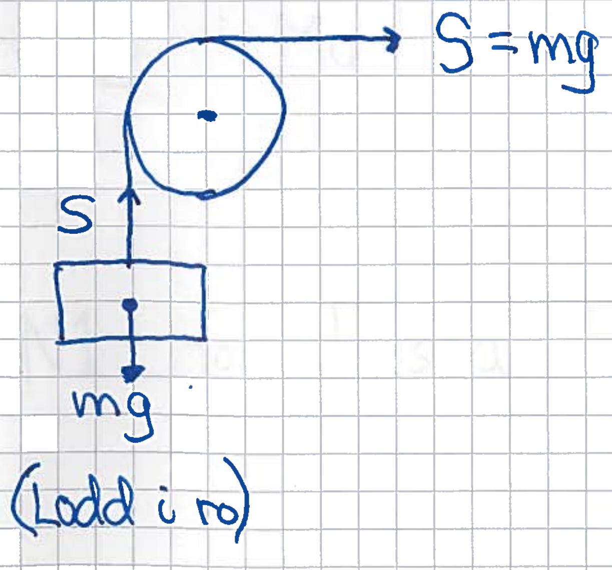


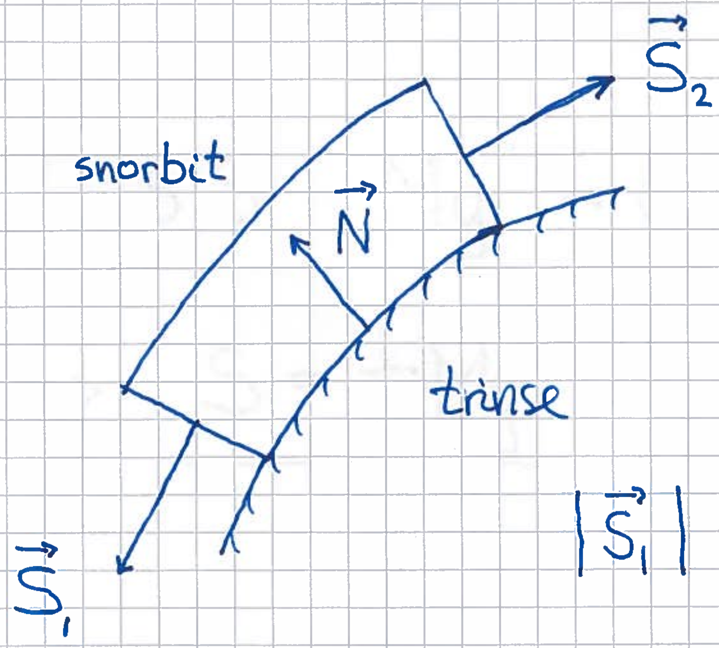
$$N2: \quad \vec{S}(x) + \vec{S}(x+\Delta x) + \Delta m \cdot \vec{g} = \Delta m \cdot \vec{a}$$

Med $\Delta m \approx 0$ er $\vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x)$

$\Rightarrow \quad S = |\vec{S}|$ konstant langs snora

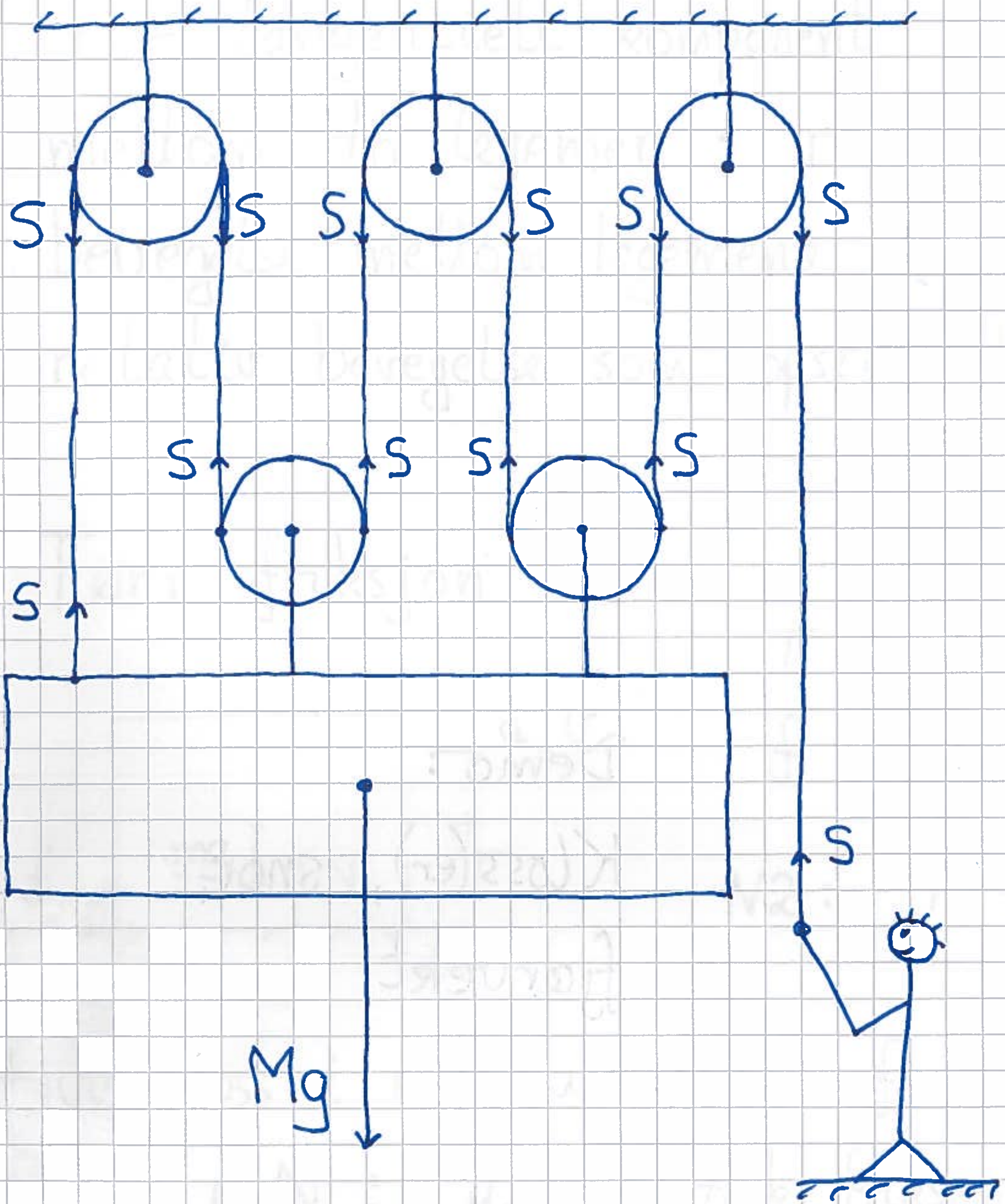
Friksjonsfri <u>trinse</u> endrer retning på $\vec{S}$:





$$|\vec{S}_1| = |\vec{S}_2|$$

Talje:



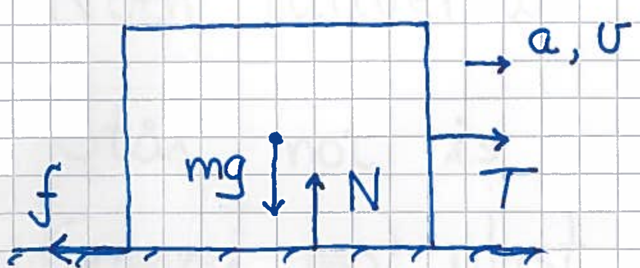
N1 for kassa: $5S - Mg = 0$

$$\Rightarrow \underline{S = \frac{1}{5} Mg}$$

Friksjonskrefter : [YF 5.3 ; LL 3.1]

f = tangentiell komponent av kontaktkraft mellom to legemer ; retning mot relativ bevegelse mellom legemene (evt: mot relativ bevegelse som oppstår uten friksjon)

Tørr friksjon



T = trekk-kraft

f = friksjonskraft

N2 : $T - f = ma$

Hvis kloss i ro $(a = 0)$: $f = T$;

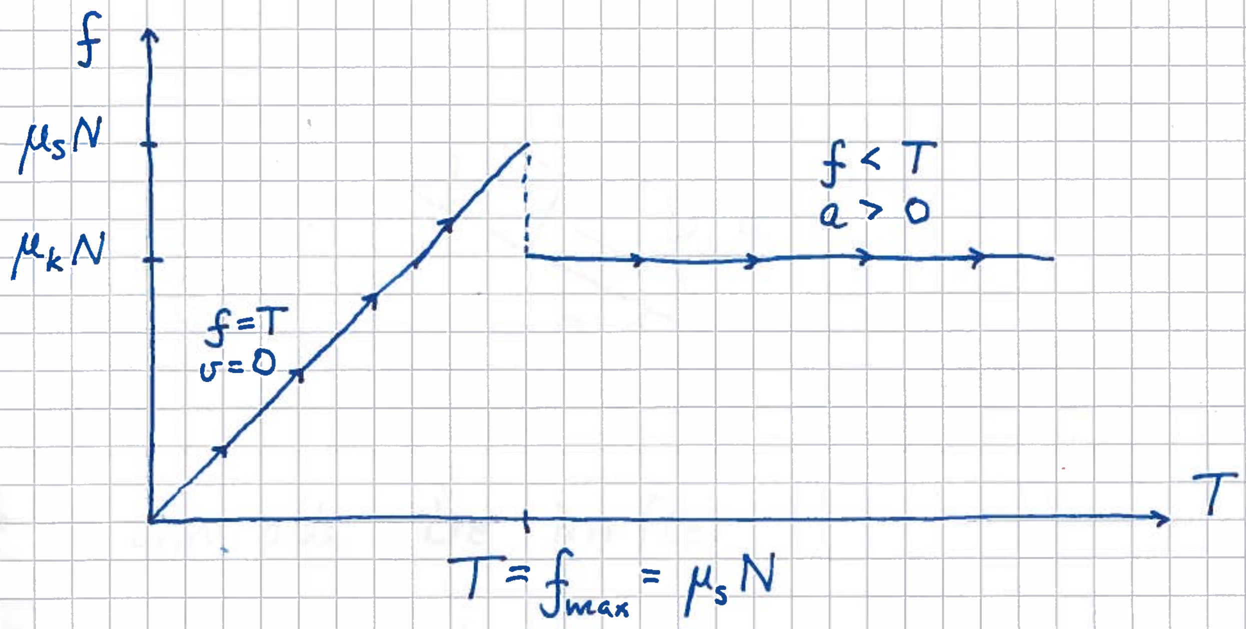
$f_{max} = \mu_s N$; μ_s = statisk friksjonskoeffisient

Klossen glir hvis $T > f_{max}$; da er

$f = \mu_k N$; μ_k = kinetisk friksjonskoeffisient

Som regel er $\mu_k \lesssim \mu_s$: ujevnheter i overflatene gir best grep når $v = 0$

Grafisk, $f(T)$:



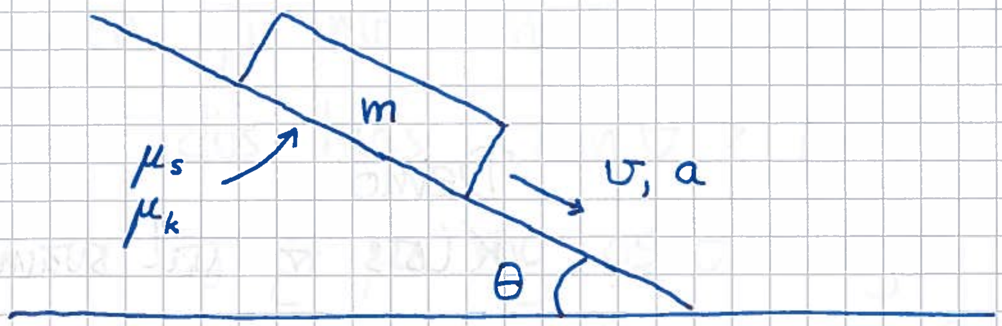
Noen tallverdier :

Stål mot is $\quad \mu_s \approx 0.03$

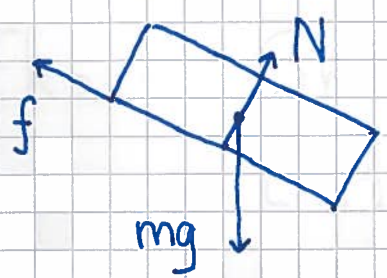
Gummi mot plast $\quad \mu_s \sim 1$

Våt svamp mot bordplate $\quad \mu_s > 1$

Eks (inkl problemløsningsstrategi):



- Finn alle ytre krefter



"fritt-legeme-diagram"

- Velg koordinatsystem. Dekomponer.

$\perp$

$\parallel$

$$N = N_\perp \,, \quad N_\parallel = 0, \quad f = f_\parallel \,, \quad f_\perp = 0$$

$$G_\perp = mg\cos\theta \,, \quad G_\parallel = mg\sin\theta$$

- Bruk N1 $\left(\sum_i \vec{F}_i = 0\right)$ eller N2 $\left(\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m\right)$

N1, $\perp$: $\quad N = mg\cos\theta$

N2, $\parallel$: $\quad mg\sin\theta - f = ma$

Hvis kloss i ro: $f = mg \sin\theta$ $\quad (a=0)$

Klossen glir hvis $mg\sin\theta > f_{max} = \mu_s mg\cos\theta$

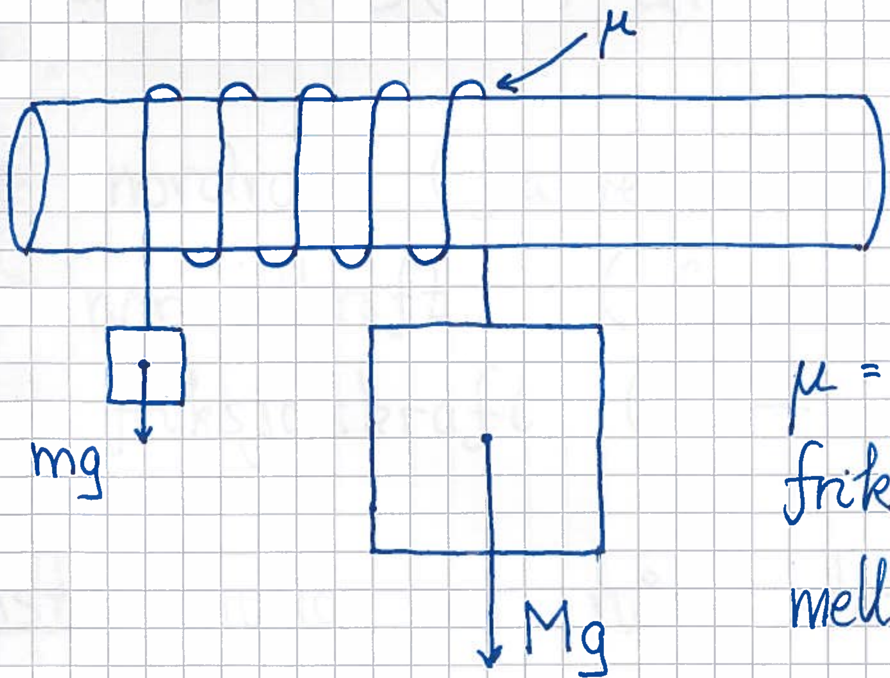
dvs hvis $\tan\theta > \mu_s$

Da er $f = \mu_k mg\cos\theta$ og

$$a = g(\sin\theta - \mu_k\cos\theta)$$

Eks: Snorfriksjon

["Med livet som innsats", youtube/nrk]

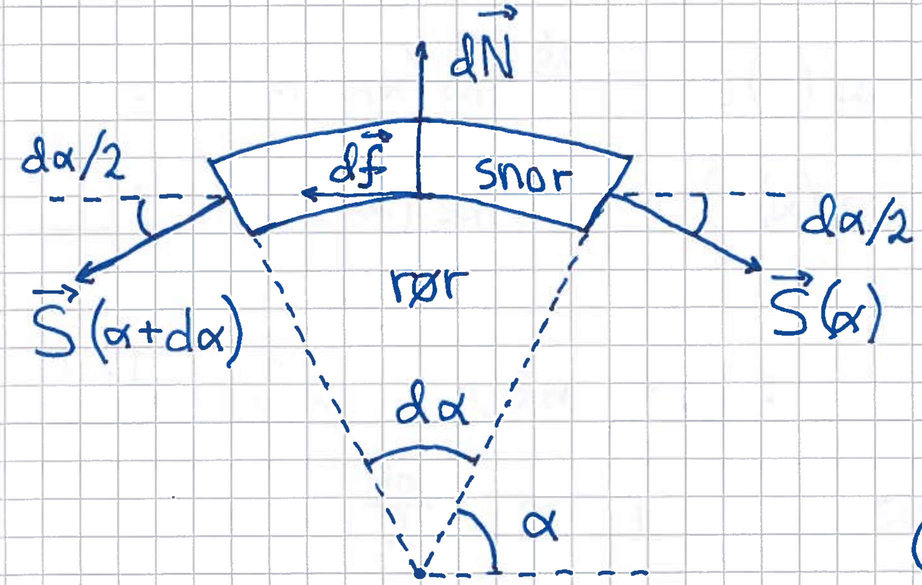


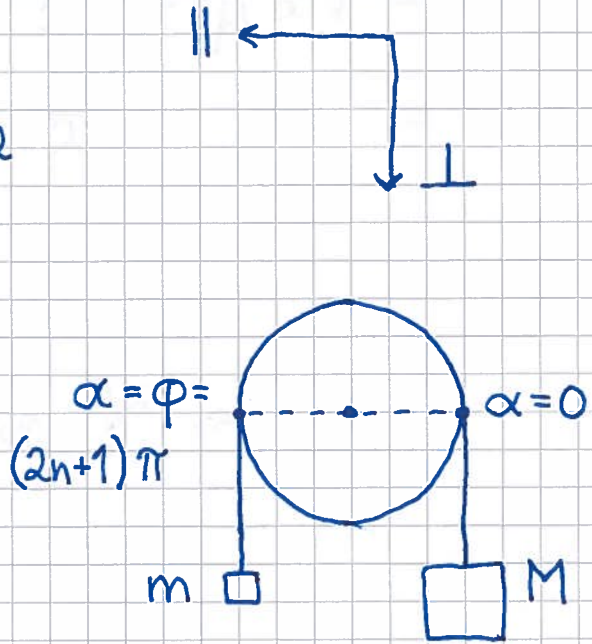
μ = statisk friksjons koeff. mellom snor og rør

Bestem minste m som holder M oppe med kontaktvinkel φ mellom snor og rør.

I figuren er $\varphi = 9\pi$.

Løsn: N1 for liten snorbit





$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$$

$\vec{S}$ = snordrag (fra resten av snora)
$d\vec{N}$ = normalkraft (fra røret)
$d\vec{f}$ = friksjonskraft (— " —)

<u>Minste</u> mulige m når statisk friksjon er <u>størst</u> mulig, dvs

$$df = df_{max} = \mu \cdot dN$$

Dekomponerer :

$$\parallel : \quad S(\alpha+d\alpha)\cos\frac{d\alpha}{2} - S(\alpha)\cos\frac{d\alpha}{2} + \mu\, dN = 0$$

$$\perp : \quad S(\alpha+d\alpha)\sin\frac{d\alpha}{2} + S(\alpha)\sin\frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

Liten $d\alpha$ $\quad (d\alpha \to 0)$:

$$\cos\frac{d\alpha}{2} \approx 1 \,, \qquad \sin\frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

$$S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) = dS$$

$$S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha) = 2S$$

Dermed :

$$dS = -\mu\, dN \,, \qquad S\, d\alpha = dN$$

$$\Rightarrow \quad dS/S = -\mu\, d\alpha$$

Integrerer fra $\alpha = 0$ til $\alpha = \varphi$
(der $\varphi = 9\pi$ ved 4.5 runder med snora) :

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\mu \int_0^{\varphi} d\alpha \quad \Rightarrow \ln\frac{S(\varphi)}{S(0)} = -\mu\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \underline{S(\varphi) = S(0)\, e^{-\mu\varphi}}$$

26

Dvs, siden $S(0) = Mg$ og $S(\varphi) = mg$:

$$m = M \cdot \exp(-\mu\varphi)$$

I eksp. er $\mu \approx 0.17$, $M = 1\,kg$, $\varphi = 9\pi$

$$\Rightarrow m = 1000g \cdot \exp(-0.17 \cdot 9\pi) \approx 8\,g$$

Omvendt: Nødvendig kraft for å heise M opp er $S(\varphi) = S(0) \cdot \exp(+\mu\varphi)$

$$\Rightarrow m = 1\,kg \cdot \exp(+0.17 \cdot 9\pi) \approx 122\,kg$$