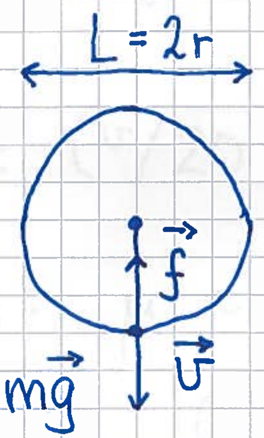
Friksjon i fluider: [YF 5.3; LL 8]

Anta symmetrisk legeme med lineær utstrekning L på tvers av $\vec{v}$; omgivende fluid (gass, væske) med massetetthet ρ og dynamisk viskositet μ.

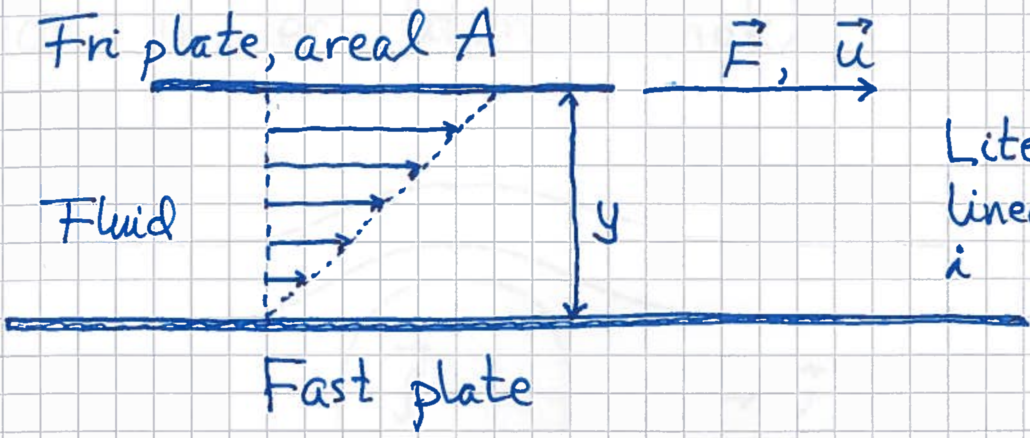
Eks: Ball som faller i luft



Luftmotstand $\vec{f}$

$A = \pi r^2$

Definisjon og måling av μ:



Liten fart u gir lineær fartsprofil i fluidet

Exp. gir $$F = \mu \cdot \frac{A \cdot u}{y}$$

der μ = fluidets dynamiske viskositet; $[\mu] = \frac{kg}{m \cdot s}$

Eks: (υ/20°C)

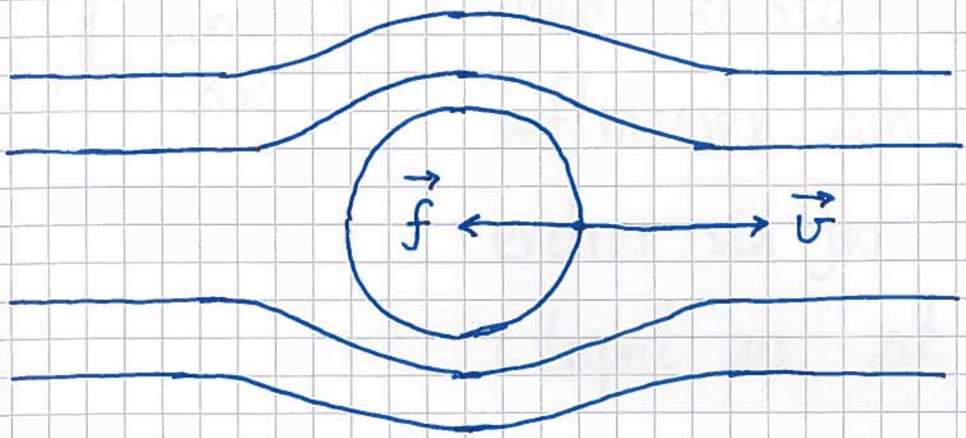
Luft: $\mu \approx 2 \cdot 10^{-5}$

Vann: 10^{-3}

Glyserol: 1

Sirup: 10^{2}

Laminær strømning (pen, lagdelt)
når v er liten (nok):



$$\vec{f} = -k\vec{v}$$

Kule med radius r : $k = 6\pi\mu r$

(Stokes' lov)

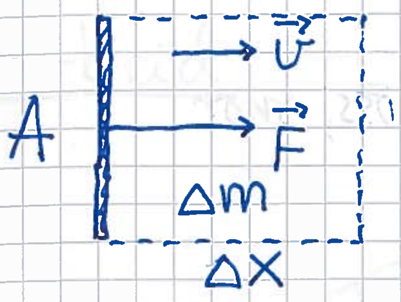
Turbulent strømning (uordnet, virvler)
når v er stor (nok):

$$\vec{f} = -\left(\tfrac{1}{2}\rho A C_d\right) v^2 \hat{v}$$

C_d = drag-koeffisienten

(Kule: $C_d \approx 0.5$)

Eks : C_d for plate



Må dytte med kraft F for å holde konstant fart v, fordi luftmassen $\Delta m = \rho \Delta V = \rho A \Delta x$ endrer sin fart fra 0 til v i løpet av $\Delta t = \Delta x / v$

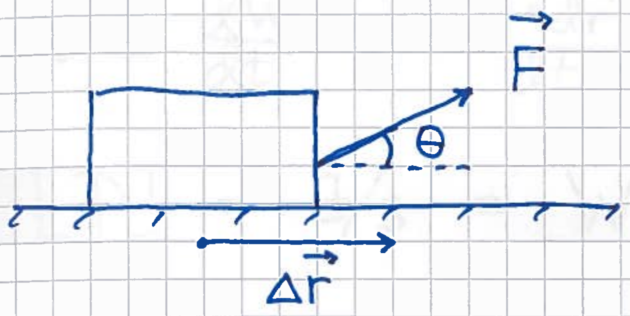
$$\Rightarrow F = \frac{\Delta m \cdot v}{\Delta t} = \frac{\rho A \Delta x \cdot v}{\Delta t} = \rho A v^2 \Rightarrow \underline{C_d = 2}$$

Eks: Bilen Revolve har $A \approx 1.1\ m^2$ og $C_d \approx 1.35$. Luftmotstand ved $v = 60$ km/h er da ca

$$f = \frac{1}{2} \rho A C_d v^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 1.1 \cdot 1.35 \cdot (60/3.6)^2 \text{ N}$$
$$\approx \underline{250 \text{ N}}$$

Arbeid og energi [YF 6, 7 ; LL 4]

Arbeid [YF 6.1–6.3 ; LL 4.1]



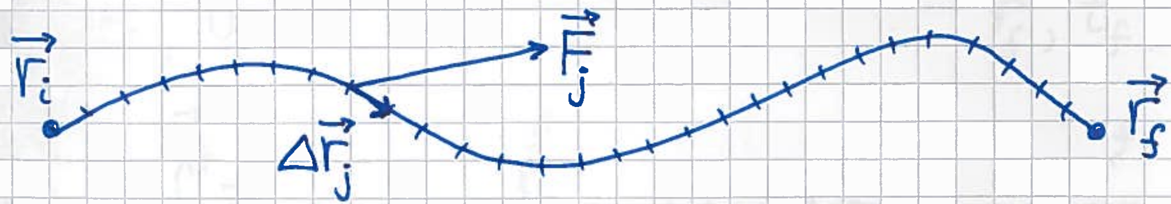
Kraft $\vec{F}$ utfører arbeid på klossen.

arbeid $\stackrel{\text{def}}{=}$ kraft × forflytning

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta$$

$$[W] = \mathrm{N \cdot m} = \mathrm{J} \quad \text{(joule)}$$

Generelt :



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \to 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeidet utført av $\vec{F}$ ved forflytningen fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_j$

Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

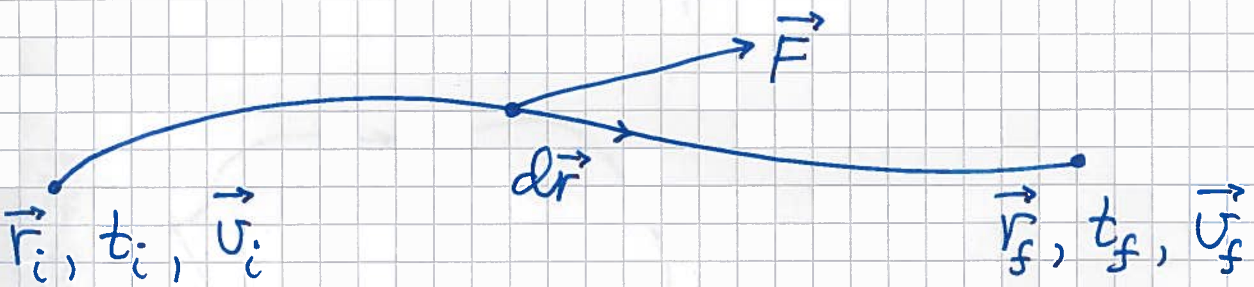
effekt $\stackrel{\text{def}}{=}$ arbeid (evt. energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$[P] = J/s = W \text{ (watt)}$$

$$\underline{1\ kWh} = 1000\ \frac{J}{s}\cdot 3600s = \underline{3.6\ MJ}$$

Kinetisk energi [YF 6.2 ; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_i^f m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = m\int_i^f \vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v}\cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\vec{v}\cdot d\vec{v} + d\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \frac{1}{2}d\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \frac{1}{2}d\left(v^2\right)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}m\int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

K = kinetisk energi $\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2$

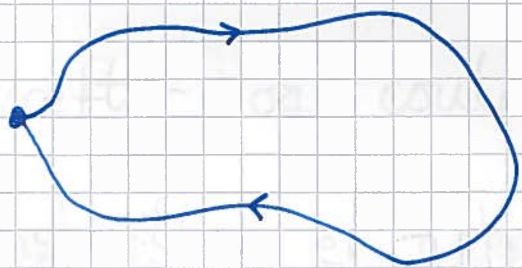
Dermed: $\boxed{W = \Delta K = K_f - K_i}$

Arbeid W utført på et legeme tilsvarer endringen i legemets kin. energi, ΔK.

Konservative krefter [YF 7.3 ; LL 4]

Anta at $\vec{F}$ virker på et legeme som kommer tilbake der det startet, dvs $\vec{r}_f = \vec{r}_i$:

$\vec{r}_f = \vec{r}_i$

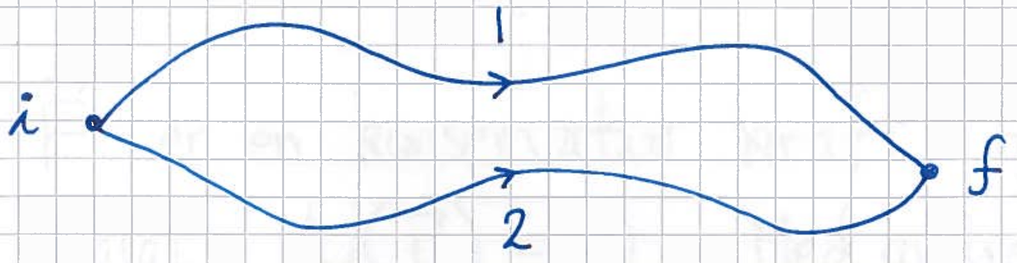


Hvis $K_f = K_i$, er $W = \Delta K = 0$, dvs

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

Da er $\vec{F}$ en <u>konservativ</u> kraft.

Når $\vec{F}$ er konservativ, er arbeidet
W <u>uavhengig av veien</u> :



$$0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2$$

$$= W_1 - W_2$$

$$\Rightarrow W_1 = W_2 \qquad \text{(qed)}$$

Tyngdekrefter og coulombkrefter er konservative.

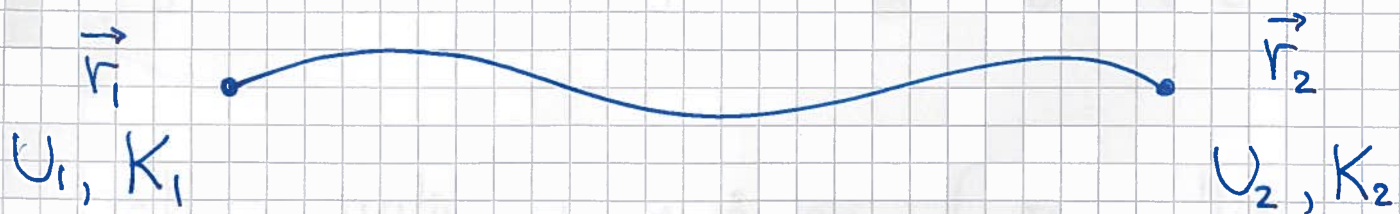
Friksjonskrefter er ikke konservative.

Potensiell energi [YF 7.1–7.4 ; LL 4.3–4.4]

$$U(\vec r) \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{\vec r_0}^{\vec r} \vec F \cdot d\vec r$$

der $\vec F$ er en konservativ kraft, og der vi har valgt $U(\vec r_0) = 0$. Med andre ord, kun forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

Bevarelse av mekanisk energi
[YF 7.1–7.3 ; LL 4.5]



$$\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F \cdot d\vec r$$

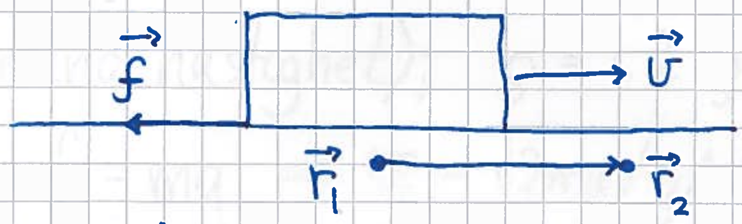
$$U_2 - U_1 = -\int_{\vec r_0}^{\vec r_2} \vec F \cdot d\vec r - \left(-\int_{\vec r_0}^{\vec r_1} \vec F \cdot d\vec r\right) = \int_{\vec r_2}^{\vec r_1} \vec F \cdot d\vec r = -W$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Total mekanisk energi: $E = K + U$

$\Rightarrow$ E er bevart i et konservativt system

Friksjonsarbeid [YF 7.3; LL 4.5]



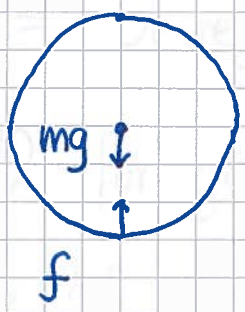
$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ da $\vec{f}$ alltid rettet <u>mot</u> $d\vec{r}$

$\Rightarrow$ Mek. energi tapes; omdannes til varme, lyd etc.

$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \Rightarrow \vec{f}$ er <u>ikke</u> konservativ

Lab: Rulling uten å gli ("ren rulling") gir bevart mek. energi. Statisk friksjonskraft gjør ikke arbeid (ideelt sett).

Eks: Fallende bordtennisball



$m = 2.7\,g$, $r = 20\,mm$

- Max hastighet ?
- Tapt andel mek. energi ?

Løsn: Antar $f = \frac{1}{2} \rho A C_d v_t^2$ når $v = v_{max} = v_t$ (terminalhastighet); $\rho = 1.2\,kg/m^3$, $A = \pi r^2$, $C_d = 0.5$.

N1: $f = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{2mg/\rho A C_d} \approx \underline{8.4\,m/s}$

Anta at ballen slippes fra høyde h over gulvet.

$\Rightarrow E_i = U_i = mgh$; $E_f = \frac{1}{2} m v_t^2$

$$\frac{E_i - E_f}{E_i} = 1 - \frac{m}{\rho A C_d h}$$

$$\approx 64\% \quad \text{hvis} \quad h = 10\,m$$

(Hvis fritt fall 10 m: $v_f = \sqrt{2gh} \approx 14\,m/s$)

Impuls [YF 8; LL 5]

(= bevegelsesmengde = linear momentum)

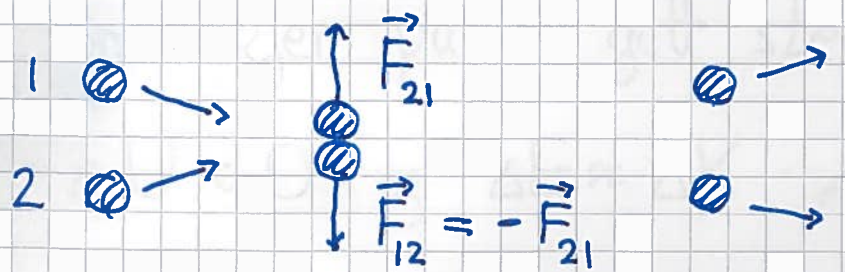
N2 for gitt m: $\vec{F} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(m\vec{v}) = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$

$\vec{p} \overset{\text{def}}{=} m\vec{v}$ = massens impuls ; $[p] = \text{kg m/s}$

Vi ser da:

$$\boxed{\text{Hvis } \vec{F} = \sum \vec{F}_{ytre} = 0, \text{ er impulsen } \vec{p} \text{ bevart}}$$

Indre krefter mellom legemer endrer ikke hele systemets totale impuls:



N3 $\Rightarrow$ $\vec{F}_{21} + F_{12} = 0$

$\overset{N2}{\Longrightarrow}$ $d\vec{p}_1/dt + d\vec{p}_2/dt = 0$

$\Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left\{\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right\} = 0$

$\Rightarrow \vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$

Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5]

Total impuls er bevart i kollisjoner, mens mek. energi kan gå tapt.

Elastisk støt: $\Delta E = 0$

Uelastisk støt: $\Delta E < 0$

Fullstendig uelastisk støt: Max $|\Delta E|$.
Legemene henger sammen med felles hastighet etter kollisjonen.

Har typisk svært kortvarige kollisjoner som skjer på et gitt sted, slik at

$\Delta U \approx 0$ og $\Delta E \approx \Delta K$ i kollisjonen.

Tapt $K \rightarrow$ deformasjon, varme, lyd

Sentralt støt [YF 8.2–8.4 ; LL 5.3]

Kollisjon i 1D:

Før $\quad m \bullet\!\!\longrightarrow v \qquad V \longleftarrow\!\!\bullet M \qquad \longrightarrow +$

Etter $\quad v' \longleftarrow\!\!\bullet m \qquad M \bullet\!\!\longrightarrow V'$

$$\Delta p_{tot} = 0 \implies mv + MV = mv' + MV' \quad (1)$$

(a) Fullst. uel. : $v' = V' = \dfrac{mv + MV}{m + M}$

(b) Delvis uel. : Har kun 1 ligning, 2 ukjente

$\Rightarrow$ trenger en lign./opplysning til.

(c) Elastisk : $\Delta K = 0$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}MV^2 = \tfrac{1}{2}mv'^2 + \tfrac{1}{2}MV'^2 \quad (2)$$

Skriver om (1) og (2):

$$m(v - v') = M(V' - V) \quad (1)$$

$$m(v - v')(v + v') = M(V' - V)(V' + V) \quad (2)$$

(2) dividert med (1):

$$v + v' = V' + V \quad (3)$$

(3)·M − (1) gir

$$v' = \frac{M}{m+M}\left\{2V + v\cdot\frac{m-M}{M}\right\}$$

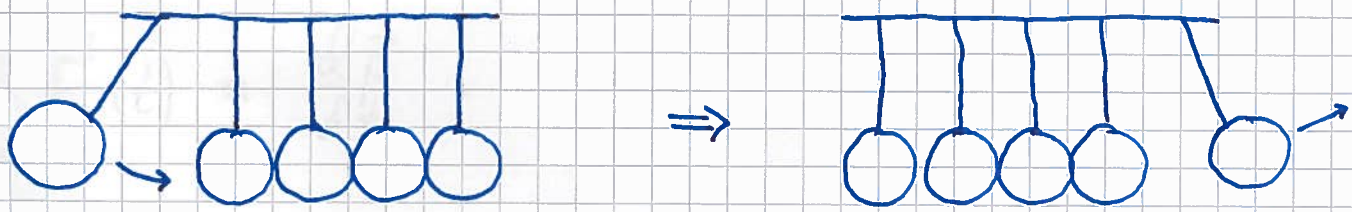
(3)·m + (1) gir

$$V' = \frac{m}{M+m}\left\{2v + V\cdot\frac{M-m}{m}\right\}$$

(opplagt, v/ombytte av små og store bokstaver!)

Eks 1: $m = M \Rightarrow V' = v, \quad v' = V$

Kjent fra leketøy:



Eks 2: Ball mot vegg, elastisk støt

$$v' = \frac{M}{m+M}\left\{0 + v\cdot\frac{m-M}{M}\right\} \overset{m \ll M}{=} -v \quad \text{(OK)}$$

$$K' = \frac{1}{2} m v'^2 = \frac{1}{2} m v^2 = K \quad ; \quad \text{OK}$$

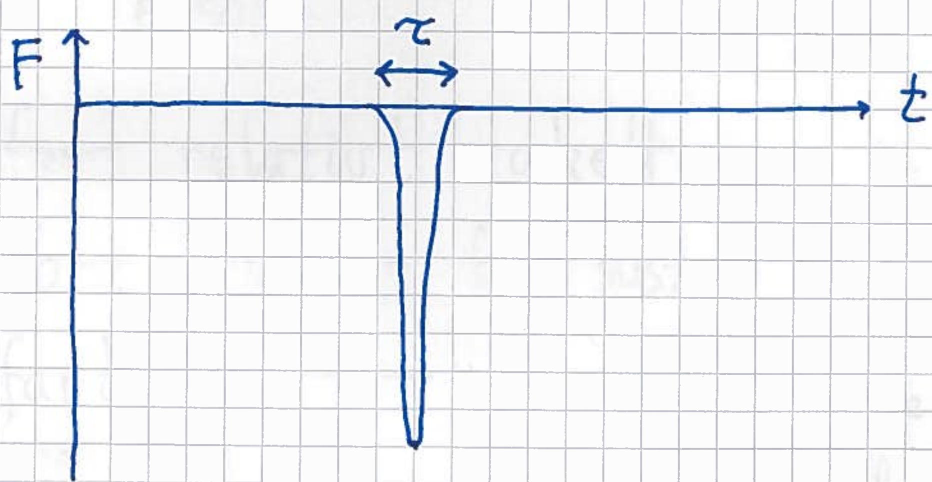
$$p' = m v' = -mv$$

$$P' = MV' = M \frac{m}{M+m} \cdot 2v = 2mv \quad (!)$$

$$\Rightarrow \quad p'_{tot} = mv = p_{tot} \quad ; \quad \text{OK}$$

$p(t)$ for ballen (kvalitativt):

$$\vec{F}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt} :$$



Anta f.eks. $\tau = 2\,\text{ms}$ og $\Delta v = 40\ \text{m/s}$;
da er $\langle a \rangle \approx 40/0.002\ \text{m/s}^2 = 20\ \text{km/s}^2$,
så tyngden mg er neglisjerbar i kollisjonen.

"Kraftstøt" (eng: impulse):

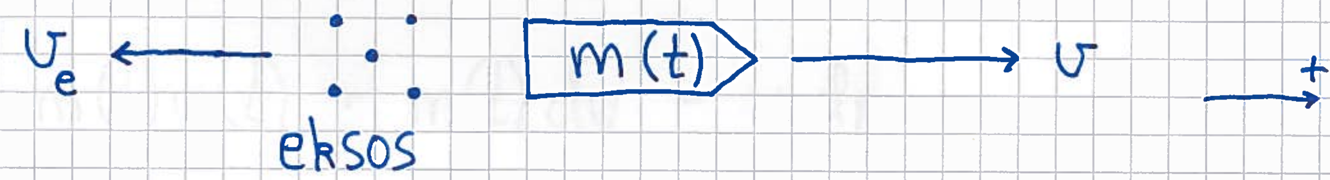
$$\Delta\vec{p} = \int d\vec{p} = \int \vec{F}(t)\,dt$$

Eks: $F(t) = F_0 \exp(-|t|/\tau)$

$$\Rightarrow \Delta p = F_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/\tau}\,dt = 2F_0 \int_0^{\infty} e^{-t/\tau}\,dt$$

$$= 2F_0\tau \Big|_0^{\infty} -e^{-t/\tau} = \underline{2F_0\tau}$$

<u>Rakett</u> [YF 8.6 ; LL 5.4]



Eksosfart relativt raketten : $u < 0$

Rakettfart relativt fast system : v

Eksosfart —— " —— : $v_e = u + v$

Drivstoff-forbruk pr tidsenhet : $dm/dt < 0$

Anta konstant u, og $F_{ytre} = 0$ (inntil videre).