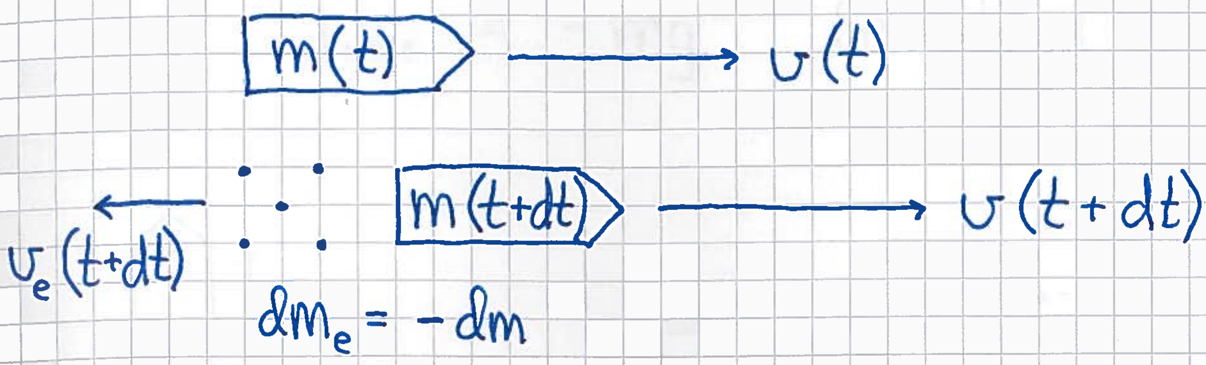
Impulsbevarelse fra t til $t+dt$:



Ved tid t: $p(t) = m(t)\,v(t)$

Ved tid $t+dt$:

$$p(t+dt) = m(t+dt)\,v(t+dt) + dm_e \cdot v_e(t+dt)$$

$$= [m(t)+dm]\cdot[v(t)+dv] - dm\cdot[u+v(t)+dv]$$

$$= m(t)v(t) + m(t)\,dv - u\,dm$$

$$\Rightarrow \quad m\,dv - u\,dm = 0$$

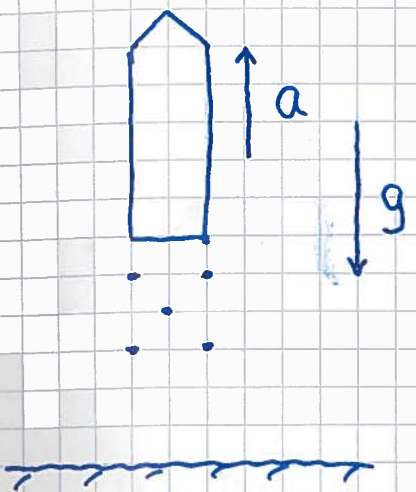
$$\Rightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = u\frac{dm}{dt}$$

dvs: $m a = F_{skyv}$

med skyvkraft ("rekyl") $F_{skyv} = u\dot{m} > 0$

Hvis oppskyting fra bakken, virker

$$F_{ytre} = -mg \quad \text{(en stund)}$$



$$\Rightarrow ma = u\dot{m} - mg$$

Dvs: $F = u\dot{m} - mg$ er total kraft på raketten; må ha $u\dot{m} > mg$ for å ta av

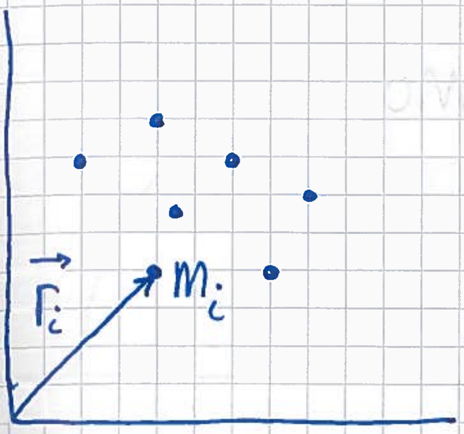
Øving:

$$-mg + u\frac{dm}{dt} = m\frac{dv}{dt} \quad \Big/ \cdot \frac{dt}{m}$$

$$\Rightarrow -g\,dt + u\frac{dm}{m} = dv$$

som kan integreres!

Massesenter [YF 8.5 + oppg. 8.115, 8.116; LL 5.6, 5.8, 6.1]



Massesenter (CM) for N punktmasser $m_1, m_2, \ldots, m_N$ i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

med $M = \sum_i m_i$ = systemets totale masse

For kontinuerlig massefordeling:

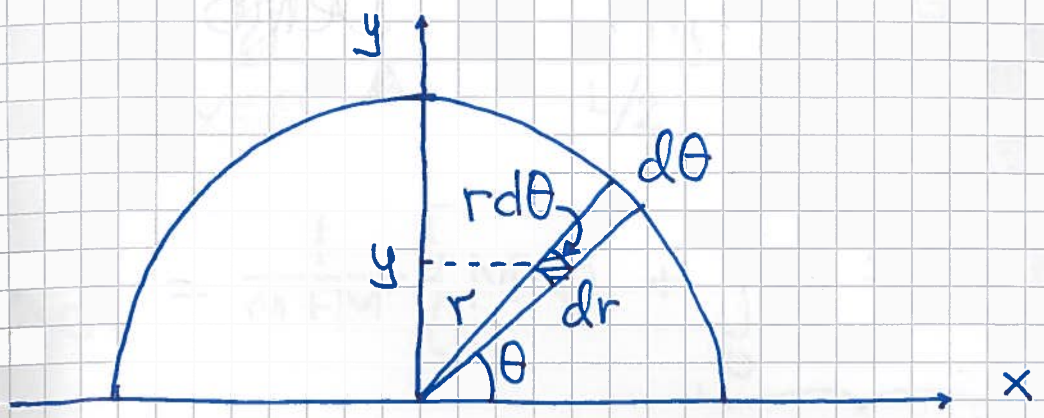
$$\left.\begin{array}{l} m_i \rightarrow dm \\ \sum_i \rightarrow \int \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M = \int dm \\ \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm \end{array}$$

1D, 2D, 3D: λ, σ, ρ = masse pr hhv lengde-, flate-, volumenhet
$d\ell, dA, dV$ = hhv lengde-, flate-, volumelement

$\Rightarrow dm = \lambda\, d\ell,\ \sigma\, dA,\ \rho\, dV$ = masseelement

Hvis uniform massefordeling: $dm/M = dV/V$ osv

Eks 1: $\vec{R}_{CM}$ for halvparten av tynn skive med radius R.



$X_{CM} = 0$ pga symmetri $\Rightarrow \vec{R}_{CM} = Y_{CM}\,\hat{y}$, med

$$Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{A}\int y\,dA, \quad \text{med} \quad A = \frac{\pi R^2}{2},$$

$$dA = dr \cdot r\,d\theta \quad \text{og} \quad y = r\sin\theta$$

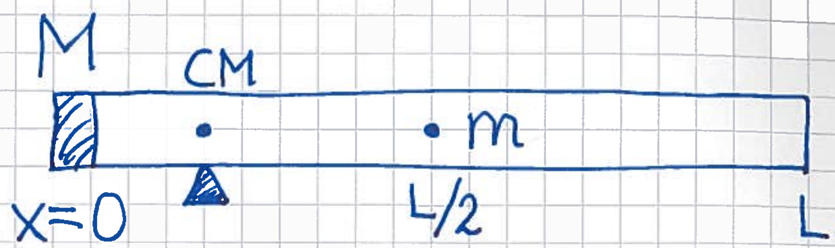
$$\Rightarrow Y_{CM} = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R \int_0^\pi r\sin\theta \cdot dr \cdot r\,d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \underbrace{\int_0^R r^2\,dr}_{=R^3/3} \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta}_{=\Big|_0^\pi (-\cos\theta) = 2} = \underline{\frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R}$$

Halvparten av tynn ring: $Y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$

Halvparten av kompakt kule: $Y_{CM} = \frac{3R}{8}$

Eks 2: Rør med lodd i enden



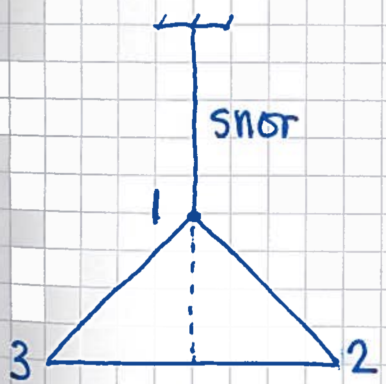
$m = 165\,g$

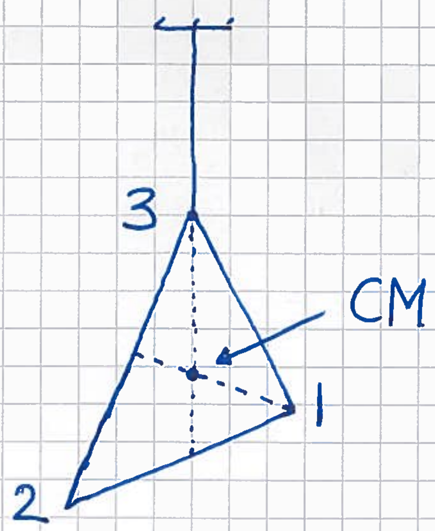
$M = 305\,g$

$$X_{CM} = \frac{1}{m+M}\left\{ M\cdot 0 + \underbrace{\int_0^L x\cdot\frac{m\,dx}{L}}_{=m\cdot L/2} \right\}$$

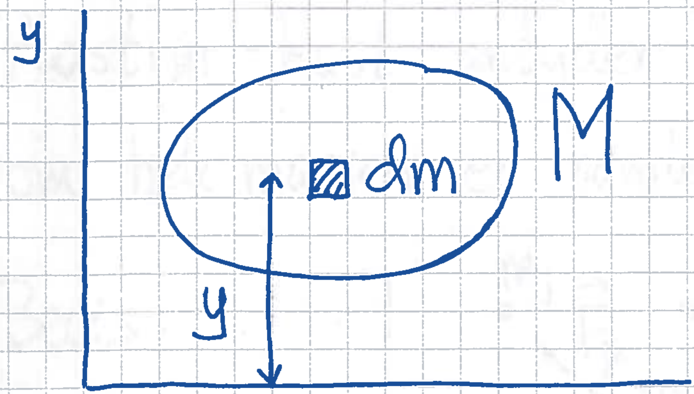
$$= \frac{mL}{2(m+M)} \approx \underline{0.18\,L}$$

Eks 3: Eksperimentell lokalisering av CM





Potensiell energi i tyngdefeltet



Velger $U(0) = 0$

$$U = \int dU = \int g \cdot y \cdot dm$$

Anta g = konstant (dvs $y_{max} - y_{min} \ll$ jordradien)

$$\Rightarrow U = g \cdot \int y\, dm = g \cdot M \cdot Y_{CM}$$

dvs som om hele M var samlet i høyden Y_{CM}, f.eks. i $\vec{R}_{CM}$

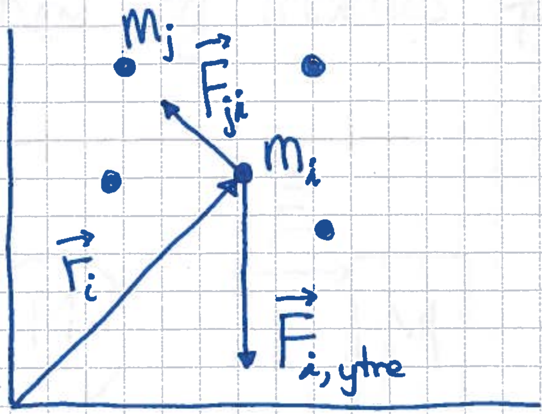
Tyngdepunkt: Der legemet balanserer.

Hvis g er konstant (for hele legemet), er tyngdepunkt og massesenter samme sted.

Massesenterets bevegelse [YF 8.5 ; LL 5.8]

Plastrør-kast antyder at CM beveger seg som om hele massen er samlet i CM. Dette stemmer!

Bevis:



N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\vec{F}_{i,ytre}}_{\text{Total ytre kraft på } m_i} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{Total indre kraft på } m_i}$$

Tar $\sum_i$ på begge sider.

$$\text{VS: } \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2}\left\{\sum_i m_i \vec{r}_i\right\} = \frac{d^2}{dt^2}\left\{M\vec{R}_{CM}\right\} = M\ddot{\vec{R}}_{CM}$$

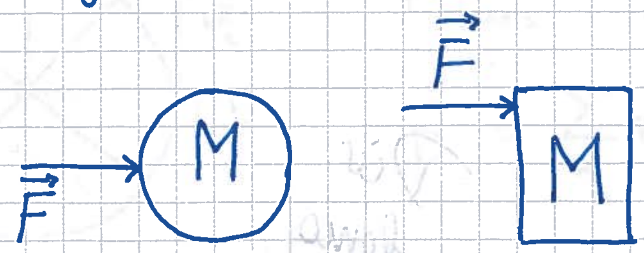
$$\text{HS: } \sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft på systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \ldots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ytre} = M\ddot{\vec{R}}_{CM}}$$

Dvs: Bevegelsen til CM blir som om hele M er samlet i $\vec{R}_{CM}$ og utsettes for netto ytre kraft $\vec{F}_{ytre}$.

Eks:



$\Rightarrow \vec{A}_{CM} = \vec{F}/M$; den samme for de to legemene

---

I tillegg til CMs bevegelse,

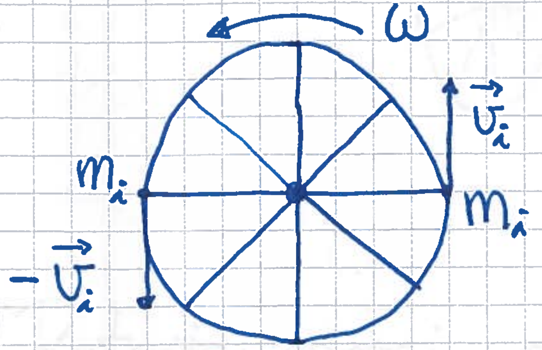
for stive legemer: rotasjon om CM

for ikke helt stive legemer: også vibrasjon

Rotasjon [YF 9,10; LL 6 (5)]

Innledende kommentarer:

- Ren rotasjon (typisk om CM, men ikke nødv.vis)



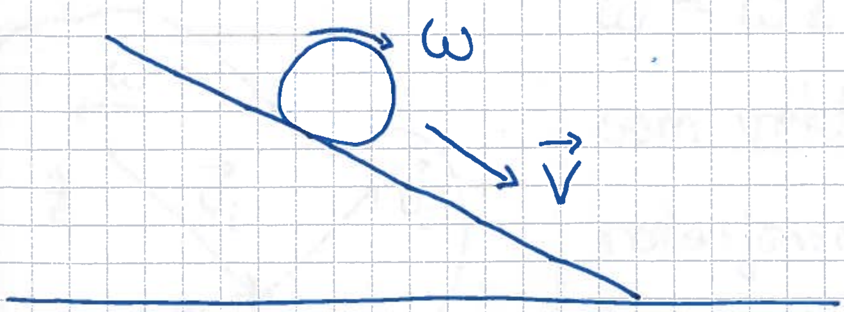
$$K_{trans} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^{2} = 0$$

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \neq 0$$

$$\vec{L} = \text{hjulets dreieimpuls} \neq 0$$

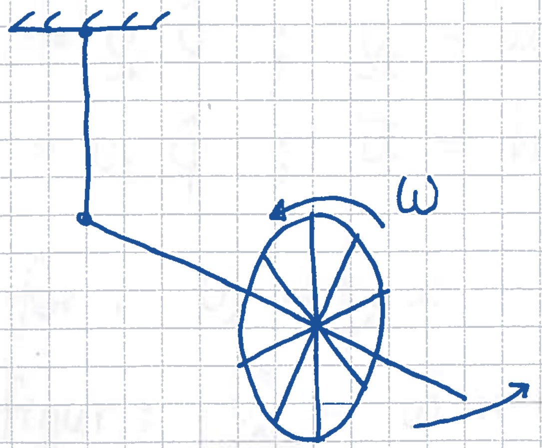
- Rulling = Translasjon av CM + Rotasjon om CM



$\dot{V} > 0$ pga ytre <u>kraft</u> (langs skråplanet)

$\dot{\omega} > 0$ pga ytre <u>dreiemoment</u> (mhp CM)

- Overraskende (?) dynamikk



Ω $(\ll \omega)$

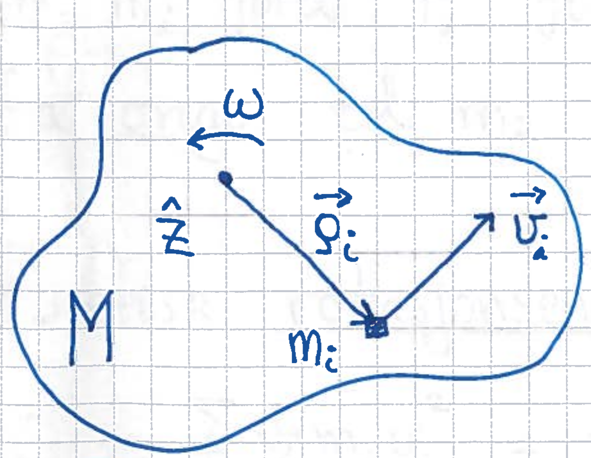
Presesjon.
Gyroskop.

Rotasjonsenergi og treghetsmoment

[YF 9.4 ; LL 6.4, 6.3]

Ser først på ren rotasjon av stivt legeme, om fast akse, ikke nødv. vis gjennom CM.

Med rotasjonsaksen langs $\hat{z}$, ut av planet:



$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$ = vinkelhast. som vektor, langs rotasjonsaksen; 4 fingre på høyre hånd i rotasjonsretningen (her: mot klokka) gir tommelen langs $\vec{\omega}$

"høyrehåndsregel"

Videre er:

$\vec{\rho}_i = \rho_i \hat{\rho}$; ρ_i = avstand fra rot.aksen til m_i

$\vec{v}_i = v_i \hat{\varphi}$; $\vec{v}_i$ = hastigheten til m_i

Fra før: $v_i = \rho_i \omega$

Fra figur: $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$

Høyrehåndsregel for kryssprodukt:
4 fingre langs $\vec{a}$ bøyes over i retning langs $\vec{b}$;
da peker tommelen langs vektoren $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Vi bruker her <u>sylinderkoordinater</u> ρ, φ, z;
dvs polarkoordinater ρ, φ samt z.

[Unngår å bruke $\vec{r}_i$ for avstandsvektoren fra z-aksen til m_i fordi $\vec{r}_i$ forbeholdes posisjonsvektoren fra <u>origo</u> til m_i; derfor $\vec{\rho}_i$!]

Kinetisk <u>rotasjonsenergi</u> for det stive legemet:

$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Her er I legemets <u>treghetsmoment</u>, mhp den aktuelle aksen: $\boxed{I \stackrel{def}{=} \sum_i m_i \rho_i^2}$

Hvis kontinuerlig massefordeling: $m_i \to dm$, $\sum_i \to \int$

$\Rightarrow \boxed{I = \int \rho^2 \, dm}$ ρ = avstand fra aksen til dm

<u>Generell</u> bevegelse for et stivt legeme er <u>translasjon</u> av CM, med hastighet $\vec{V}$, samt <u>rotasjon</u> om en akse gjennom CM, med vinkelhastighet $\vec{\omega}$. Total kinetisk energi blir da

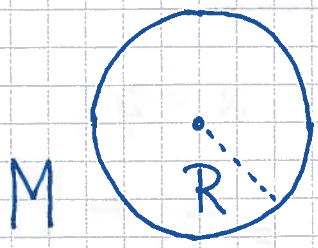
$$\boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

[Se utlagt notat for bevis.]

Notasjon: I_0 betyr at aksen går gjennom CM.

Treghetsmoment; eksempler [YF 9.6 ; LL 6.3]

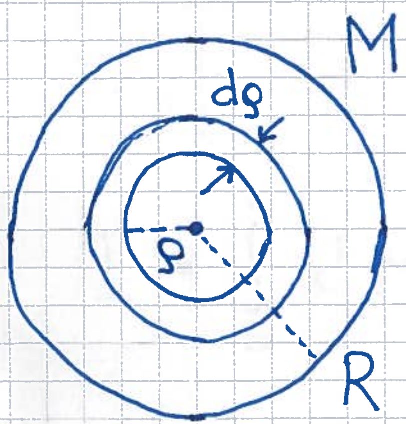
- Ring (og hul sylinder)



$$I_0 = \int \rho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

[Må <u>kunnes</u> ; oppgis ikke til eksamen.]

- Skive (og kompakt sylinder)



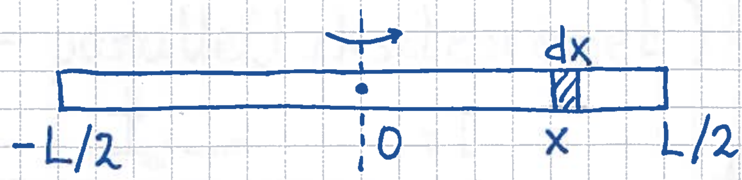
Bidrag fra tynn ring med radius ρ, tykkelse $d\rho$, areal $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$ og masse $dm = M \cdot dA/\pi R^2$:

$$dI_0 = \rho^2 dm = 2M\rho^3 d\rho / R^2$$

$$\Rightarrow I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \underline{\underline{\tfrac{1}{2} MR^2}}$$

(oppgis)

- Tynn stang (og tynn plate)

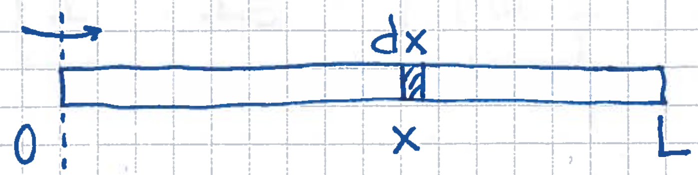


$$\rho = x, \quad dm = M \cdot dx/L$$

$$\Rightarrow \quad I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \frac{M}{L} \Big|_{-L/2}^{L/2} x^3/3 = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

(oppgis)

Mhp akse ved stangas ende:



$$I = \int_0^L x^2 M \, dx/L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$ (oppgis ikke)

- Kuleskall

$I_0 = \frac{2}{3} MR^2$

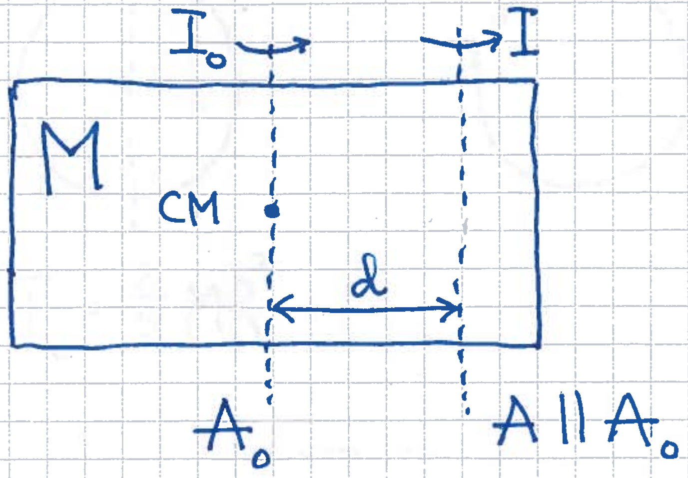
- Kompakt kule

$I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Se øving og LF for detaljer. Oppgis.

Steiners sats [YF 9.5 ; LL 6.3]

(= parallellakseteoremet)

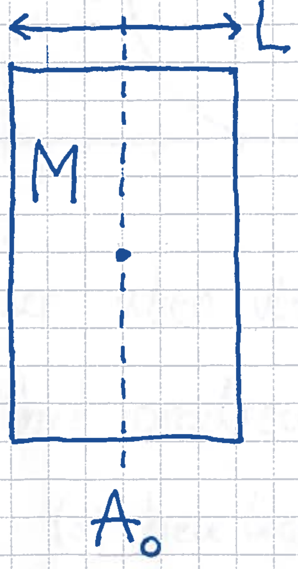


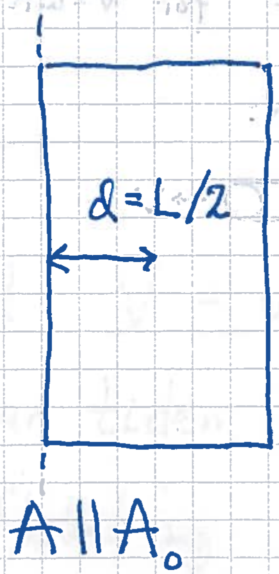
A: akse parallell med aksen A_0

$$\boxed{I = I_0 + Md^2}$$

[Se notat for bevis]

Eks 1: Dør





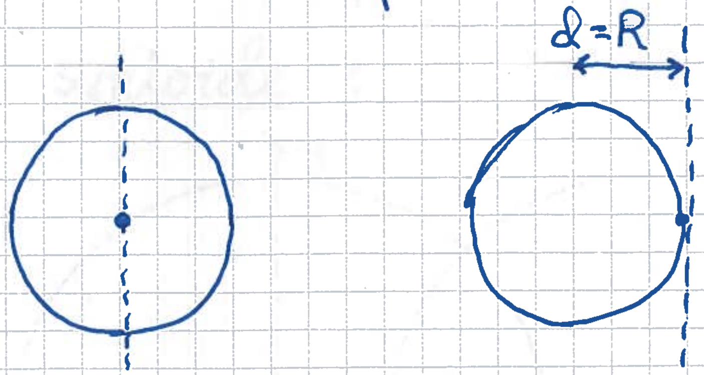
$$I_0 = \frac{1}{12}ML^2$$

$$\Rightarrow I = I_0 + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{3}ML^2$$

(som s. 57)

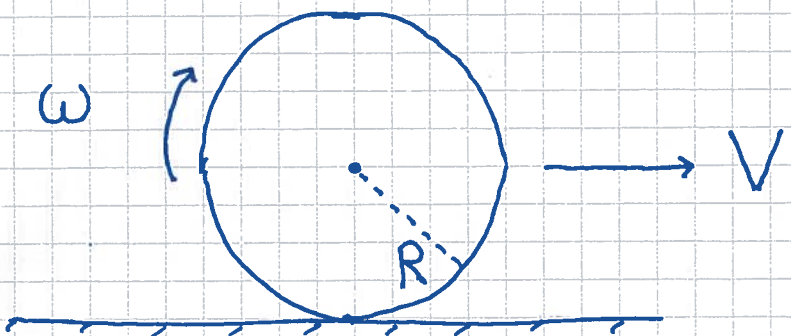
Eks 2: Kompakt kule



$$I = I_0 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$$

$$I_0 = \frac{2}{5}MR^2$$

Ren rulling [YF 10.3; LL 6.7]



Vi ser uten videre at $\underline{V = \omega R}$:

En hel omdreining tar tiden $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Da har CM (og hele legemet) flyttet seg $2\pi R$ mot høyre. Det gir $V = 2\pi R / T = \omega R$. Evt: Liten rotasjon $d\theta = \omega\, dt$ flytter CM liten lengde $dx = R\, d\theta = R\omega\, dt$, som gir $V = dx/dt = R\omega$. Som er rullebetingelsen.