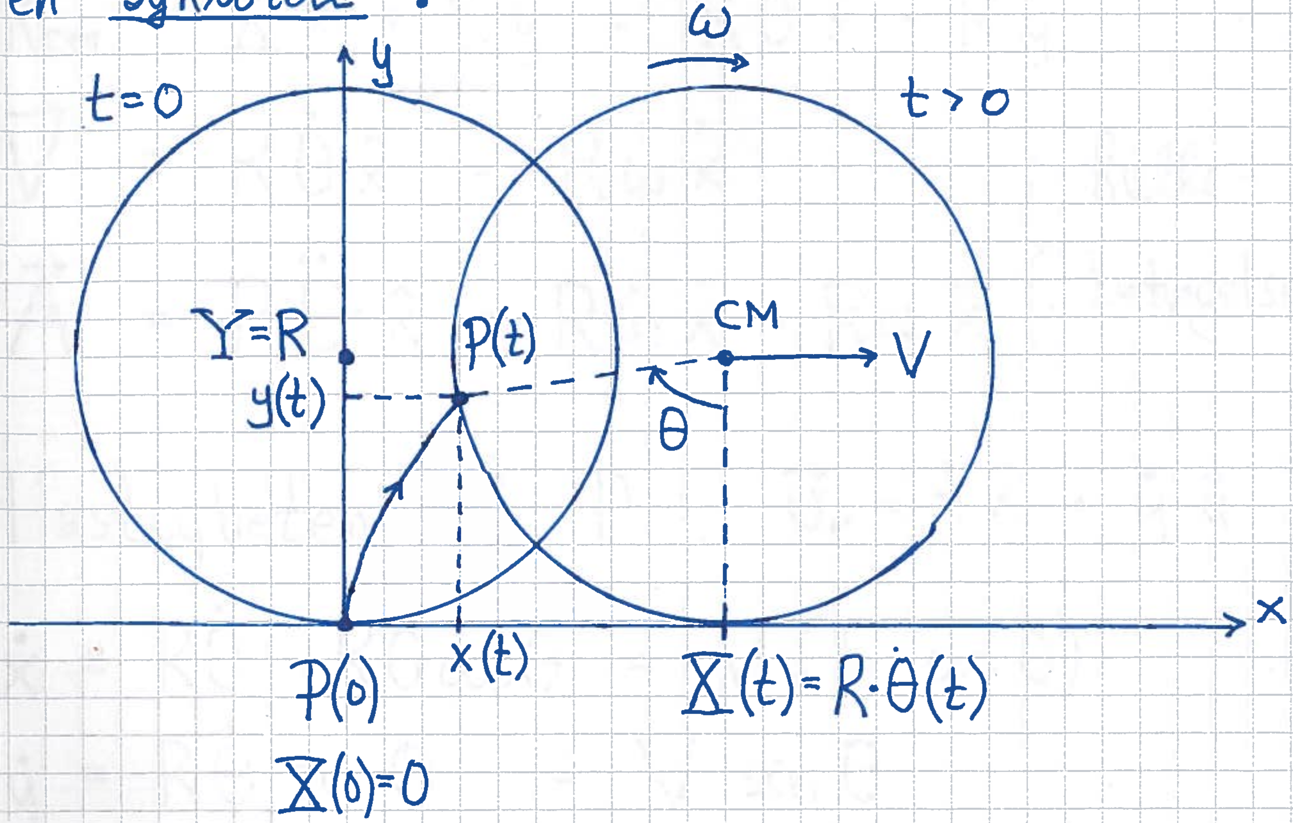
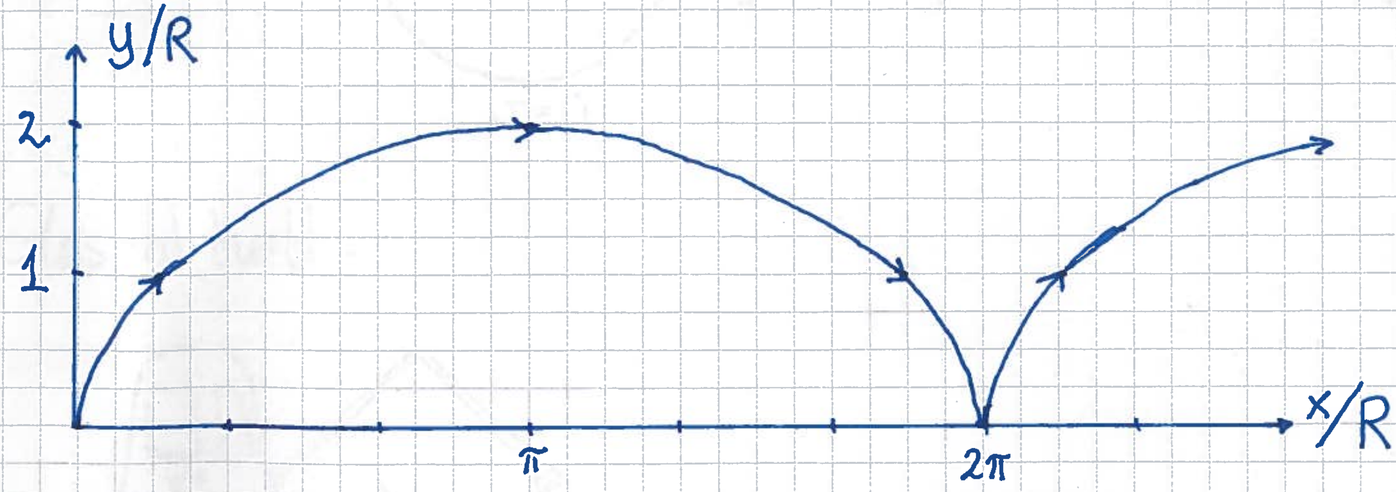
Banen til et punkt P på periferien er en <u>sykloide</u> :



Fra figuren : $x = X - R\sin\theta = R\theta - R\sin\theta$

$y = Y - R\cos\theta = R - R\cos\theta$



Bevegelsen til CM:

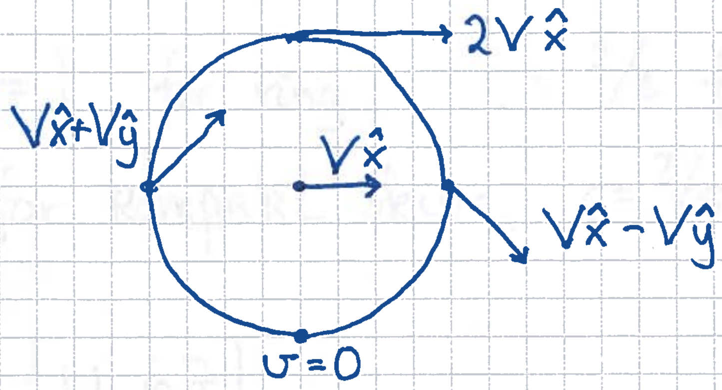
$$\vec{R}_{CM} = X\hat{x} + Y\hat{y} = R\theta\,\hat{x} + R\,\hat{y}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \vec{V} &= R\dot{\theta}\,\hat{x} = R\omega\,\hat{x} \\ \Rightarrow \vec{A} &= R\ddot{\theta}\,\hat{x} = R\dot{\omega}\,\hat{x} = R\alpha\,\hat{x} \end{aligned}\right\} \text{Rulle-betingelse(r)}$$

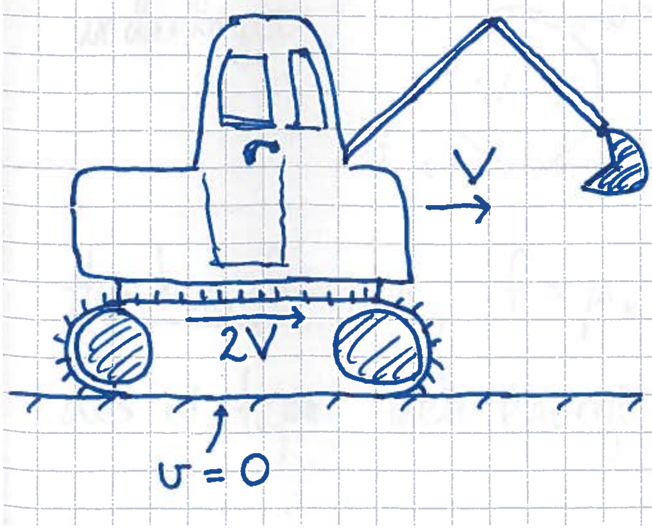
Hastigheten til P: $\vec{\upsilon}_P = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y}$

$$\dot{x} = R\dot{\theta} - R\dot{\theta}\cos\theta = V(1-\cos\theta)$$

$$\dot{y} = R\dot{\theta}\sin\theta = V\sin\theta$$



Gløs-aktuelt:



Ser at $v = 0$ for $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$,
dvs når P er i kontakt med underlaget.

Da er effekttapet pga friksjon

$$P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = \underline{0} \quad \text{(som nevnt s. 36)}$$

Kinetisk energi ved ren rulling:

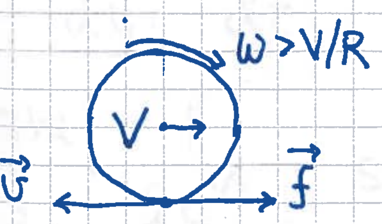
$$K = \tfrac{1}{2} M V^2 + \tfrac{1}{2} I_0 \omega^2 = \tfrac{1}{2} M V^2 + \tfrac{1}{2} \cdot c M R^2 \cdot \frac{V^2}{R^2}$$

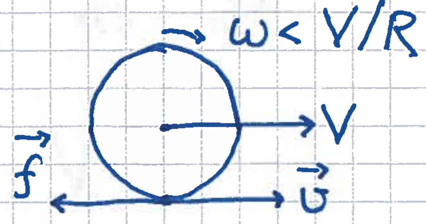
$$\Longrightarrow \quad \boxed{K = (1+c) \tfrac{1}{2} M V^2}$$

med $c = 1$ for ring, $c = 2/3$ for kuleskall,
$c = 1/2$ for kompakt skive, $c = 2/5$ for kompakt kule.

Sluring [LL 6.7]

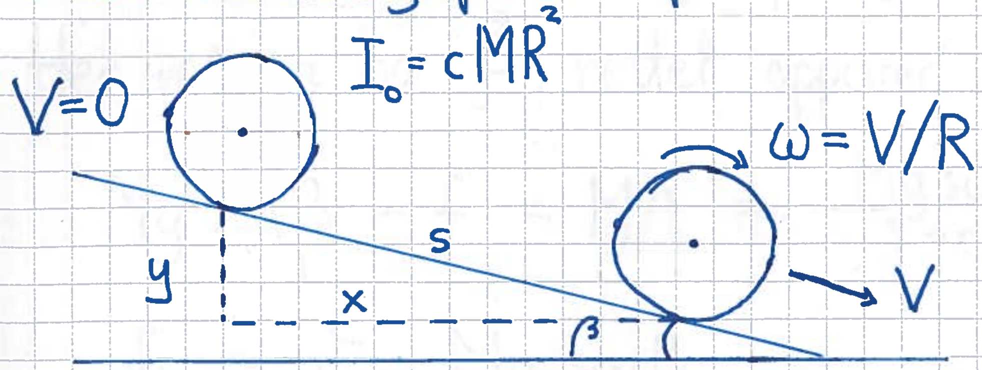
Hvis $\omega \neq \frac{V}{R}$, er $v = V - \omega R \neq 0$, dvs objektet glir på underlaget:





Har kin. friksjon, $f = \mu_k N$, og effekttap, $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$,
dvs vi taper mek. energi pr tidsenhet lik $|P_f|$.

Eks: Ren rulling på skråplan [YF 10.3; LL 6.8]



Finn V, A, friksjonskraften f, og minste μ_s (evt største β) som gir ren rulling.

Energibevarelse : $Mgy = (1+c)\frac{1}{2}MV^2$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V = \left\{\frac{2gy}{1+c}\right\}^{1/2}}} \quad ; \quad \text{avtar med økende } c$$

$\Rightarrow V(\text{kule}) > V(\text{skive}) > V(\text{kuleskall}) > V(\text{hul sylinder})$

Akselerasjon :

$$A = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}$$

$$= \left\{\frac{2g}{1+c}\right\}^{1/2}\cdot\frac{1}{2y^{1/2}}\cdot\sin\beta\cdot V$$

$$= \left\{\frac{2g}{1+c}\right\}^{1/2}\cdot\frac{\sin\beta}{2y^{1/2}}\cdot\left\{\frac{2gy}{1+c}\right\}^{1/2} = \underline{\underline{\frac{g\sin\beta}{1+c}}}$$

<u>Uten</u> friksjon er $F_{\parallel} = Mg\sin\beta$ og $A = g\sin\beta$.

$\Rightarrow$ Her må vi ha $\vec{f}$, rettet oppover skråplanet

$$\Rightarrow \quad Mg\sin\beta - f = MA = \frac{Mg\sin\beta}{1+c}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f = \frac{c}{1+c} Mg\sin\beta}}$$

Maksimal statisk friksjon er $f_{max} = \mu_s N$, og $N = Mg\cos\beta$. Må derfor, for å ha ren rulling, oppfylle ulikheten $f \leq f_{max}$, dvs

$$\frac{c}{1+c} Mg\sin\beta \leq \mu_s Mg\cos\beta$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c}\tan\beta}} \quad , \text{ evt. } \underline{\underline{\beta \leq \arctan\left\{\mu_s \cdot \frac{1+c}{c}\right\}}}$$

Lab: Krum bane. Ren rulling gir fortsatt energibevarelse og

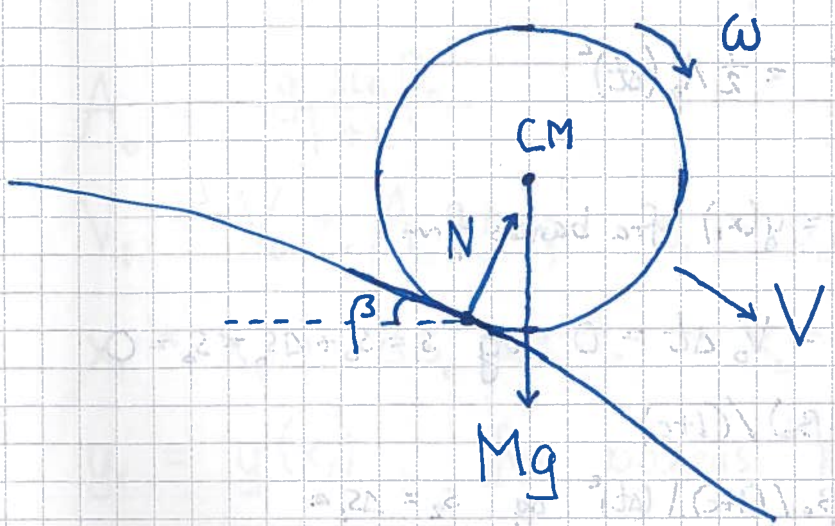
$$A = \frac{g\sin\beta}{1+c}$$

tangentielt med banen, men ikke lenger konstant.

Har også akselerasjon normalt på banen,

$$A_\perp = V^2/\rho \quad ; \quad \rho = [1+(y')^2]^{3/2}/|y''|$$

slik at normalkraften N varierer langs banen $y(x)$.



N2 $\perp$ banen gir

$$MA_\perp = \pm(Mg\cos\beta - N) \quad ; \quad \text{krumning} \begin{matrix}\text{nedover}\\ \text{oppover}\end{matrix}$$

dvs N kan beregnes når V og $y(x)$ er kjent. Merk at $y' = dy/dx = \tan\beta$.

<u>Målt</u> bevegelse gir $x(t)$ og $y(t)$.
<u>Beregnet</u> / Teoretisk bevegelse fås ved å løse "N2" langs banen numerisk, f.eks med Euler-metoden:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{g \sin\beta}{1+c} \quad \Rightarrow \quad \Delta V = \frac{g \sin\beta}{1+c} \Delta t = A \, \Delta t$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = V \quad \Rightarrow \quad \Delta s = V \, \Delta t$$

Med f.eks. $t_0 = 0$, $V_0 = V(t_0) = 0$ og $s_0 = s(t_0) = 0$:

$$A_0 = \frac{g \sin\beta_0}{1+c}$$

$$V_1 = V_0 + A_0 \Delta t \; ; \quad s_1 = s_0 + V_0 \Delta t \; ;$$

$$x_1 = x_0 + \Delta s_0 \cos\beta_0 = x_0 + V_0 \Delta t \cos\beta_0$$

$y_1 = y(x_1)$, fra banens kjente form

$$A_1 = \frac{g \sin\beta_1}{1+c}$$

$$V_2 = V_1 + A_1 \Delta t \; ; \quad s_2 = s_1 + V_1 \Delta t \; ;$$

$$x_2 = x_1 + \Delta s_1 \cos\beta_1 = x_1 + (s_2 - s_1)\cos\beta_1$$

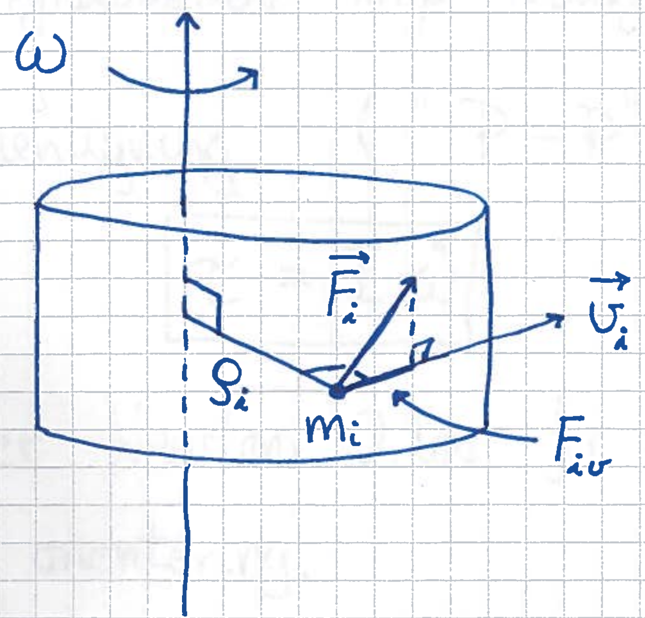
$$y_2 = y(x_2)$$

osv

Krefter og rotasjon : Rotasjonsdynamikk

Akse med fast orientering [YF 10.1, 10.2 ; LL 6.2]

Dette er essensielt et endimensjonalt problem, der vi betrakter rotasjonsdelen av den totale bevegelsen.



$v_i = \rho_i \omega$

$(\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)$

F_{iv} = komponent langs $\vec{v}_i$ av ytre kraft $\vec{F}_i$ på m_i

"Triks" : Vi beregner tilført effekt,

$$P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{iv} v_i$$

på to måter og sammenligner uttrykkene vi finner.

(1) Bruker $v_i = \rho_i \omega$:

$$P = \left\{ \sum_i F_{iv} \rho_i \right\} \omega = \tau \omega$$

Her er $\tau = \sum_i F_{iv} \rho_i$ = netto ytre dreiemoment på legemet, mhp rotasjonsaksen ("kraft ganget med arm")

(2) Bruker $\vec{F}_i = m_i \, d\vec{v}_i/dt$:

$$P = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_i m_i v_i^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_i m_i \rho_i^2\right\}\omega^2 = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt}\omega^2 = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

$= I\omega\dot{\omega}$ (der $I = \sum_i m_i \rho_i^2$ er legemets treghetsmoment mhp rotasjonsaksen)

Sammenligning ("$P = P$") gir nå

$$\boxed{\tau = I\dot{\omega}}$$

som er Newtons 2. lov for rotasjon om akse med fast orientering.

Jf. N2 for translasjon: $F = m\dot{v}$

<u>Arbeid utført av dreiemomentet</u> [YF 10.4 ; LL 6.4]

Vi har $P = \tau\omega = \tau \, d\varphi/dt$ og $P = dW/dt$, som gir

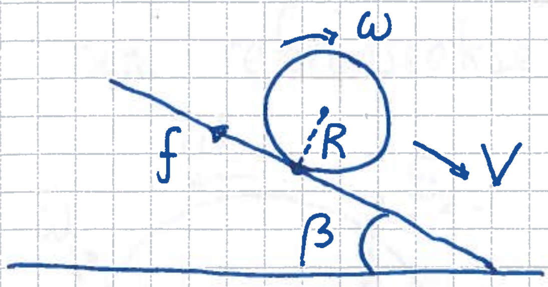
$$\boxed{dW = \tau \, d\varphi}$$

som er arbeid utført av τ ved en vinkelendring $d\varphi$

Jf. arbeid utført av kraft ved translasjon:

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Eks 1: Ren rulling på skråplan



$\omega = V/R, \quad \dot{\omega} = \dot{V}/R$

N2 langs skråplanet: $Mg\sin\beta - f = M\dot{V}$

N2, rotasjon om akse gjennom CM (fast orientering):

$\tau = I_0\dot{\omega}$, med $I_0 = c\cdot MR^2$, $\dot{\omega} = \dot{V}/R$ og

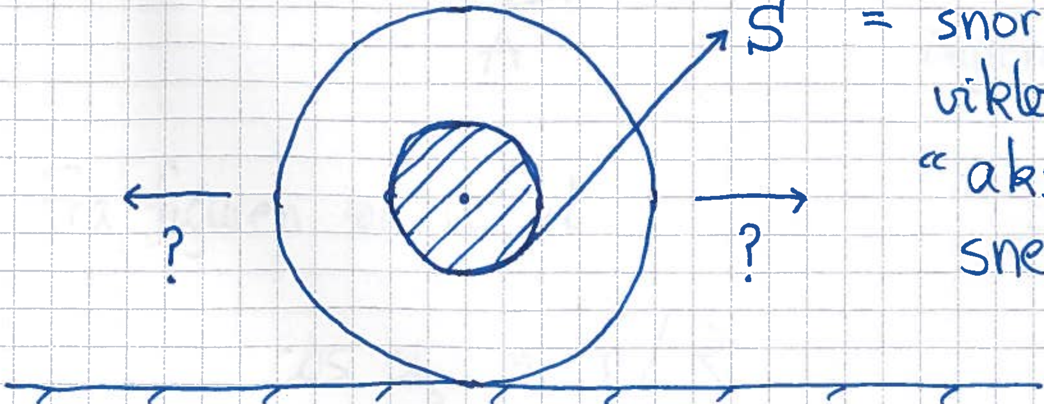
$\tau = f\cdot R$ (siden $\vec{N}$ og $M\vec{g}$ begge har null arm relativt aksen gjennom CM) gir

$$f\cdot R = cMR\dot{V}, \quad \text{dvs} \quad f = cM\dot{V}$$

som innsatt i "translasjonslign." gir

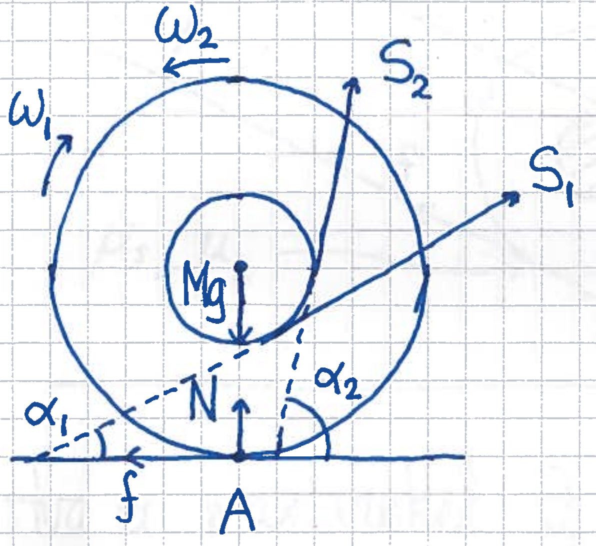
$Mg\sin\beta - cM\dot{V} = M\dot{V}$, dvs $\dot{V} = \dfrac{g\sin\beta}{1+c}$, som s. 63.

Eks 2: Rulling mot høyre eller venstre?



S = snordrag i snor viklet opp rundt "akslingen" på snella

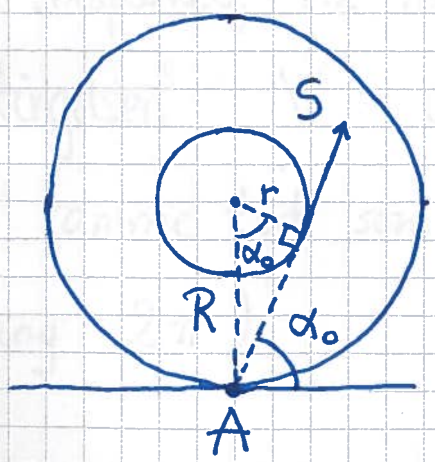
"Triks": Velg kontaktlinja mellom snelle og gulv som referanseakse A.



Mg, N og f har alle <u>null arm</u> mhp aksen A
$\Rightarrow$ kun snordrag S har dreiemoment mhp aksen A

S_1 : liten α, rulling mot høyre
S_2 : stor α, ———"——— venstre

Hvis $\vec{S}$ går gjennom A, har vi statisk likevekt:

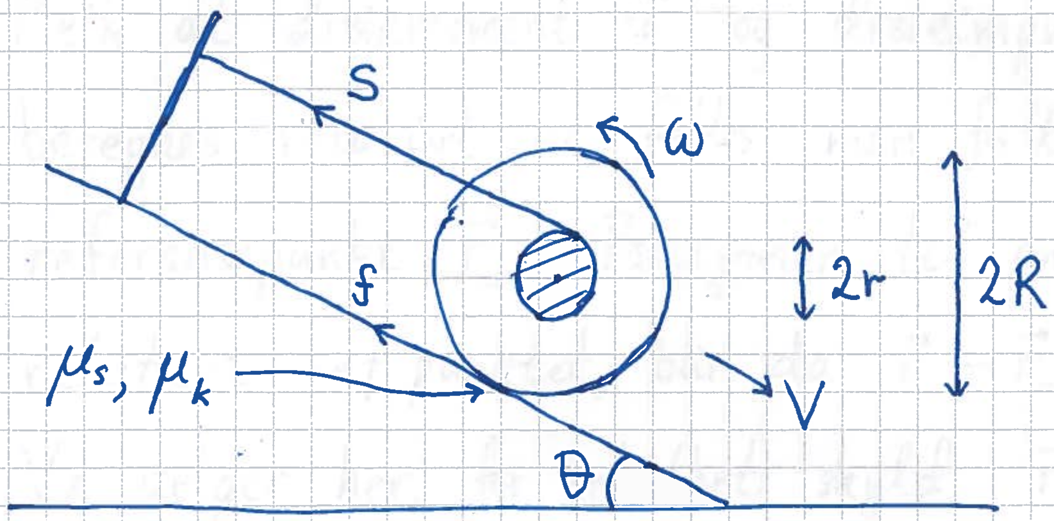


$$\Sigma \tau_A = 0$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{\omega} = 0$$
$$\Downarrow$$
ingen rotasjon

Fra figuren ser vi at

$$\cos \alpha_0 = r/R$$

Eks 3: Snelle på skråplan (Øv. 6)



Hva er max vinkel θ_0 uten at snella slurer "baklengs" nedover?

Tips: N1 || skråplanet, N1 rot. om CM, $f = f_{max} = \mu_s N$

Hvis $\theta > \theta_0$, hva blir snordraget S og akselerasjonen a?

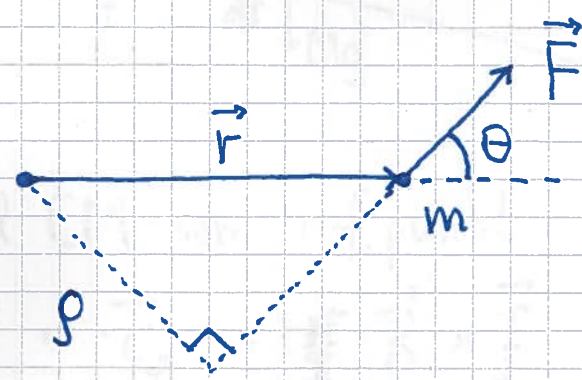
Tips: N2 || skråplanet, N2 rot. om CM, $f = \mu_k N$, og "rullebetingelsen" $V = \omega r$ (da translasjon $2\pi r$ tar samme tid som én omdreining, dvs vinkelendring 2π).

Tredimensjonal rotasjonsdynamikk

Merk at dreiemoment $\vec{\tau}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ beregnes relativt et felles, men fritt valgt, referansepunkt $\vec{r}_0$. Posisjonen til en punktmasse, relativt ref. punktet, blir da $\vec{r} - \vec{r}_0$.

Vi velger her, for enkelhets skyld, $\vec{r}_0 = 0$.

Dreiemoment [YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



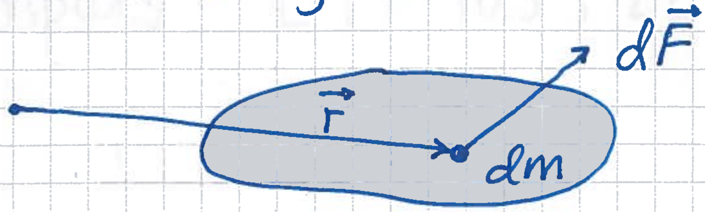
Kraftens dreiemoment på m : $\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$

Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{r}$ og $\vec{F}$; her ut av planet

Abs. verdi : $\tau = r \cdot F \cdot \sin\theta = \rho \cdot F$;

som s. 67, "arm × kraft".

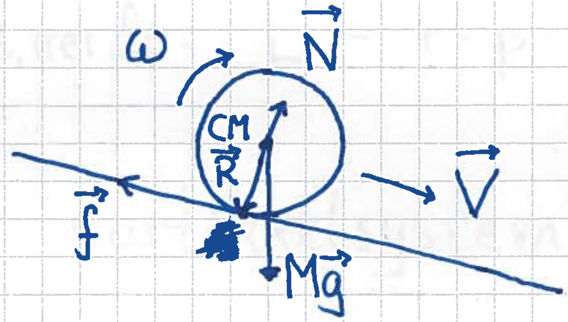
For partikkelsystem:



$$d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$$ = totalt dreiemoment på systemet

Eks: Rullende kule (se s. 69)



Med CM som ref.punkt: $\vec{\tau}_N = \vec{\tau}_g = 0$

$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{\tau}_f = \vec{R} \times \vec{f}$ = vektor <u>inn</u> i planet,

med abs.verdi $\tau = R \cdot f$, da $\vec{R} \perp \vec{f}$.

Vi noterer oss at $\vec{\omega}$ og $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$ her

også er vektorer <u>inn</u> i planet.