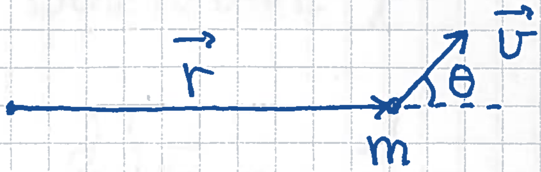
Dreieimpuls [YF 10.5 ; LL 6.6]



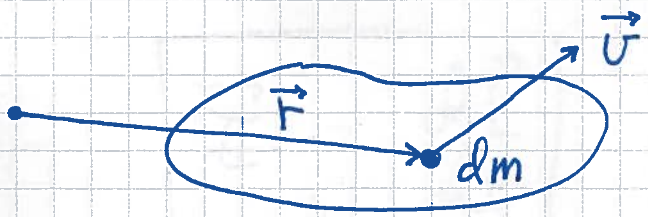
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Massens dreieimpuls: $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$

Retning: $\vec{L} \perp \vec{r}$ og $\vec{p}$ (her: ut av planet)

Abs.verdi: $L = r \cdot p \cdot \sin\theta$

For partikkelsystem:

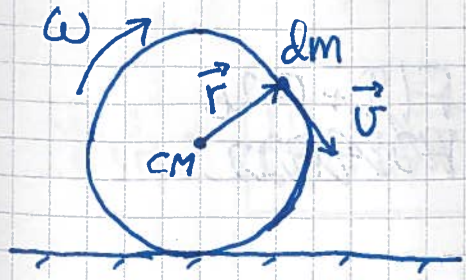


$$d\vec{p} = dm \cdot \vec{v}$$

$$d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p}$$

$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times d\vec{p}$ = systemets totale dreieimpuls

Eks: Rullende ring ; CM som ref.punkt



$$d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v}\, dm = r \cdot v \cdot dm \cdot \hat{\omega}$$

$$= r \cdot r\omega \cdot dm \cdot \hat{\omega} = dm \cdot R^2 \cdot \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = MR^2 \vec{\omega} = I_0 \vec{\omega}$$

$\hat{\omega}$ inn i planet

N2 for rotasjon [YF 10.5 ; LL 6.6]

("spinnsatsen")

$$\underline{\frac{d\vec{L}}{dt}} = \frac{d}{dt}\left\{\vec{r} \times m\vec{v}\right\} = m\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}}_{=\vec{v}\times\vec{v}=0} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \vec{r} \times (m\vec{a}) \overset{N2}{=} \vec{r} \times \vec{F} = \underline{\vec{\tau}}$$

(som generaliseres til partikkelsystem på tilsvarende vis som s. 73 og s. 74)

Altså: $\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$

med $\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på systemet
$\vec{L}$ = systemets totale dreieimpuls

Jf. $\vec{F} = d\vec{p}/dt$; N2 for translasjon

Merk: $\boxed{\text{Hvis } \vec{\tau} = 0, \text{ er } \vec{L} \text{ bevart}}$

Total $\vec{L}$ for stivt legeme [YF 10.5; LL 6.6]

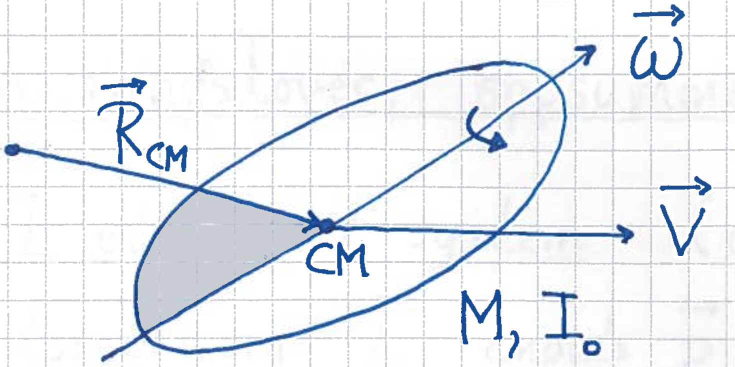
- Fra def. følger at for punktmasse M i avstand $\vec{R}_{CM}$ fra ref.punktet (= origo), og med hastighet $\vec{V}$, er $\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$.

- Eks. side 74 antyder at stivt legeme med treghetsmoment I_0 mhp akse gjennom CM, og med vinkelhastighet ω om denne aksen, dvs $\vec{\omega}$ langs samme akse gjennom CM, har dreieimpuls $\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$ mhp CM.

- Det kan vises (se utlagt notat) at for stivt legeme med refleksjonssymmetri(*) om rotasjonsaksen er total dreieimpuls

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{L}_b + \vec{L}_s \\ &= \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega} \end{aligned}}$$

(*) Symmetrisk når $\vec{\rho} \to -\vec{\rho}$



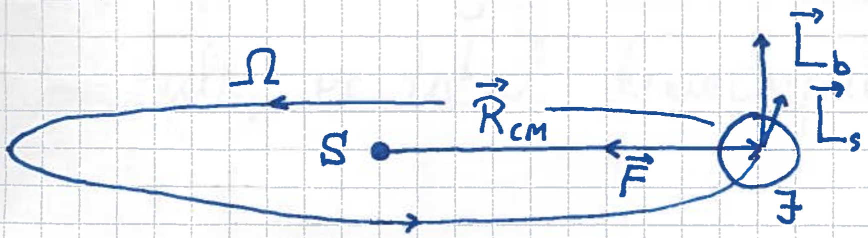
Banedreieimpuls, pga bevegelsen til CM:

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$$

Indre dreieimpuls ("spinn"), pga rotasjon om CM:

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$$

Eks: Jordas $\vec{L}$ relativt sola



$$\vec{\tau} = \vec{R}_{CM} \times \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \text{konstant}$$

$$L_b = R_{CM} M V = R_{CM}^2 M \Omega \sim (1.5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m})^2 \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot \frac{2\pi}{1\,\text{år}}$$

$$\sim 2.7 \cdot 10^{40}\ \mathrm{Js}$$

$$L_s = I_0 \omega \approx \frac{1}{3} M R^2 \omega$$

$$\sim \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg} \cdot (6.37 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m})^2 \cdot \frac{2\pi}{1\,\text{døgn}} \sim 6 \cdot 10^{33}\ \mathrm{Js}$$

$$\Rightarrow L \approx L_b$$

Bevaringslover, oppsummert

- I et isolert system (ingen ytre krefter) er total energi E, impuls $\vec{p}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ bevart.

- I et konservativt system er mekanisk energi $K + U$ bevart.

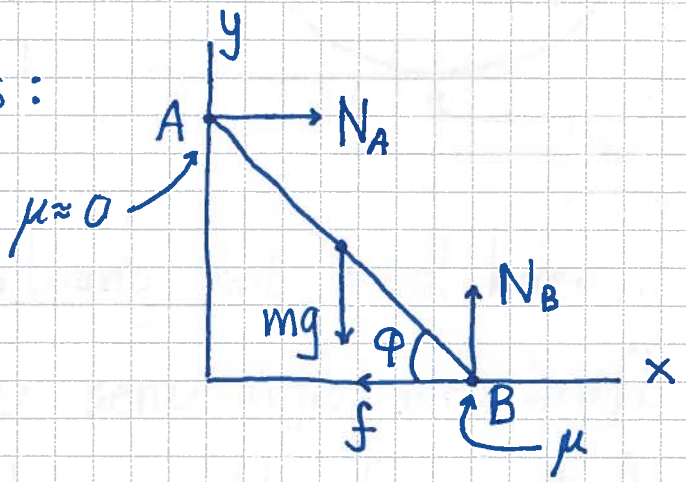
- Hvis netto ytre kraft på et system er null, er total impuls $\vec{p}$ bevart.

- Hvis netto ytre dreiemoment på et system er null, er total dreieimpuls $\vec{L}$ bevart.

Statisk likevekt [YF 11.1-11.3; LL 7.1]

Et stivt legeme forblir i ro, med $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$, bare dersom netto ytre kraft og netto ytre dreiemoment begge er lik null.

Eks:



Når glir stigen?

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f = N_A \quad ; \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = mg$$

$$\sum \tau_B = 0 \Rightarrow mg \frac{L}{2} \cos\varphi - N_A L \sin\varphi = 0$$

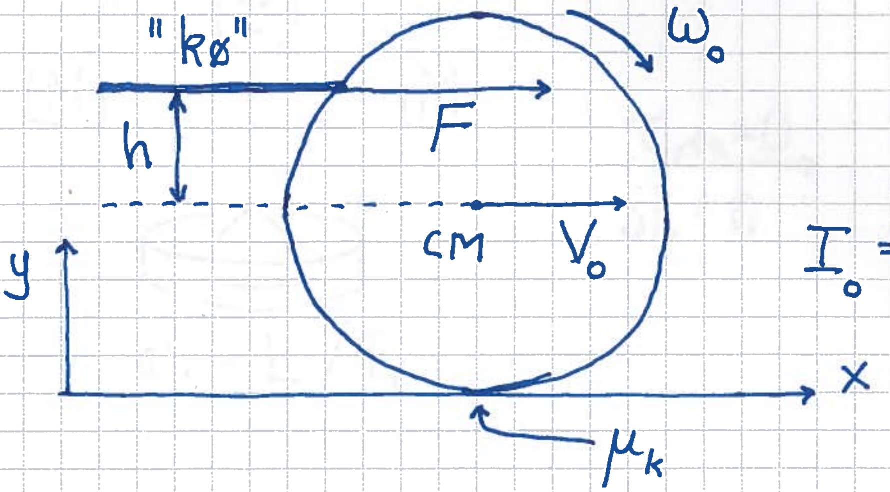
$$f_{max} = \mu N_B = \mu mg \quad ; \quad f = N_A$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cos\varphi_{min} = \mu \sin\varphi_{min} \Rightarrow \tan\varphi_{min} = \frac{1}{2\mu}$$

Hvis $\mu = 0.3$, er $\varphi_{min} = \arctan\left\{\frac{1}{0.6}\right\} \approx 59°$

Rotasjonsdynamikk ; eksempler.

Eks 1 : Snooker [LL 6.7 ; Øv. 6]



$I_0 = \frac{2}{5} MR^2$

Kortvarig støt med køen, $\Delta t \gtrsim 0$, i høyde h over senterlinja med kraft $F \gg f$; f = friksjonskraft fra underlaget.

N2, trans. : $F \Delta t = \Delta p = MV_0$

N2, rot. om CM : $\tau \Delta t = Fh \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0$

$\Rightarrow$ Sluring i starten, med mindre $h = \ldots$

Ren rulling etter hvert, uansett h-verdi.

Med origo som ref. punkt:

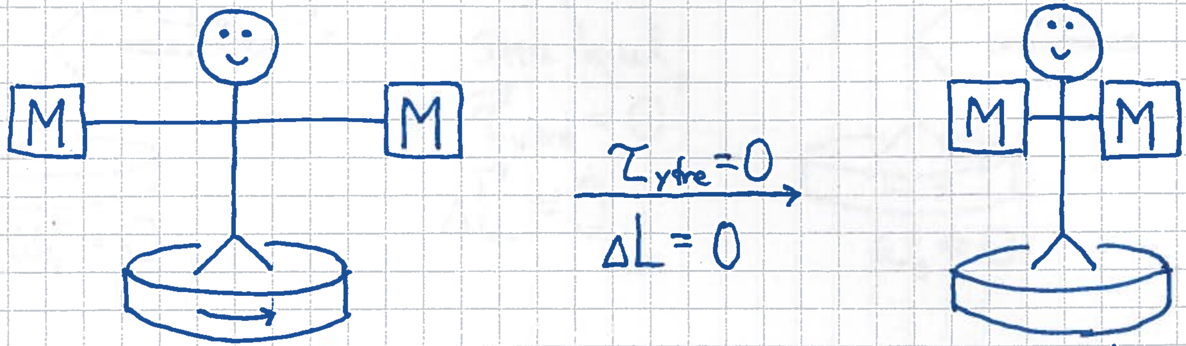
$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = -RMV\,\hat{z}$

$\vec{L}_s = I_0\,\vec{\omega} = -\frac{2}{5} RMV\,\hat{z}$

} ved ren rulling

Eks 2: Piruett [YF 10.6 ; LL 6.5]

Prinsipp: Bevart $L = I\omega$, redusert I, økt ω.



$$\xrightarrow[\Delta L = 0]{\tau_{ytre}=0}$$

$I_2 < I_1$

$\omega_1 = L / I_1$ $\qquad\qquad$ $\omega_2 = L / I_2 > \omega_1$

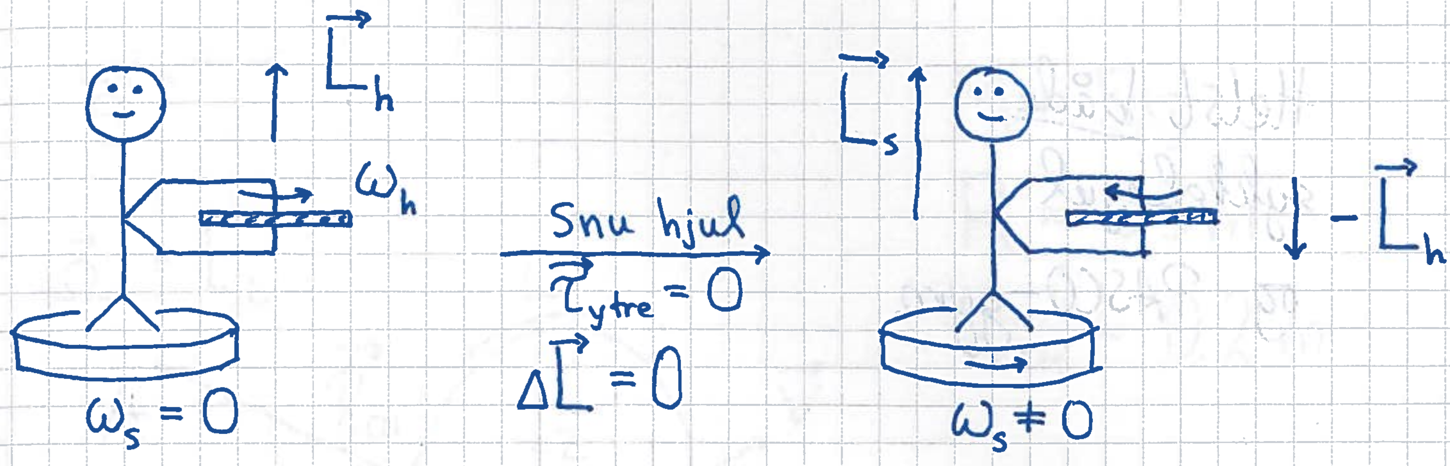
K_{rot} øker:

$$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2$$

$$K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1 \cdot \omega_2 = K_1 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} > K_1$$

Musklene gjør arbeid på de to massene M.

Eks 3: Student med roterende hjul



$\vec{L}$ er bevart.

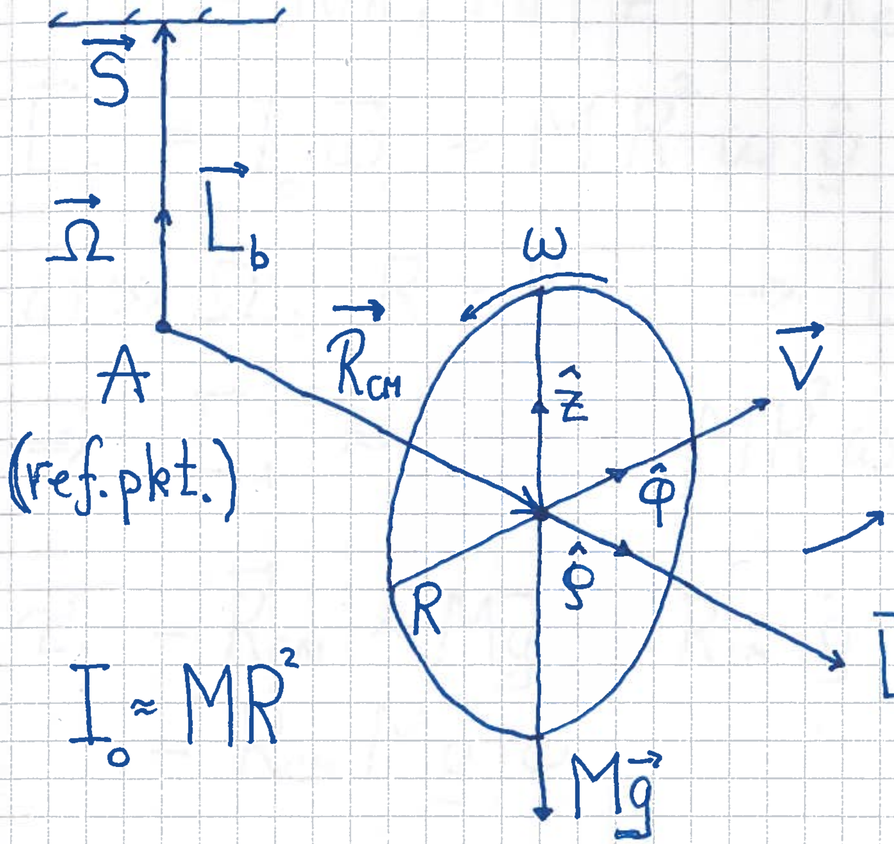
Før : $\vec{L} = \vec{L}_h$

Etter : $\vec{L} = \vec{L}_s - \vec{L}_h$

$\Rightarrow \quad \vec{L}_s = 2\vec{L}_h$

$\Rightarrow \quad \omega_s \neq 0$

Eks 4: Presesjon [YF 10.7 ; LL 6.10]



$M \approx 5\,\text{kg}$

$R \approx 0.3\,\text{m}$

$R_{CM} \approx 0.2\,\text{m}$

$\Omega \ll \omega$

$I_0 \approx MR^2$

Exp: $T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 5\,\text{s}$ når hjulet settes i rotasjon for hånd.

Finn sammenheng mellom ω og Ω.

Løsning: N2 for rotasjon om A.

$$\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A/dt$$

med $\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = R_{CM}\,\hat{\rho} \times MV\hat{\varphi}$$
$$= R_{CM} MV\,\hat{z} = R_{CM} M\, R_{CM}\,\Omega\,\hat{z}$$

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} \approx MR^2 \omega\,\hat{\rho}$$

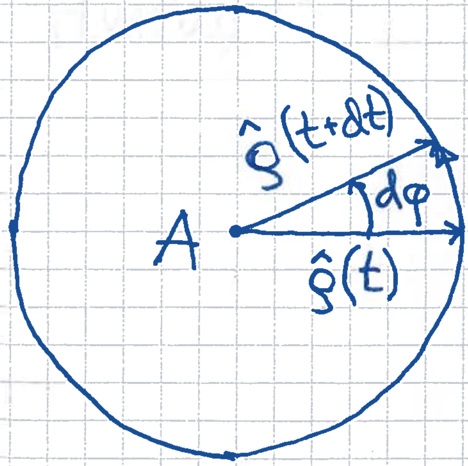
$$\omega \gg \Omega, \quad R \sim R_{CM} \;\Rightarrow\; L_s \gg L_b$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_A \approx \vec{L}_s \approx MR^2 \omega\,\hat{\rho}$$

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM}\,\hat{\rho} \times (-Mg\hat{z})$$
$$= R_{CM} Mg\,\hat{\varphi}$$

$$d\vec{L}_A / dt = MR^2\omega\; d\hat{\rho}/dt$$

Sett ned langs z-aksen:



$$d\hat{\rho} = \underbrace{|\hat{\rho}|}_{=1} \cdot d\varphi \cdot \hat{\varphi} = d\varphi\,\hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \hat{\varphi} = \Omega \cdot \hat{\varphi}$$

Dermed:

$$R_{CM} Mg \, \hat{\varphi} = MR^2 \omega \Omega \, \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad \omega = R_{CM} \, g / R^2 \Omega$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T_\omega} = \frac{R_{CM} \, g \, T_\Omega}{R^2 \cdot 2\pi}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{T_\omega = \frac{(2\pi R)^2}{R_{CM} \, g \, T_\Omega}}$$

Tallverdi:

$$T_\omega \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 5} \approx \frac{2^2}{10} = \underline{0.4 \text{ s}}$$

dvs ca 2.5 omdreininger pr sekund; rimelig!

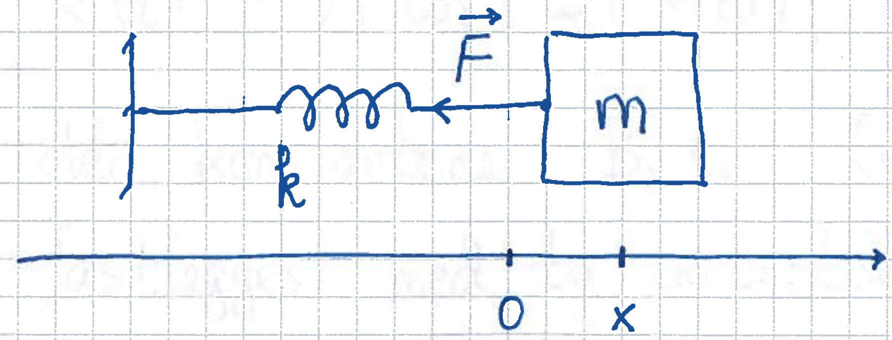
Svingninger [YF 14 ; LL 9]

Generelt: Periodisk oppførsel omkring en likevekt.

En kraft trekker systemet tilbake mot likevekt. (Eng: "restoring force")

Eks: Masse / fjær. Pendler. Fiolinstreng. Atomer i molekyler og faste stoffer. Osv.

Harmonisk oscillator [YF 14.2; LL 9.1-9.3]



Likevekt ($F = 0$) når m er i posisjon $x = 0$.

x = posisjonen til m
= fjæras forlengelse ($x > 0$) eller sammenpressing ($x < 0$)

$\vec{F}$ = kraft på m fra fjæra; retning tilbake mot likevekt

<u>Ideell</u> fjær oppfyller <u>Hookes lov</u> :

$$\boxed{\vec{F} = -kx\,\hat{x}}$$

k = fjærkonstanten

$[k] = N/m$

N2 : $-kx = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = k/m}$$

som er bevegelseslikning for <u>harmonisk oscillator</u> i 1D, med løsning

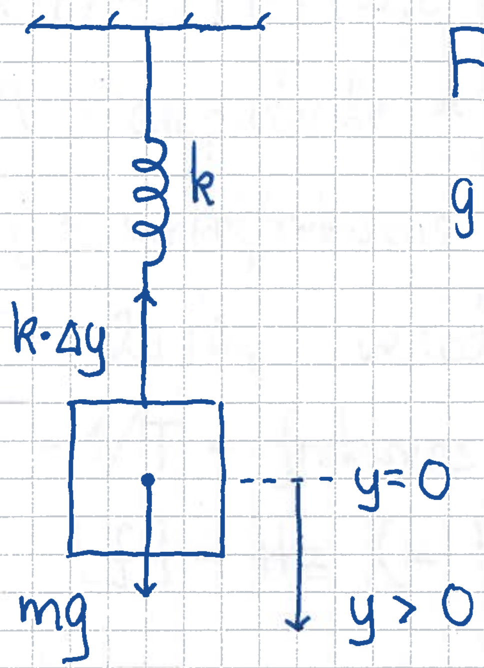
$$x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t\,, \quad \text{evt.}$$

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)\,,$$

der konstantene B, C (evt. A, φ) fastlegges med to initialbetingelser, f.eks. $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$

En <u>konstant</u> tilleggskraft forandrer likevektsposisjonen, men gir uendret bevegelseslikning.

Eks: Masse og fjær i tyngdefeltet



Fjærforlengelse i likevekt, Δy, gitt ved N1:

$$k \cdot \Delta y = mg \Rightarrow \Delta y = mg/k$$

Anta m (CM) i $y=0$ i strukket likevekt.

N2 når m er i posisjon y:

$$m\ddot{y} = mg - k(\Delta y + y) = -ky$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = k/m$$

dvs harmoniske svingninger omkring den strukkede likevekten

Diverse størrelser (jf. sirkelbevegelse):

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ = utsving fra likevekt

A = amplitude = max utsving fra likevekt; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet; $[\omega_0] = \frac{1}{s}$

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hel svingning; $[T] = s$

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet;

$[f] = Hz$ $(= 1/s)$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant; $[\varphi] = 1$

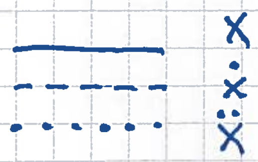
$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2)$

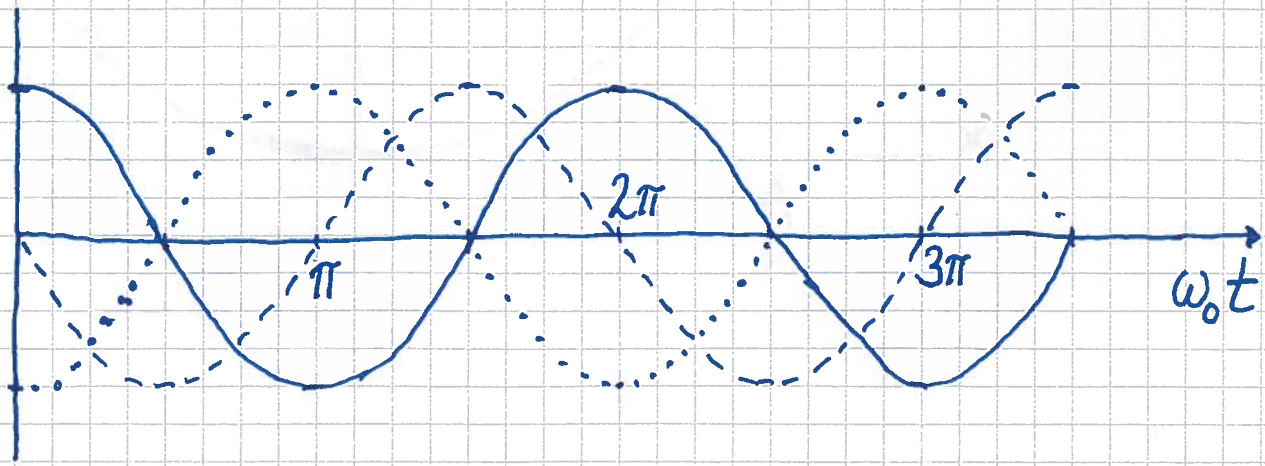
= hastighet

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$

= akselerasjon

Grafisk, med $\varphi = 0$:





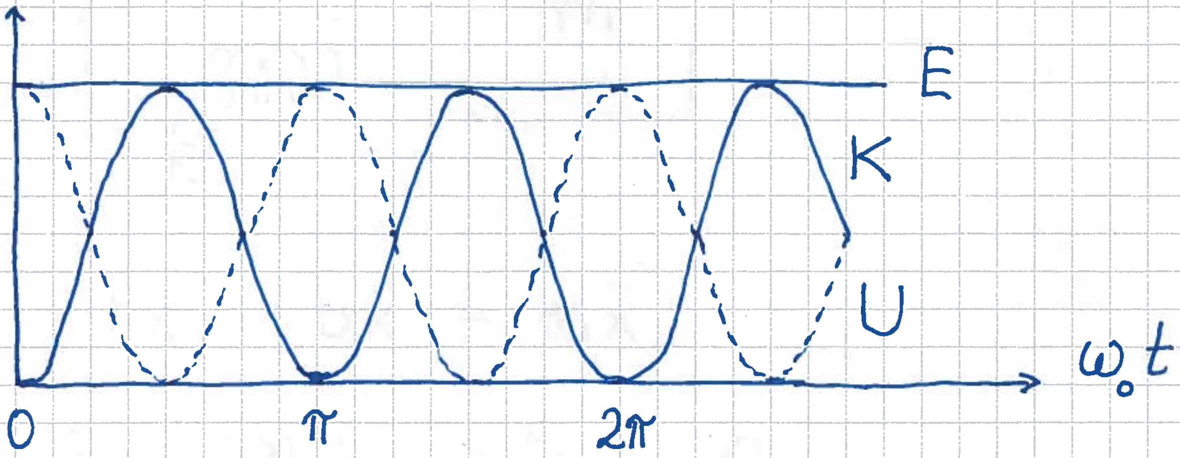
Energi i en harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4]

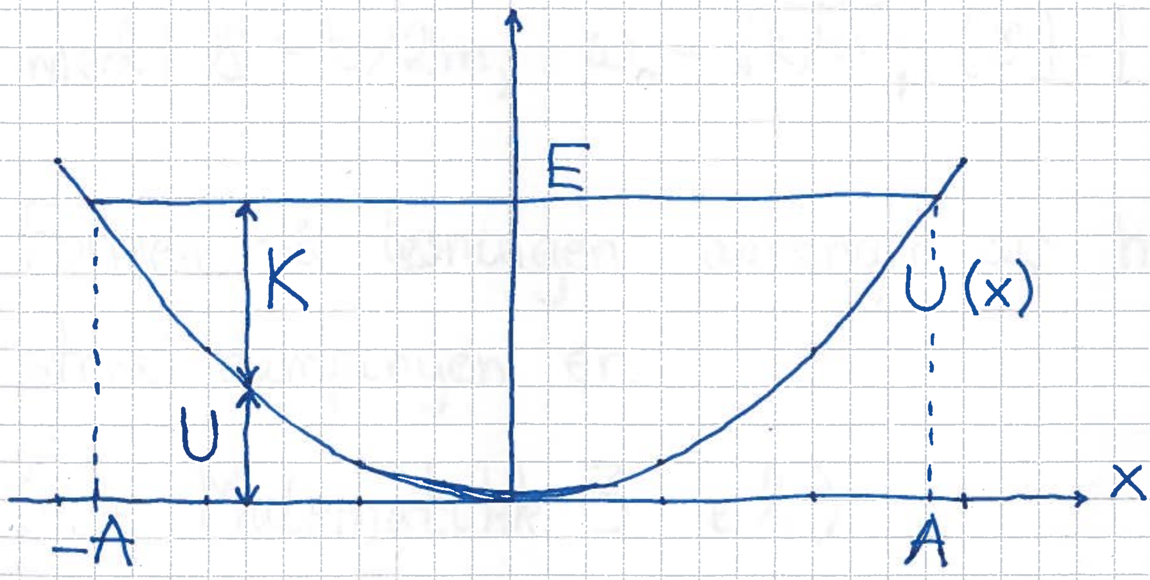
Konservativt system $\Rightarrow$ Mek. energi er bevart

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$U = -\int_0^x (-kx) \cdot dx = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$\Rightarrow E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 \quad (\text{uavh. av } t)$$

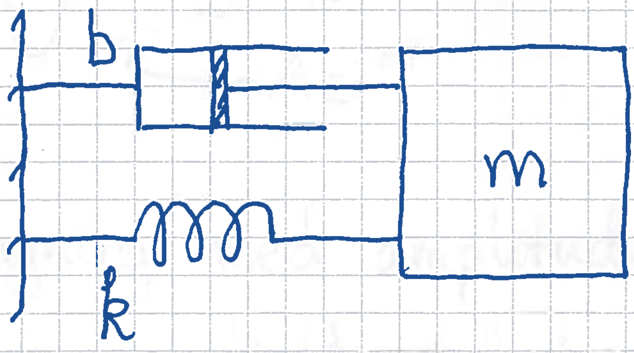




Dempet fri svingning [YF 14.7 ; LL 9.7] (91)

Antar friksjonskraft $f = -b\dot{x}$, dvs som ved langsom bevegelse i fluid.

(Alternativ : $f = -D\dot{x}^2$ eller $f = \mu_k N$)



N2: $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

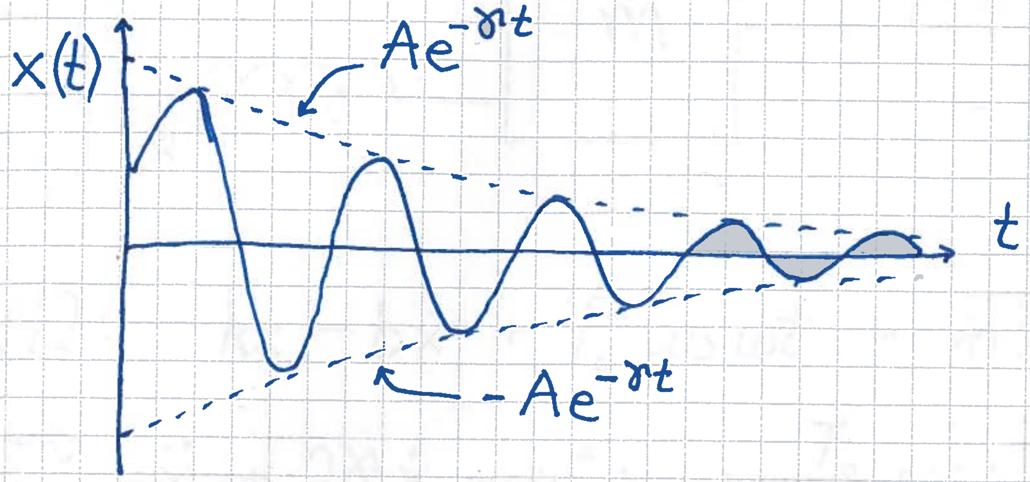
med $\gamma = b/2m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$; $[\gamma] = [\omega_0] = \frac{1}{s}$

Formen på løsningen avhenger av hvor sterk dempingen er.

(Se Matematikk 3 e.l.)

Underkritisk (svak) demping ; $\gamma < \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



dvs svingning med amplitude, $Ae^{-\gamma t}$, som avtar eksponentielt med t ; etter en "karakteristisk" tid $\tau = 1/\gamma$ er amplituden redusert til $A/e \approx 0.37\,A$.

Overkritisk (sterk) demping ; $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

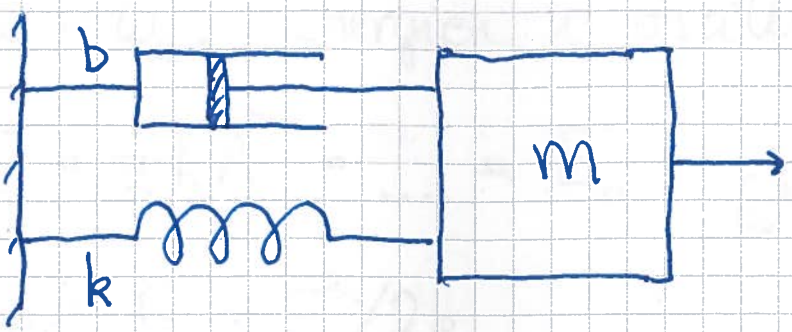
$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \quad , \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$ $\quad (\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma)$

$$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\gamma t}$$

Minste demping som ikke gir svingninger ; bra f.eks. i støtdempere.

Tvungen svingning; resonans [YF 14.8; LL 9.9]



$F = F_0 \cos \omega t$
$= $ ytre harmonisk kraft

N2: $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$\rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \qquad \left(\begin{array}{l} \gamma = b/2m \\ \omega_0 = \sqrt{k/m} \end{array} \right)$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

der "homogen" løsning x_h oppfyller

$$\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

slik at $x_h \sim \exp(-\gamma t) \to 0$ når $t \gg 1/\gamma$. Dvs, $x_h(t)$ er kun viktig for innsvingningsforløpet.

Antar nå at $t \gg 1/\gamma$, slik at

$$x(t) = x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

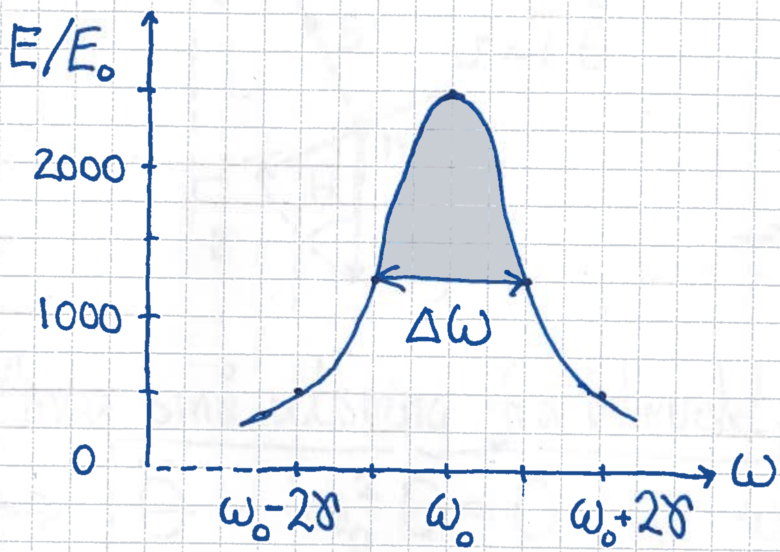
Innsetting av x_p, $\dot{x}_p$ og $\ddot{x}_p$ i N2 gir

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}} \quad ; \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

Resonans: A blir stor hvis $\gamma \ll \omega_0$ og $\omega \approx \omega_0$. Energien i oscillatoren:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \dots = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

med $E_0 = F_0^2/2k$.



Eks: $\omega_0 = 100\,\gamma$

ω	E/E_0
ω_0	2500
$\omega_0 \pm \gamma$	1250
$\omega_0 \pm 2\gamma$	500

Resonanskurvens halvverdibredde: $\Delta\omega \approx 2\gamma$

Oscillatorens Q-faktor: $Q \equiv \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \dfrac{\omega_0}{2\gamma}$

<u>Smal</u> resonanskurve $\Rightarrow$ <u>Høy</u> Q-faktor

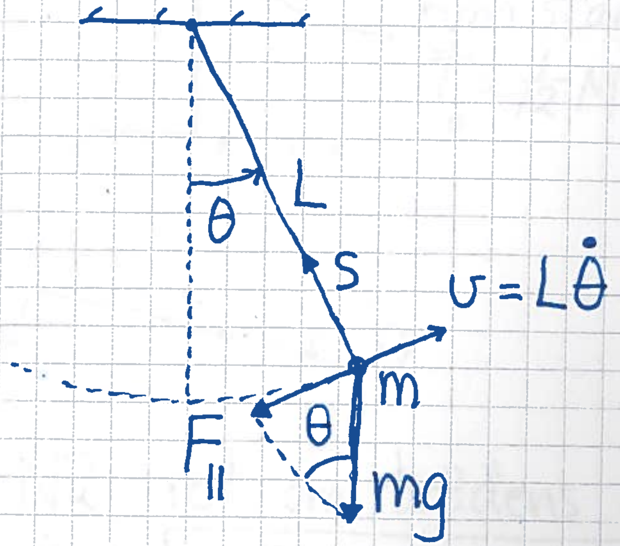
Demo: $T_0 \approx 0.65\,\text{s}$, $f_0 \approx 1.55\,\text{Hz}$, $\Delta f \approx 0.15\,\text{Hz}$

$\Rightarrow Q \approx 10$

Pendler

Matematisk pendel [YF 14.5 ; LL 9.6]

Punktmasse m i masseløs snor med lengde L.



$$F_{\parallel} = m a_{\parallel} \quad \text{med}$$

$$F_{\parallel} = -mg\sin\theta,$$

$$a_{\parallel} = \dot{v} = L\ddot{\theta}$$

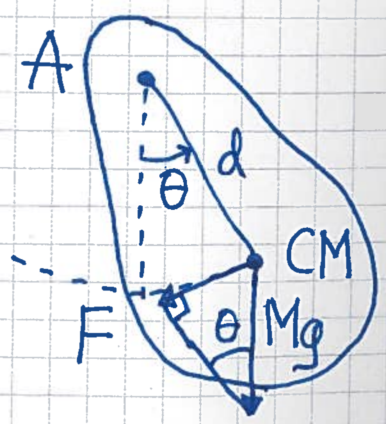
$$\Rightarrow \; -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

Anta små utsving fra likevekt, $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = g/L}$$

Fysisk pendel [YF 14.6 ; LL 9.6]

Stivt legeme, masse M, treghetsmoment I mhp A.



N2, rotasjon om A:

$$\tau = I\ddot{\theta} \quad \text{med}$$

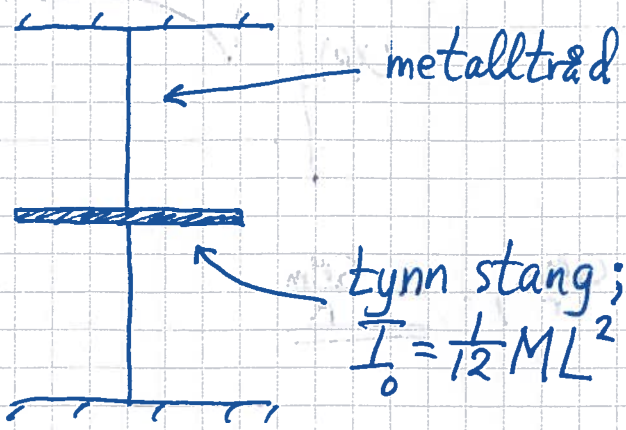
$$\tau = -F\cdot d = -Mgd\sin\theta$$

($\tau > 0$ mot klokka)

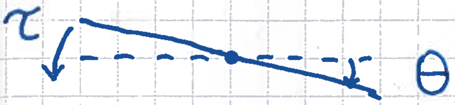
Anta $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \; ; \; \omega_0^2 = Mgd/I}$

($\Rightarrow \sin\theta = \theta$)

Torsjonspendel [YF 14.4 ; LL 9.6]



Vridning vinkel θ av metalltråden gir dreiemoment $\tau = -\kappa\theta$ på stanga ; κ = torsjonsstivheten til metalltråden



N2, rot. om trådens akse : $\tau = I_0 \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \ ; \ \omega_0^2 = \kappa / I_0}$$

Demo : $M = 50\,g$, $L = 11\,cm$, $T = 0.8\,s$

$$\Rightarrow \kappa = I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot (2\pi/T)^2$$

$$= ML^2 \pi^2 / 3T^2 \approx \underline{0.003\ Nm}$$