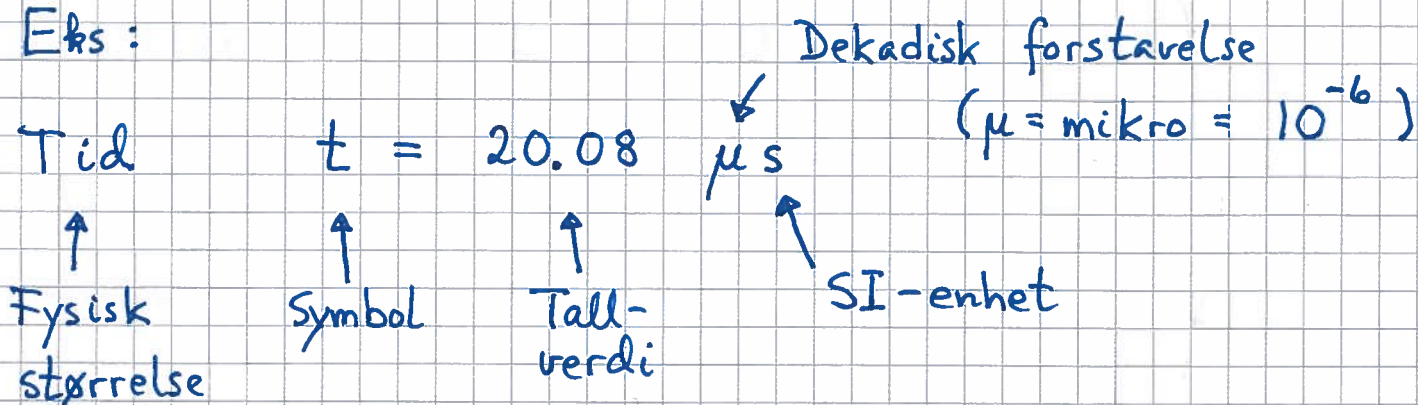


# Størrelser og enheter [OS1-1; YF1]

①

Eks:



Notasjon:  $[t] = \text{s}$

"SI-enhet for tid er sekund"

Grunnenheter i SI-systemet:

Lengde	$[x] = \text{m}$	} mekanikk
Masse	$[m] = \text{kg}$	
Tid	$[t] = \text{s}$	
Strømstyrke	$[I] = \text{A}$	} elmag
Temperatur	$[T] = \text{K}$	} termisk fysikk
Stoffmengde	$[n] = \text{mol}$	
Lysstyrke	$[I] = \text{cd}$	

(Fra 20.05.2019 er alle disse definert med utgangspunkt i eksakte tallverdier for ulike naturkonstanter, se SI-base-unit på wikipedia.)

(2)

Sammensatte enheter :

Hastighet  $[v] = m/s$

Akselerasjon  $[a] = m/s^2$  osu,

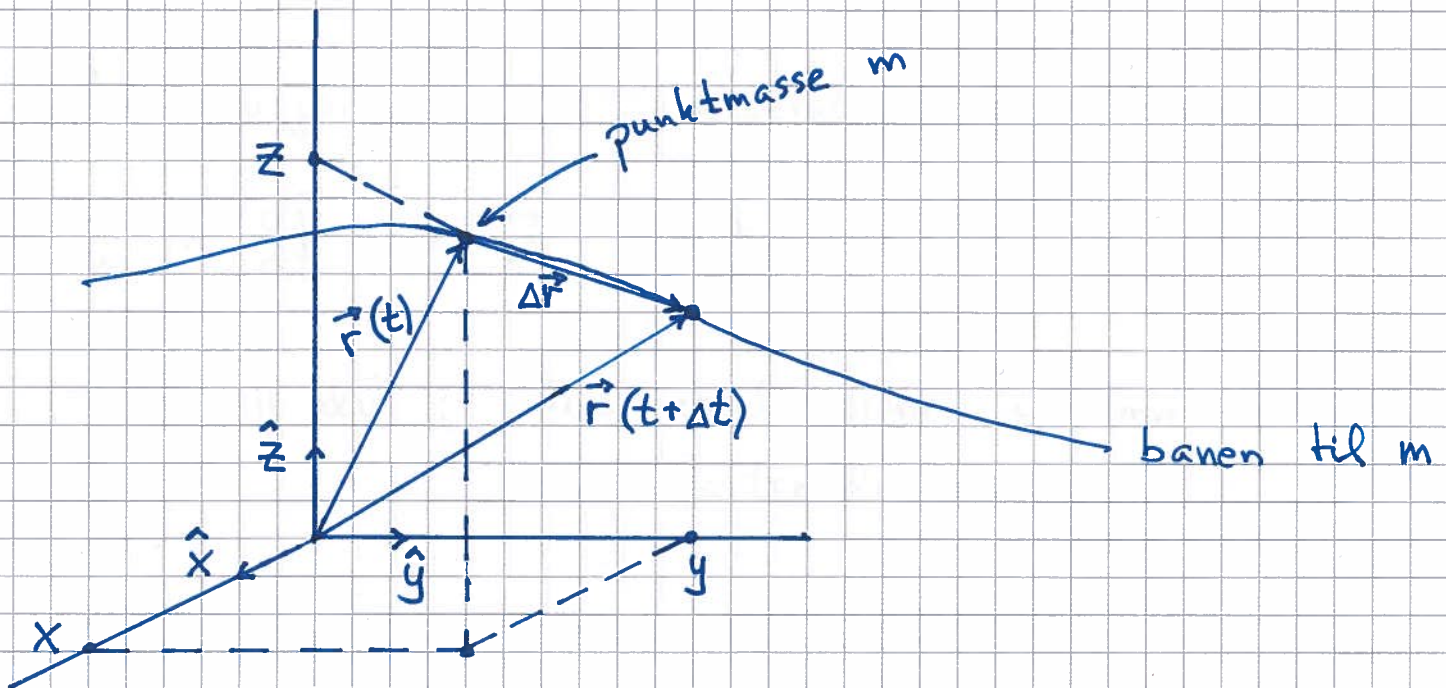
Avledete enheter :

Kraft  $[F] = kg \cdot m/s^2 = N$

Energi  $[W] = N \cdot m = J$  osu,

# MEKANIKK [OS1 1-12, 15; YF 1-11, 14; LL 1-6, 9<sup>(7)</sup>]

## Kinematikk [OS1 3, 4; YF 2, 3; LL 1]



$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{x} + y(t) \hat{y} + z(t) \hat{z}$$

= posisjonen til m ved tid t



③

Enhetsvektorer :  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dvs dimensjonsløse})$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1 ; \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

Forflytning i løpet av  $\Delta t$ :

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet  $\stackrel{\text{def}}{=}$  forflytning pr tidsenhet

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow \vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$  ; dvs  $\vec{v}$  er tangent til banen

Akselerasjon  $\stackrel{\text{def}}{=}$  hastighetsendring pr tidsenhet

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow \vec{a} \parallel d\vec{v}$  ; dvs akselerasjonen i samme retning som fartsendringen

Vektorrelasjoner gjelder komponentvis :

$$\vec{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} ; \quad v_x = dx/dt = \dot{x} \quad \text{osv.}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} ; \quad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad \text{osv.}$$

Integrasjon av  $\vec{v}$  gir  $\vec{r}$  :

(4)

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t) dt$$

Integrasjon av  $\vec{a}$  gir  $\vec{v}$  :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt$$

$\Rightarrow$  .... som ovenfor ...

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t) dt$$

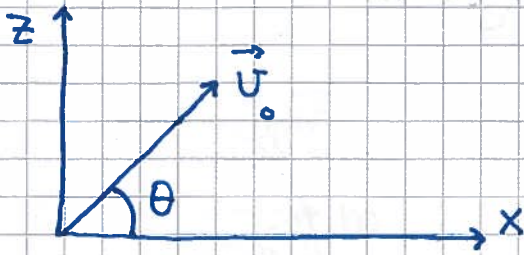
Hvis  $\vec{a}$  er konstant :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

der  $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$  , ~~der~~  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$



Eks : Skrått kast ;  $a = g =$  tyngdens akselerasjon



$$\vec{a} = -g \hat{z}$$

$$\vec{r}(0) = 0, \quad \vec{v}(0) = \vec{u}_0$$

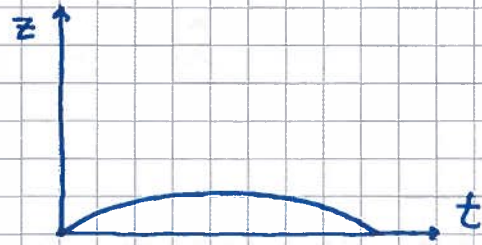
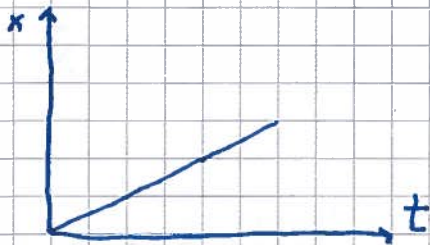
Finn  $\vec{r}(t)$  og banen  $z(x)$

Løsning:

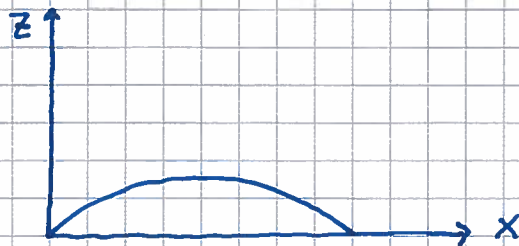
$$\vec{v}(t) = \vec{u}_0 + \vec{a}t = \vec{u}_0 - gt \hat{z}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{u}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = \vec{u}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \hat{z}$$

$$\Rightarrow x(t) = u_0 t \cos \theta, \quad z(t) = u_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$



Banen :  $t = \frac{x}{u_0 \cos \theta} \Rightarrow z(x) = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 u_0^2 \cos^2 \theta}$

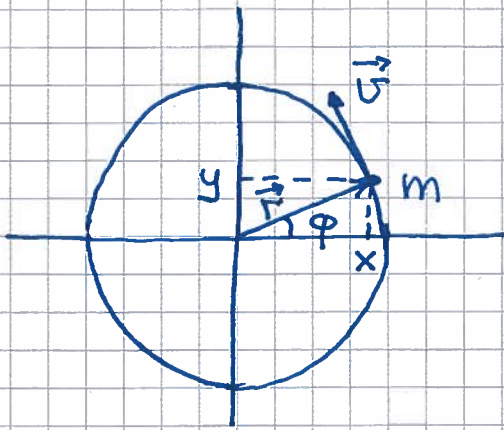


Parabel

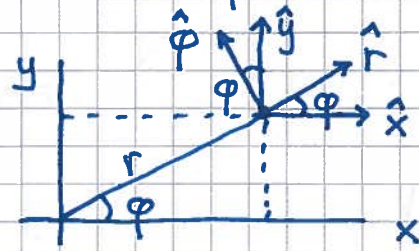
# Sirkelbevegelse

[OS1 4.4; YF 3.4; LL 1.7, 1.8]

(6)



⇒ Lurt med polarkoordinater:



$r$  = avstand fra origo

$\varphi$  = vinkel mellom  $\hat{x}$  og  $\hat{r}$   
(positiv mot klokka)

Ser fra figuren:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x}r \cos \varphi + \hat{y}r \sin \varphi = r \hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi, \quad \hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

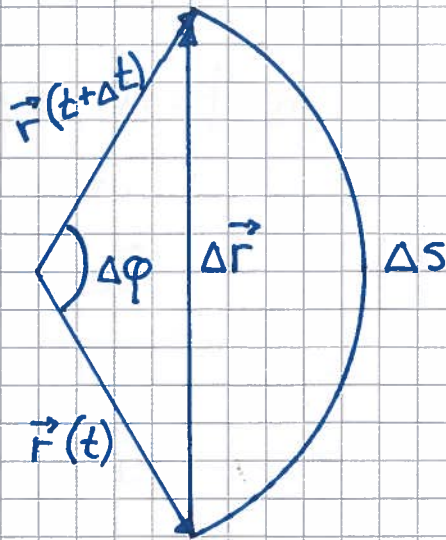
Vinkelhastighet  $\stackrel{\text{def}}{=}$  omløpt vinkel pr tidsenhet

$$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi}; \quad [\omega] = 1/s$$

Vinkel  $\stackrel{\text{def}}{=}$  buelengde / radius

$$\Delta\varphi = \Delta s/r; \quad [\varphi] = 1 \quad (\text{evt. rad})$$





Når  $\Delta t \rightarrow 0$ , blir  $\Delta\varphi$  liten og  $\Delta r \approx \Delta s = r \Delta\varphi$

$$\Rightarrow v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta\varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = r\omega$$

Retning: Ser at  $\Delta \vec{r} \perp \vec{r}$  når  $\Delta\varphi \rightarrow 0$

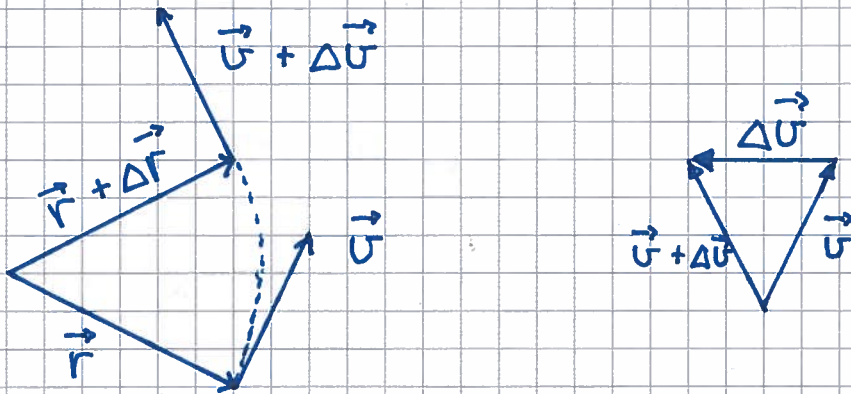
Vet fra før at  $\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$

Dermed:  $\vec{v} \perp \vec{r}$ , dvs  $\vec{v} \parallel \hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = v \hat{\varphi} = r\omega \hat{\varphi}}$$

## Akselerasjon:

Vi antar først uniform sirkelbevegelse, dvs konstant  $\omega$ .



Vi ser at  $\Delta \vec{v}$ , og dermed  $\vec{a}$ , har retning inn mot sirkelens sentrum.

Antar  $\varphi(0) = 0$  og regner ut  $\vec{a}_\perp$ :

$$\omega = d\varphi/dt \Rightarrow \int_0^\varphi d\varphi = \omega \int_0^t dt \Rightarrow \varphi(t) = \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \hat{x} r \cos \omega t + \hat{y} r \sin \omega t$$

$$\vec{v}(t) = -\hat{x} \omega r \sin \omega t + \hat{y} \omega r \cos \omega t \quad (= \omega r \hat{\varphi})$$

$$\vec{a}_\perp(t) = -\hat{x} \omega^2 r \cos \omega t - \hat{y} \omega^2 r \sin \omega t$$

$$= -\omega^2 \vec{r}(t)$$

$$= -\omega^2 r \hat{r}(t)$$

$$= \underline{\text{sentripetalakselerasjonen}}$$



(9)

Hvis  $v$  og  $\omega$  endres, har vi

baneakselerasjon,

$$a_{\parallel} = \dot{v} = r \dot{\omega}$$

og inkelakselerasjon,

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\phi} \quad ; \quad [\alpha] = 1/s^2$$

Total akselerasjon ved sirkelbevegelse:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel} = -\omega^2 r \hat{r} + \dot{\omega} r \hat{\phi}$$

$$\text{evt. } \vec{a}_{\perp} = -\frac{v^2}{r} \hat{r} \quad (\text{siden } \omega = v/r)$$

Periode = tid pr omløp:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad [T] = s$$

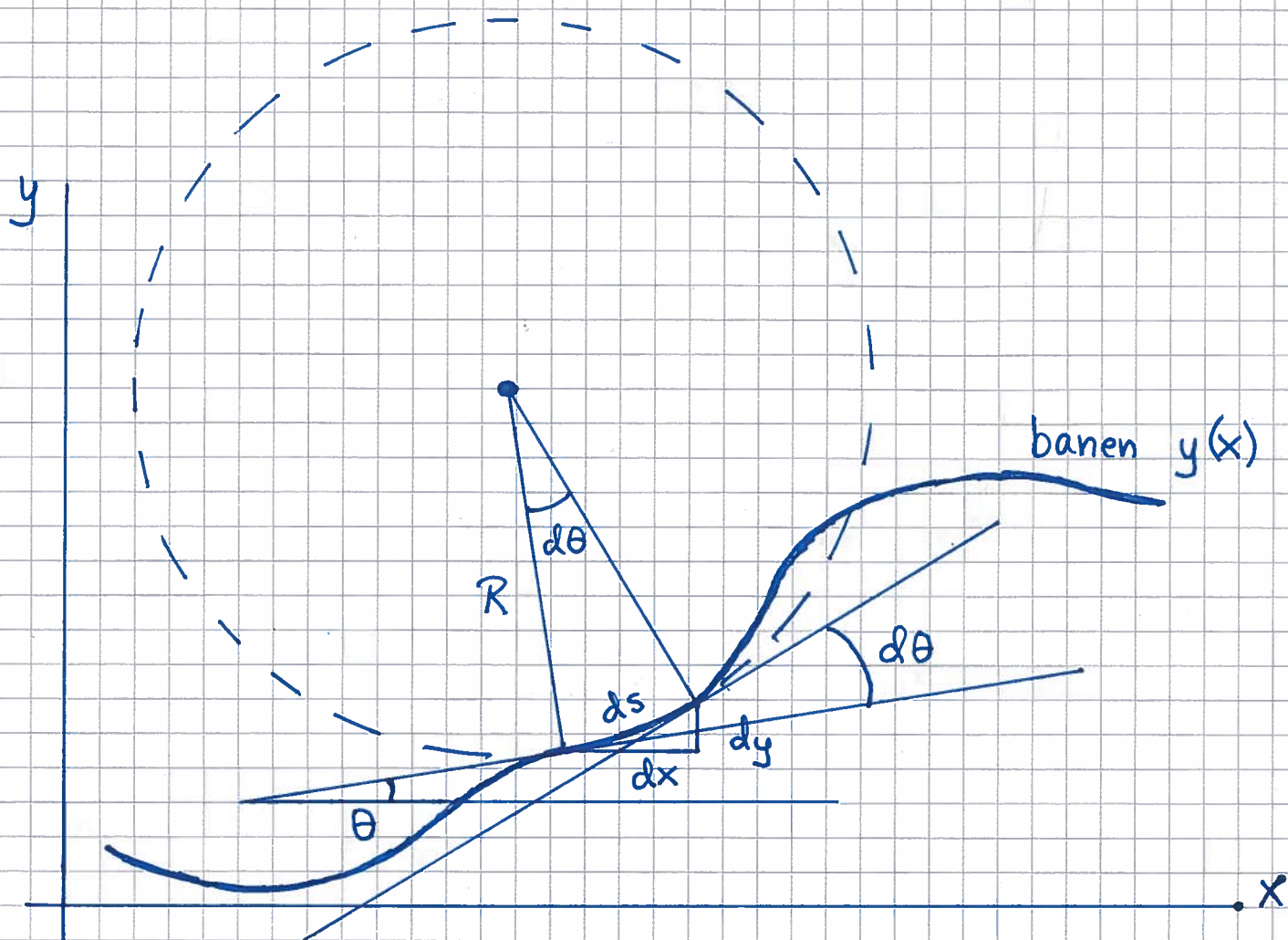
Frekvens = antall omløp pr tidsenhet:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad ; \quad [f] = \frac{1}{s} = \text{Hz} \\ (\text{hertz})$$

# Krumlinjet beregelse

(Lab!)

10



Langs banen er  $a_{\perp} = v^2/R$ , der krumningsradien  $R$  er radien i sirkelen som best tangerer banen. Vi skal vise at

$$\frac{1}{R} = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$$

der  $y' = dy/dx$  og  $y'' = d^2y/dx^2$



Def. av vinkel:  $d\theta = \frac{ds}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}$  (11)

Pythagoras:  $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$$\Rightarrow ds = dx \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$$

Kjerneregul:  $\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d\theta}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}$

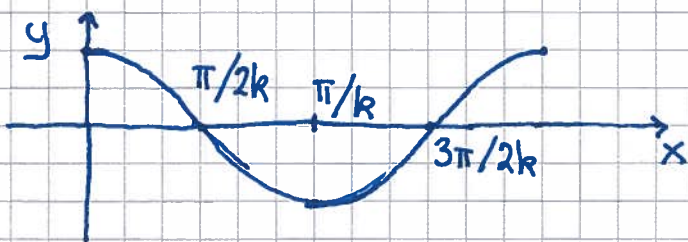
Fra figur:  $\tan \theta = \frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{banens helningsvinkel}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{1 + (y')^2} \cdot y''$$

Dermed:  $\frac{1}{R} = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}}$  (der vi velger R som positiv)

Eks:  $y(x) = A \cdot \cos kx$



$$y' = -kA \sin kx$$

$$y'' = -k^2A \cos kx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{|k^2A \cos kx|}{[1 + k^2A^2 \sin^2 kx]^{3/2}}$$

Topp- og bunnpunkter:  $\cos kx = \pm 1, \sin kx = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} = k^2A$

Vendepunkter:  $\cos kx = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} = 0 \quad (R \rightarrow \infty) \Rightarrow a_{\perp} = 0$

# Newtons lover [OS1 5,6 ; YF 4,5 ; LL 2,3]

(12)

$m$ ,  $\vec{v}$  og  $\vec{a}$  er hhv legemets masse, hastighet og akselerasjon

$\vec{F}$  = netto ytre kraft på legemet

N1 :  $\vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}$

N2 :  $\vec{F} = m\vec{a}$

N3 :  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

dvs krefter er vekselvirkning mellom legemer.

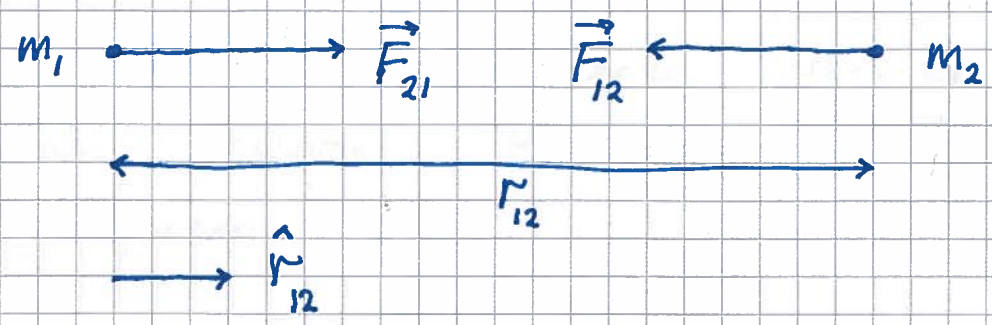
Når A påvirker B med  $\vec{F}_{AB}$ , påvirker B A med  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

$$[F] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N} \quad (\text{newton})$$



# Fundamentale krefter [YF 5.5; LL 2.1; OS1 13.1; OS2 5.3]

- Gravitasjon. Svak tiltrekning mellom masser.

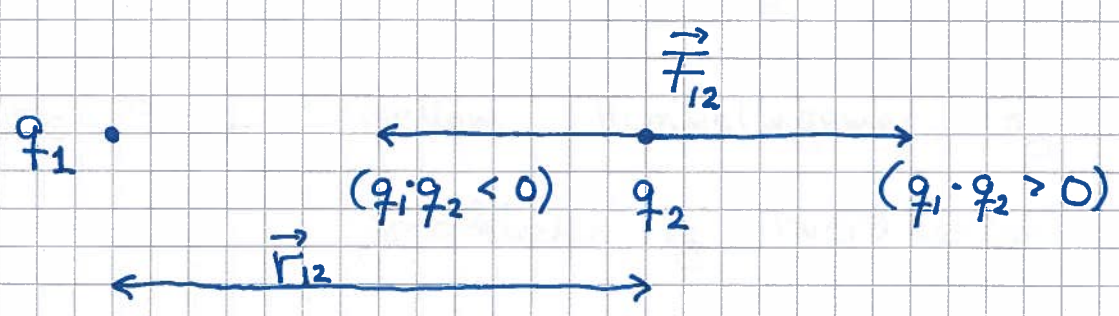


Newton's gravitasjonslov:

$$\vec{F}_{21} = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Gravitasjonskonstanten:  $G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$

- Elektromagnetisk vekselvirkning. Tiltrekning og frastøtning mellom ladninger.



Coulombs lov:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$[q] = C \text{ (coulomb)} ; 1 C = 1 As$$

(14)

$$\text{Vakuumpermittiviteten: } \epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

- Kjernekrefter. Svake og sterke. Svært kort rekkevidde. Relevans: Radioaktivitet. Stabilitet av atomkjerner.

Vår hverdag styres av gravitasjon ( $F_G$ ) og coulombkrefter ( $F_E$ ).

$$\text{Proton: } m_p \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, q = e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{Elektron: } m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}, q = -e$$

Dermed:

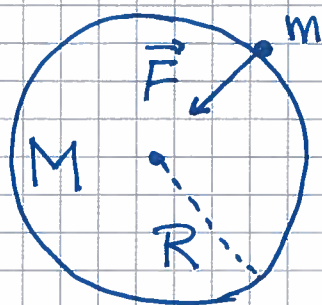
$$F_E \gg F_G \text{ mellom atomer og hverdagslige objekter}$$

$$F_G \gg F_E \text{ mellom himmellegemer, og mellom jordkloden og hverdagslige objekter}$$



Tyngde [os1 13.2 ; YF 4.4 ; LL 2.5]

(15)



Tyngden av  $m$  =  
Gravitasjonskraften på  $m$  fra  $M$

$$F = G M m / R^2$$

Jorda :  $M \approx 6 \cdot 10^{24}$  kg ,  $R \approx 6370$  km

$$\Rightarrow g = GM/R^2 \approx 9.81 \text{ m/s}^2$$

= tyngdens akselerasjon på/nær jordas overflate

Fritt fall dersom tyngden  $mg$  er  
eneste kraft på  $m$ . N2 gir da

$$mg = ma$$

dvs

$$\underline{a = g}$$

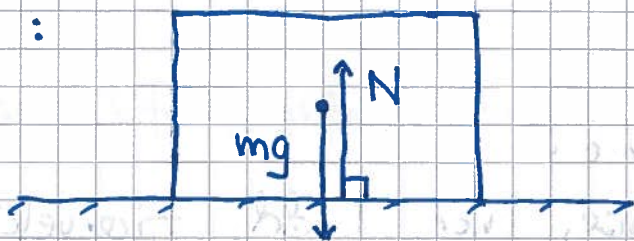
# Kontaktkrefter

(14,3)  
[OS1 5.6, 6.2, 6.4 ; YF 4.1, 5.3;  
LL 3, 8]

(16)

Normalkraft :  $N$  = normalkomponenten av  
frastøtende coulombkraft mellom to legemer i kontakt

Eks :



Hvis klossen ligger i ro :

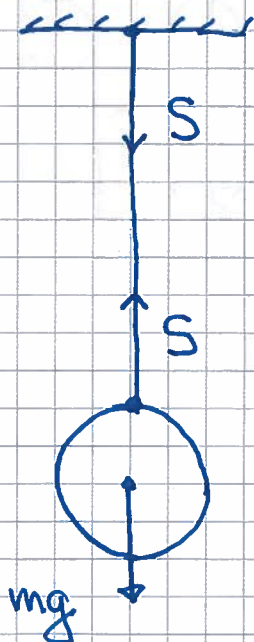
$$N = mg \quad (N1)$$

Snorkraft (strekk, "tension") :

$S$  = netto tiltrekkende coulombkraft mellom snora  
og legemet som er festet til snora ;

$\vec{S}$  i snoras retning

Eks :



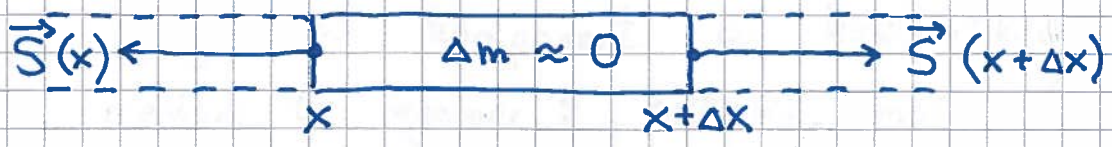
Hvis kula henger i ro :

$$S = mg \quad (N1)$$

[Hva er "motkraftene"  
til  $N$ ,  $S$  og  $mg$  ?]



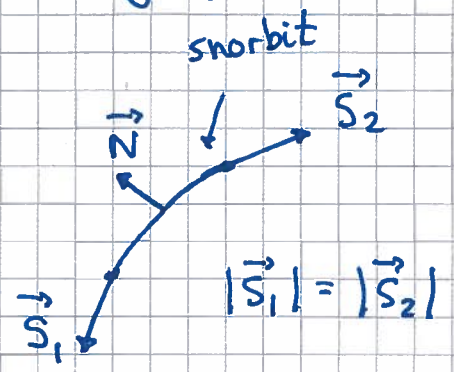
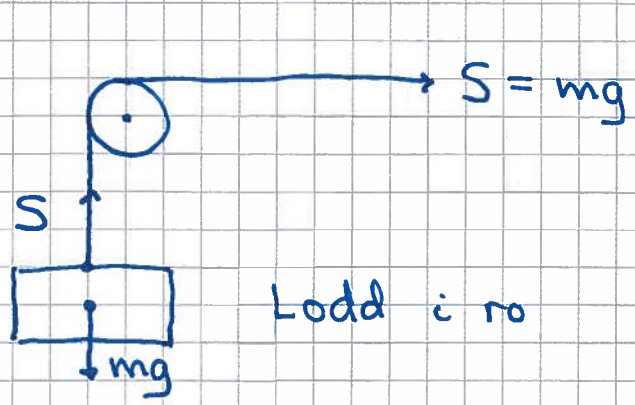
Let, stram snor blir rett, og med konstant  $S$ :



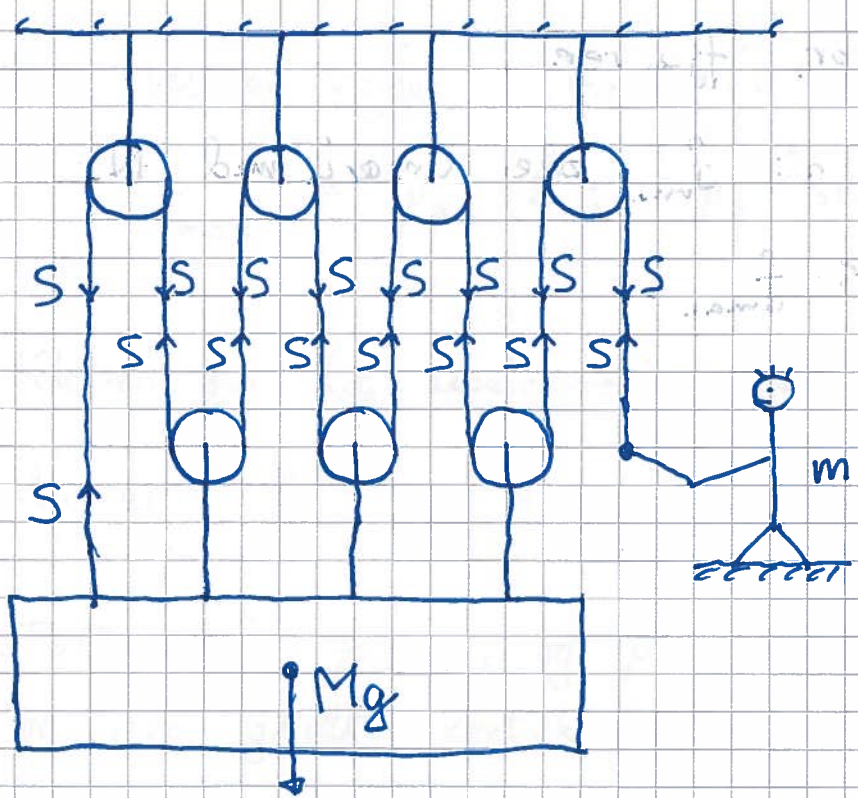
$$N1, N2 \Rightarrow \vec{S}(x) + \vec{S}(x+\Delta x) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x) \Rightarrow S = \text{konst.}$$

Trinse (friksjonsfri) endrer (kun) retning på  $\vec{S}$ :



Talje:



N1 for kassa:

$$7S - Mg = 0$$

⇓

$$S = \frac{1}{7} Mg$$

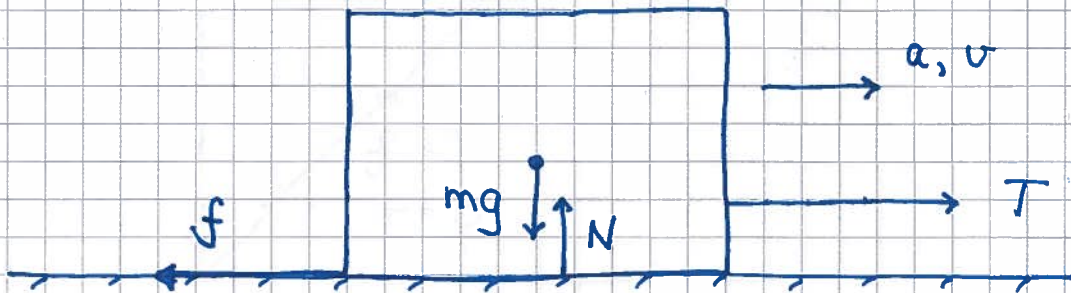
$$(S_{\text{max}} = mg)$$

# Friksjonskrefter [OS1 6.2; YF 5.3; LL 3.1]

18

$f$  = tangentiell komponent av kontaktkraft mellom to legemer; retning mot ("ønsket") relativ bevegelse

Tørr friksjon:



$T$  = trekk-kraft,  $f$  = friksjonskraft

$$NR: \quad T - f = ma$$

Hvis klossen ligger i ro ( $a=0$ ):  $f = T$ ;

$$f_{\max} = \mu_s \cdot N; \quad \mu_s = \text{statisk friksjonskoeffisient}$$

Klossen glir (og akselererer) hvis  $T > f_{\max}$ ;

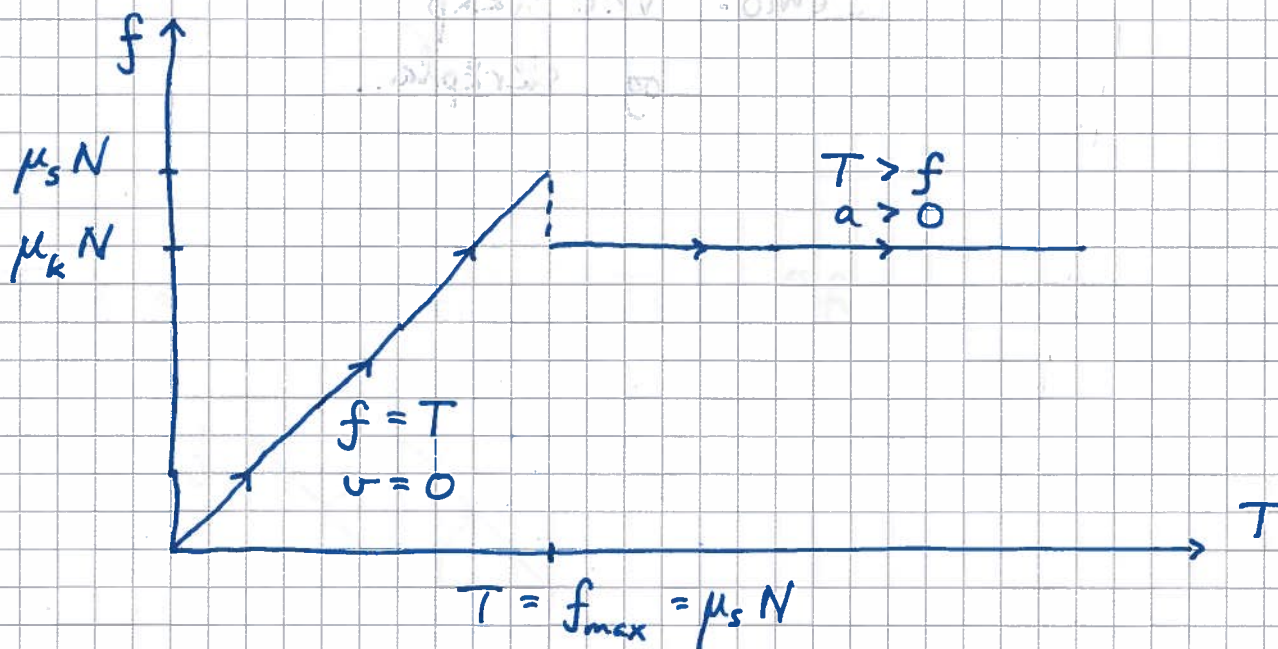
da er  $f = \mu_k \cdot N$ ;  $\mu_k$  = kinetisk friksjonskoeffisient

Tallverdier for  $\mu_s$  og  $\mu_k$  avhenger av type materialer og hvor glatte kontaktflatene er.



Vankignis er  $\mu_s > \mu_k$  : Ujæmheter i overflatene gir best grep når  $v = 0$ .

Grafisk :



Et par tallverdier :

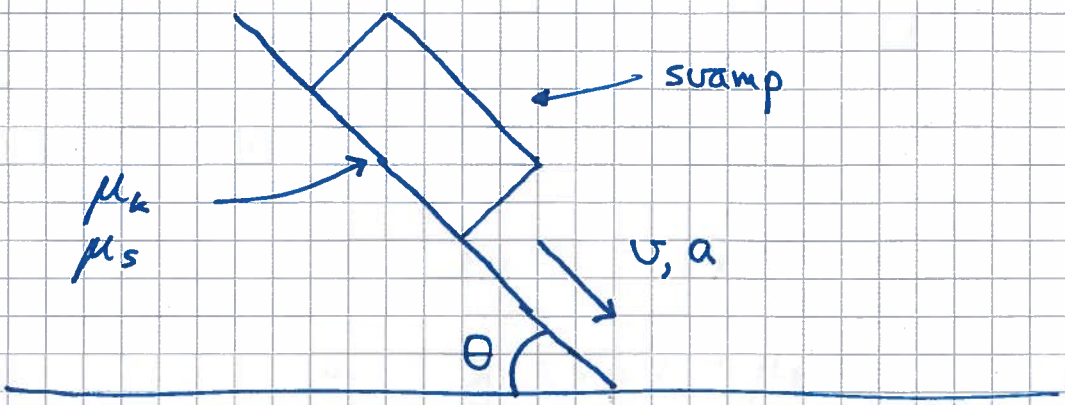
Stål mot is :  $\mu_s \approx 0.03$

Gummi mot plast :  $\mu_s \approx 1$  (Lab)

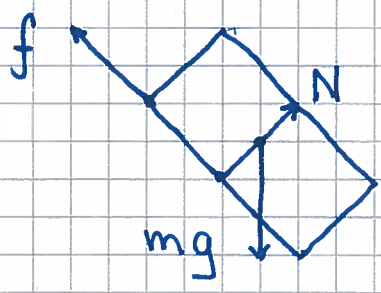
Våt svamp mot bordplate :  $\mu_s > 1$

(se eks. neste side)

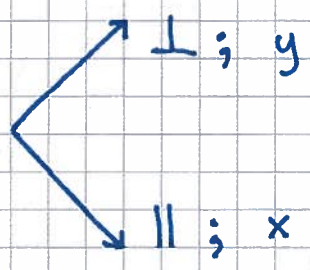
# Problemløsningsstrategi via et eksempel:



- Finn alle ytre krefter. Tegn "fritt-legeme-diagram".



- Velg koordinatsystem. Dekomponer.



$$N = N_y, \quad N_x = 0$$

$$f = f_x, \quad f_y = 0$$

$$G_x = mg \sin \theta, \quad G_y = mg \cos \theta$$

- Bruk N1,  $\sum_i \vec{F}_i = 0$ , eller N2,  $\vec{a} = \frac{\sum_i \vec{F}_i}{m}$ , og løs resulterende ligninger.

Her: N1 i y-retn.  $\Rightarrow N = mg \cos \theta$

N2 i x-retn.  $\Rightarrow mg \sin \theta - f = ma$



Hvis svæmp i ro:  $f = mg \sin \theta$  ( $a=0$ )

Glir dersom  $mg \sin \theta > f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$ ,

dvs dersom  $\tan \theta > \mu_s$ .

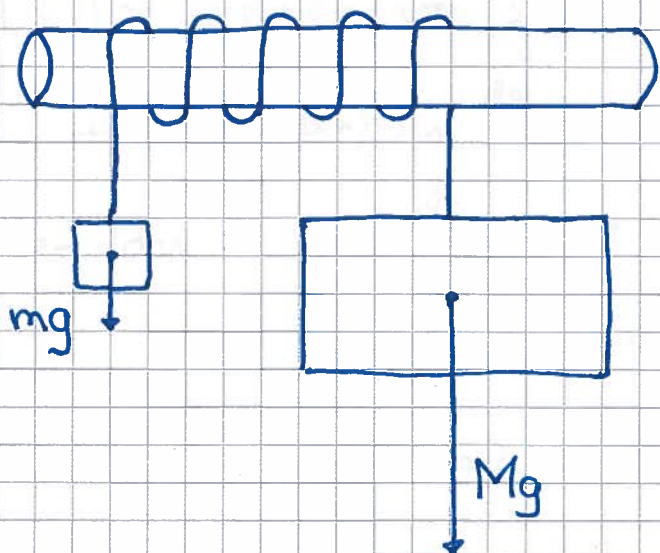
Da er  $f = \mu_k N = \mu_k mg \cos \theta$ , dvs

$$a = g (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

Exp. med våt svæmp gir max  $\theta$  med svæmp i ro,

og dermed  $\mu_s = \tan \theta_{\max}$ .

Eks: Snorfiksjon ["Med livet som innsats"]

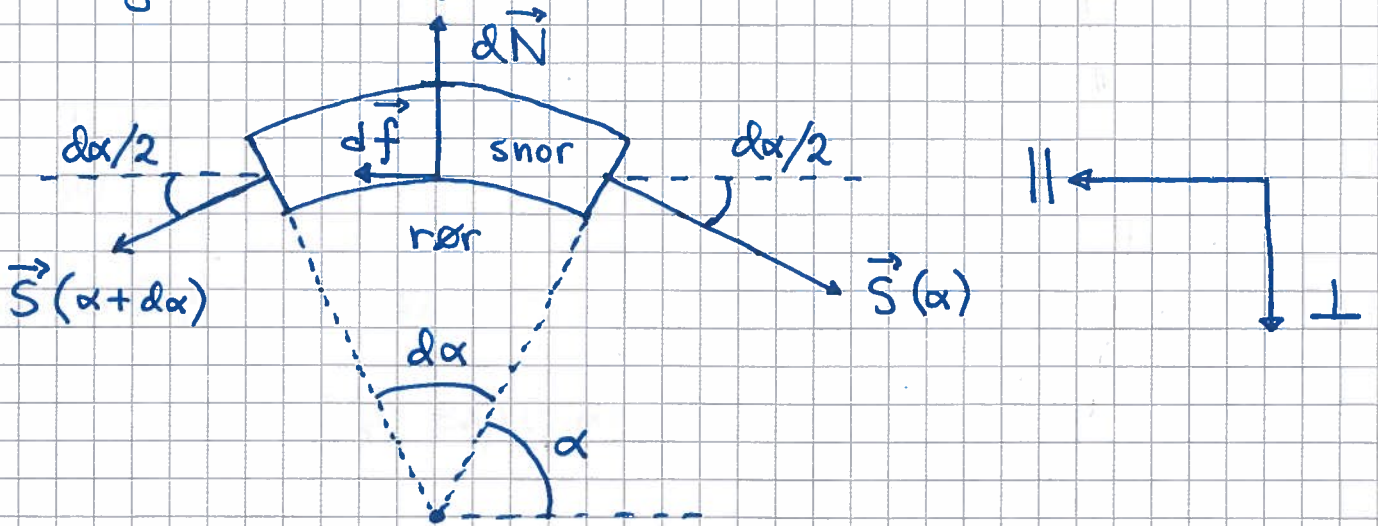


$\mu =$  statisk friksjonskoeff.  
mellom rør og snor

Finn minste  $m$  som holder  $M$  oppe for gitt  
kontaktvinkel  $\varphi$  mellom rør og snor.

(I figuren:  $\varphi = 9\pi$ )

Løsning : N1 for bitteliten snorbit



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \underbrace{\vec{S}(\alpha+dx) + \vec{S}(\alpha)}_{\text{snordrag (fra resten av snora)}} + \underbrace{d\vec{N} + d\vec{f}}_{\text{normalkraft og friksjonskraft (fra røret)}} = 0$$

Minimal m når df er maksimal :  $df = df_{\text{max}} = \mu \cdot dN$

$$N1, || : S(\alpha+dx) \cos \frac{dx}{2} - S(\alpha) \cos \frac{dx}{2} + \mu dN = 0$$

$$N1, \perp : S(\alpha+dx) \sin \frac{dx}{2} + S(\alpha) \sin \frac{dx}{2} - dN = 0$$

$$\text{Liten } dx : \cos \frac{dx}{2} \approx 1, \quad \sin \frac{dx}{2} \approx \frac{dx}{2}$$

$$S(\alpha+dx) - S(\alpha) = dS$$

$$S(\alpha+dx) + S(\alpha) = 2S$$

$$\text{Dermed : } dS = -\mu dN ; \quad 2S \cdot \frac{dx}{2} = dN$$

$$\Rightarrow dS/S = -\mu dx$$

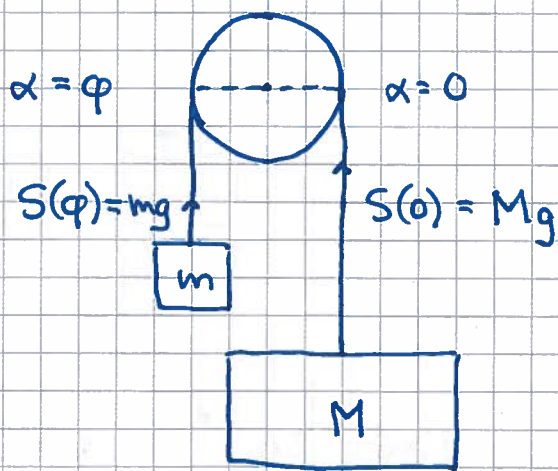


Finner  $S(\varphi)$  ved å integrere, fra  $\alpha=0$  til  $\alpha=\varphi$ :

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = -\mu \int_0^{\varphi} d\alpha$$

$$\Rightarrow \ln S(\varphi) - \ln S(0) = -\mu\varphi$$

$$\Rightarrow S(\varphi) = S(0) \exp(-\mu\varphi)$$



Hvis  $\mu \approx 0.17$ ,  $M = 1 \text{ kg}$  og  $\varphi = 9\pi$ , blir

$$m = 1000\text{g} \cdot \exp(-0.17 \cdot 9\pi) \approx 8\text{g}$$

Omvendt: Påkrevd  $m$  for å heise  $M$  oppover er

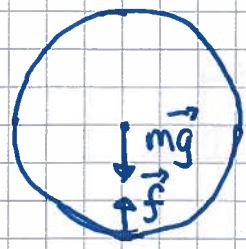
bestemt av  $S(\varphi) = S(0) \exp(+\mu\varphi)$ , dvs

$$m = 1\text{kg} \cdot \exp(+0.17 \cdot 9\pi) \approx 122\text{kg}$$

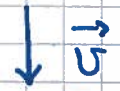
# Friksjon i fluider [OS1 6.4, 14.7; YF 5.3; LL 8]

Ser på symmetriske legemer med hastighet  $\vec{v}$  relativt omgivende fluid (gass eller væske) med massetetthet  $\rho$  og dynamisk viskositet  $\mu$

Eks: Ball i luft

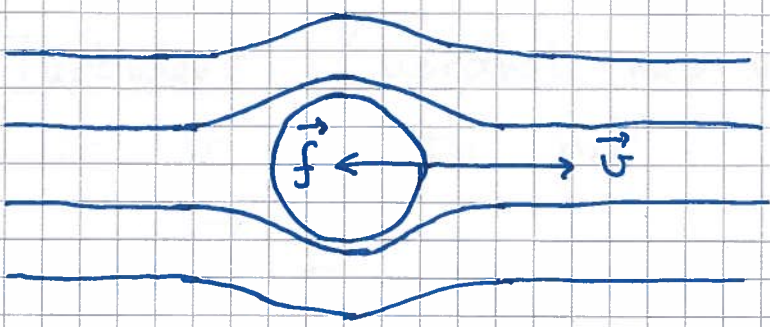


$\vec{f}$  = luftmotstand



areal  $\pi r^2$  på tvers av  $\vec{v}$

Laminær (pen, lagdelt) strømning av fluidet når  $v$  er liten nok :

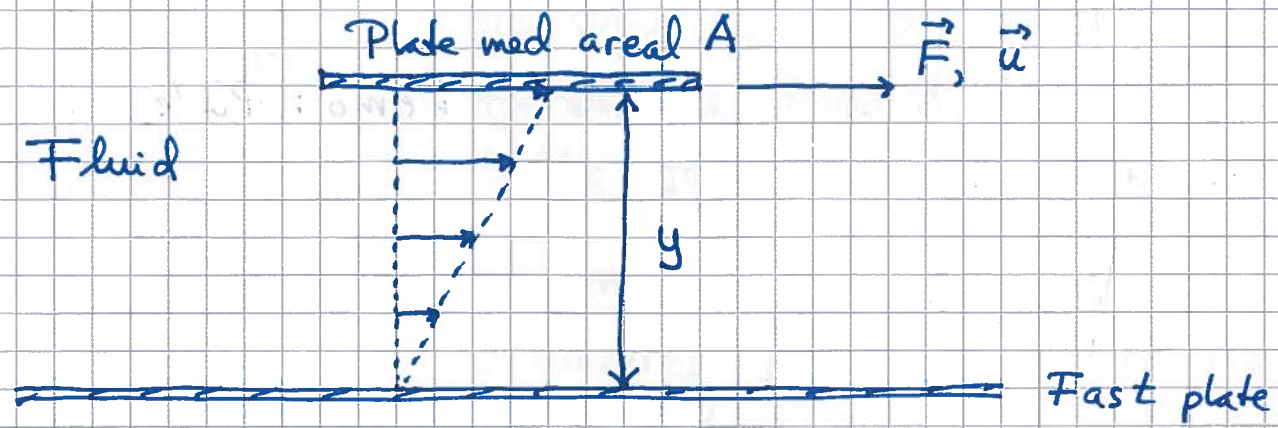


$$\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$$

Kule, radius  $r$  :  $k = 6\pi \mu r$  (Stokes' lov)



Dynamisk viskositet  $\mu$  ; definisjon og måling:



Liten fart  $u$  på fri plate gir lineær fartsprofil i fluidet mellom platene.

Empirisk (dvs: eksperimentelt) finner man

$$F = \mu \cdot \frac{A \cdot u}{y}$$

der  $\mu$  kalles fluidets dynamiske viskositet ;  $[\mu] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}}$

Tallverdier  $\nu / 20^\circ\text{C}$ :

Fluid	Luft	Vann	Glyserol	Sirup
$\mu$	$2 \cdot 10^{-5}$	$10^{-3}$	1	$10^2$

Turbulent (uordnet, med virvler) strømning når  $v$  er stor nok :

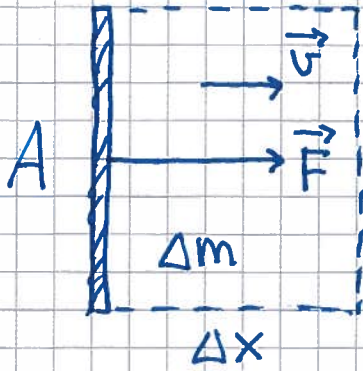
$$\vec{f} = - \left( \frac{1}{2} \rho A C_d \right) v^2 \hat{v}$$

$C_d$  = drag-koeffisient (Kule:  $C_d \approx 0.5$ )

$A$  = legemets areal på tvers av  $\vec{v}$

Eks 1:  $C_d$  for plate

(26)



Må skyve plata med kraft  $F$  for å opprettholde konstant fart  $v$ , fordi lufta foran må settes i bevegelse.

Massen  $\Delta m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot A \cdot \Delta x$   
akselereres fra 0 til  $v$  på tiden  
 $\Delta t = \Delta x / v$ .

N2 gir da:  $F = \Delta m \cdot \frac{v}{\Delta t} = \rho A \Delta x \cdot \frac{v}{\Delta t} = \rho A v^2$ , som  
stemmer med  $\frac{1}{2} \rho A C_d v^2$  dersom  $C_d = 2$

Eks 2: Bilen Revolve har  $A \approx 1.1 \text{ m}^2$  og  $C_d \approx 1.35$ .  
Hva er luftmotstanden ved 100 km/h?

Løsning:

$$f = \frac{1}{2} \rho A C_d v^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 1.2 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 1.1 \text{ m}^2 \cdot 1.35 \cdot \left(\frac{100}{3.6}\right)^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$
$$\approx \underline{\underline{690 \text{ N}}}$$

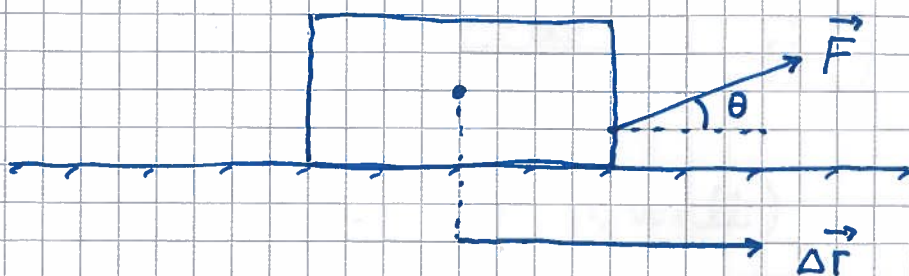
(Luft har  $\rho \approx 1.2 \text{ kg/m}^3$ )



# Arbeid og energi [OS1 7, 8 ; YF 6,7 ; LL 4]

(27)

## Arbeid [OS1 7.1 ; YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]



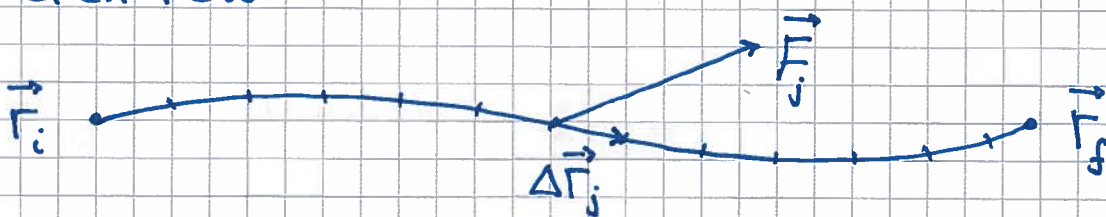
arbeid  $\stackrel{\text{def}}{=}$  kraft \* forflytning

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

= arbeid utført av  $\vec{F}$  på klossen når klossens forflytning er  $\Delta \vec{r}$

$$[W] = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J} \quad (\text{joule})$$

Generelt :



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \quad \xrightarrow{\Delta r_j \rightarrow 0} \int_{r_i}^{r_j} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av  $\vec{F}$  ved forflytningen fra  $\vec{r}_i$  til  $\vec{r}_j$

## Effekt [OS1 7.4 ; YF 6.4 ; LL 4.1]

(28)

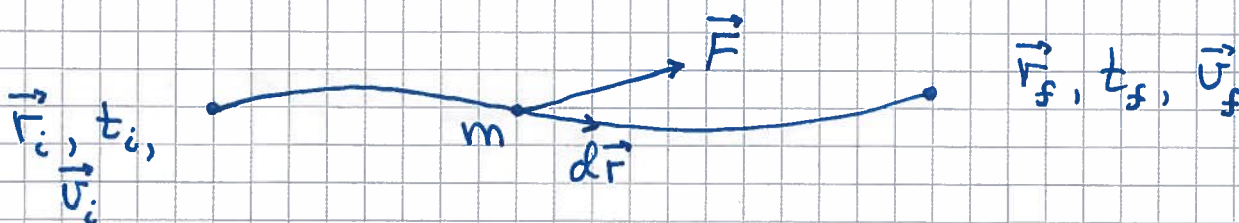
effekt  $\stackrel{\text{def}}{=}$  arbeid (eller energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = \text{J/s} = \text{W (watt)}$$

$$1 \text{ kWh} = 1000 \frac{\text{Wh}}{\text{s}} \cdot 3600 \text{ s} = 3.6 \text{ MJ}$$

## Kinetisk energi [OS1 7.2 ; YF 6.2 ; LL 4.2]



$$W = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_{v_i}^{v_f} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{v} \cdot d\vec{v} + d\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} d(v^2)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

$$K = \text{kinetisk energi} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2$$

$$\Rightarrow \boxed{W = \Delta K = K_f - K_i}$$

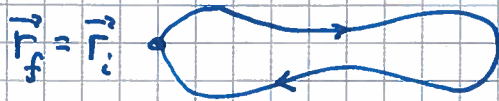
Arbeidet  $W$  utført på legemet tilsvarer endringen i legemets kin. energi,  $\Delta K$



## Konservative krefter [os1 8.2 ; YF 7.3 ; LL 4]

(29)

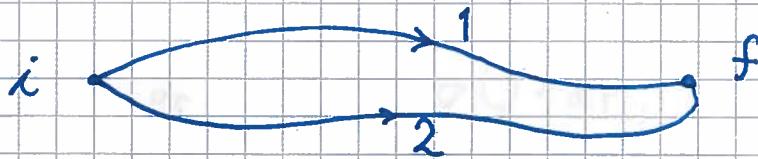
Anta at  $\vec{F}$  virker på legeme som returnerer til startposisjonen:



Hvis  $K_f = K_i$ , er  $W = \Delta K = 0$ , dvs

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Da er  $\vec{F}$  en konservativ kraft, og arbeidet  $W$  er uavhengig av veien:



$$\begin{aligned} 0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2 \\ &= W_1 - W_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{W_1 = W_2}$$

Konservative krefter: Tyngdekraft, coulombkraft

Friksjonskrefter er ikke konservative

## Potensiell energi [OS1 8.1-8.4; YF 7.1-7.4; LL4.3-4.4] (30)

Hvis  $\vec{F}$  er konservativ, defineres den potensielle energien slik:

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Her har vi valgt å sette  $U=0$  i  $\vec{r} = \vec{r}_0$ .

Dvs: Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning

For liten forflytning er altså  $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$ .

Generelt er  $dU = \nabla U \cdot d\vec{r}$ , med

$$\nabla U = \hat{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial U}{\partial z} = \text{gradienten til } U$$

$$d\vec{r} = \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz$$

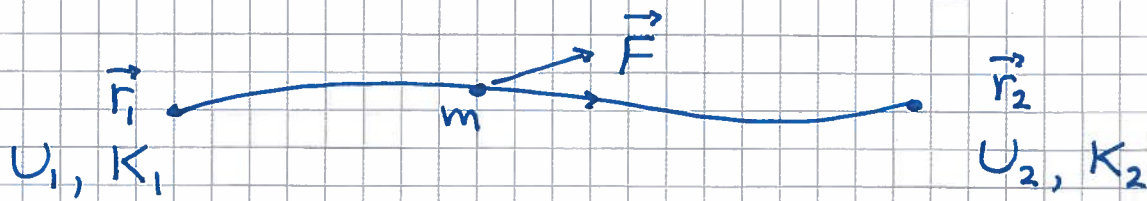
Sammenligning gir nå

$$\vec{F} = -\nabla U$$



## Bevaring av mekanisk energi

[OS1 8.3 ; YF 7.1-7.3 ; LL 4.5]



$$\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_2 - U_1 = - \int_0^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} - \left\{ - \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\} \\ &= \int_2^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W \end{aligned}$$

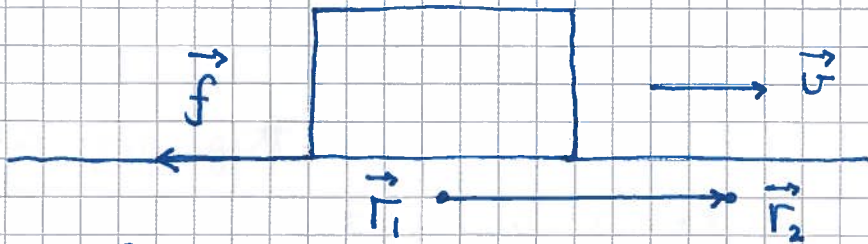
$$\Rightarrow K_2 - K_1 = U_1 - U_2$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Dus: Total mekanisk energi,

$$E = K + U$$

er bevarat i et konservativt system



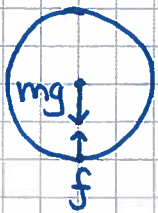
$$W_f = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{siden } \vec{f} \text{ alltid har retning mot } d\vec{r}$$

Mekanisk energi tapes ; omdannes til varme, lyd etc.

Siden  $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ , er  $\vec{f}$  ikke konservativ

Ved ren rulling er kontaktpunktet i ro, dvs statisk friksjon,  $d\vec{r} = 0 \Rightarrow W_f = 0$ , og mek. energi er bevart.

Ekse : Bordtennisball som faller



$m = 2.7 \text{ g}$   
 $r = 20 \text{ mm}$   
 $C_d = 0.5$

- Hva er max fart ?
- Anta max fart og bestem  $|W_f|$  når ballen har falt 20 m. ( $v_i = 0$ )

Løsning :

• Vi antar  $f = \frac{1}{2} \rho A C_d v_t^2$  når  $v = v_{\text{max}} = v_t =$  terminalhastigheten

N1  $\Rightarrow f = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{2mg / \rho A C_d} \approx \underline{8.4 \text{ m/s}}$  ( $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3 ; A = \pi r^2$ )

•  $E_i = U_i = mgh ; E_f = \frac{1}{2} m v_t^2$

$|W_f| = E_i - E_f = mgh - \frac{m^2 g}{\rho A C_d} = mg (h - m / \rho A C_d)$   
 $= \underline{0.43 \text{ J}}$ , som er 82% av opprinnelig mek. energi.

(Fritt fall 20 m  $\Rightarrow v_f = \sqrt{2gh} \approx 20 \text{ m/s}$ )



# Impuls [0s1 9 ; YF 8 ; LL 5]

(= bevægelsesmængde = linear momentum)

N2, for gitt masse  $m$ :

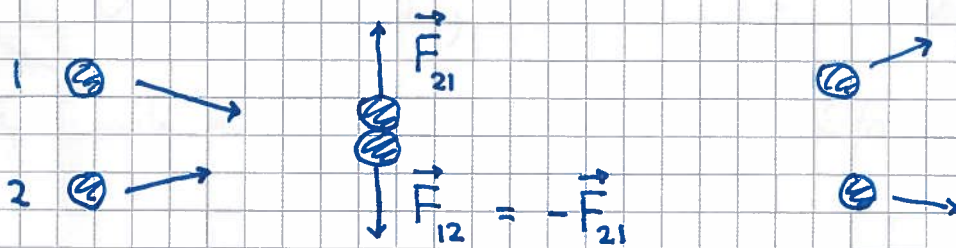
$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\vec{v} = \text{massens impuls} ; [p] = \text{kg m/s}$$

$\Rightarrow$  Hvis  $\vec{F} = 0$ , er  $\vec{p}$  bevart

Loven om impulsbevarelse

Indre krefter i et system endrer ikke total impuls:



$$N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

$$\stackrel{N2}{\Rightarrow} \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \{ \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konstant}$$

# Kollisjoner [OS1 9.2-9.4; YF 8.3, 8.4; LL 5] (34)

Hvis ytre krefter kan neglisjeres, er total impuls bevart i en kollisjon; men ikke nødvendigvis mek. energi  $E$ .

Elastisk støt:  $\Delta E = 0$

Uelastisk støt:  $\Delta E < 0$

Fullstendig uelastisk støt: Legemene henger sammen med felles hastighet etter kollisjonen. Gir maksimalt tap av mekanisk energi  $E$ .

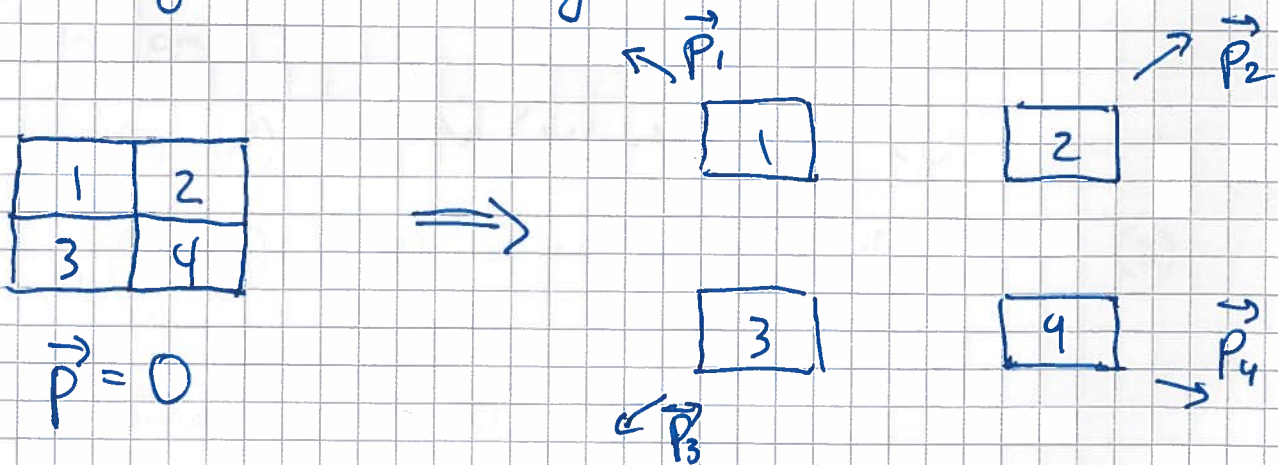
De fleste kollisjoner er kortvarige og skjer på et gitt sted

$$\Rightarrow \Delta U \approx 0, \quad \Delta E \approx \Delta K \text{ i kollisjonen}$$

Tapt mek. energi transformeres til deformasjon, varme, lyd.

En eksplosjon kan betraktes som en "omvendt"

fullstendig uelastisk kollisjon:



$$\sum_{j=1}^4 \vec{p}_j = 0$$



# Sentralt støt [OS1 9.4; YF 8.2-8.4; LL 5.3]

(35)

Støt mellom  $m$  og  $M$  langs ei linje:

Før:  $m \rightarrow v$        $V \leftarrow M$       ( $\rightarrow +$ )

Etter:  $v' \leftarrow m$        $M \rightarrow V'$

$$\text{Alltid: } \Delta p = 0 \Rightarrow mv + MV = mv' + MV' \quad (1)$$

(a) Fullst. uel. støt:

$$v' = V' = \frac{mv + MV}{m + M}$$

(b) Delvis uel. støt: Ikke løsbart (1 lign., 2 ukjente)

(c) Elastisk støt:

$$\Delta K = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}m(v')^2 + \frac{1}{2}M(V')^2 \quad (2)$$

Skriver om (1) og (2):

$$m(v - v') = M(V' - V) \quad (1)$$

$$m(v - v')(v + v') = M(V' - V)(V' + V) \quad (2)$$

(2) dividert med (1) gir

$$v + v' = V' + V \quad (3)$$

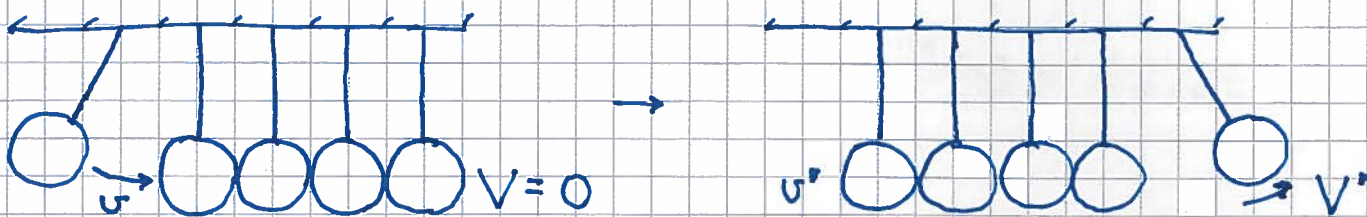
Tar hvor  $(3) \cdot M - (1)$  og  $(3) \cdot m + (1)$  og får

(36)

$$u' = \frac{M}{m+M} \left\{ 2V + u \cdot \frac{m-M}{M} \right\}$$

$$V' = \frac{m}{M+m} \left\{ 2u + V \cdot \frac{M-m}{m} \right\}$$

Eks 1: Newtons kugge



$$m = M \Rightarrow V' = u, \quad u' = V = 0$$

Eks 2: Elastisk ball mot vegg



$$u' = \frac{M}{m+M} \left\{ 0 + u \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \stackrel{m \ll M}{=} -u$$

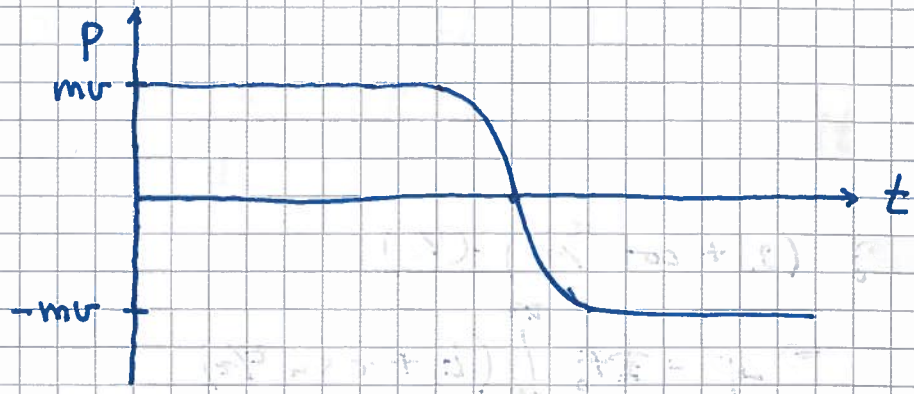
$$\Rightarrow K' = \frac{1}{2} m (u')^2 = \frac{1}{2} m u^2 = K \quad ; \quad \text{OK}$$

$$p' = m u' + M V' = -m u + M \cdot \frac{m}{m+M} \cdot 2u$$

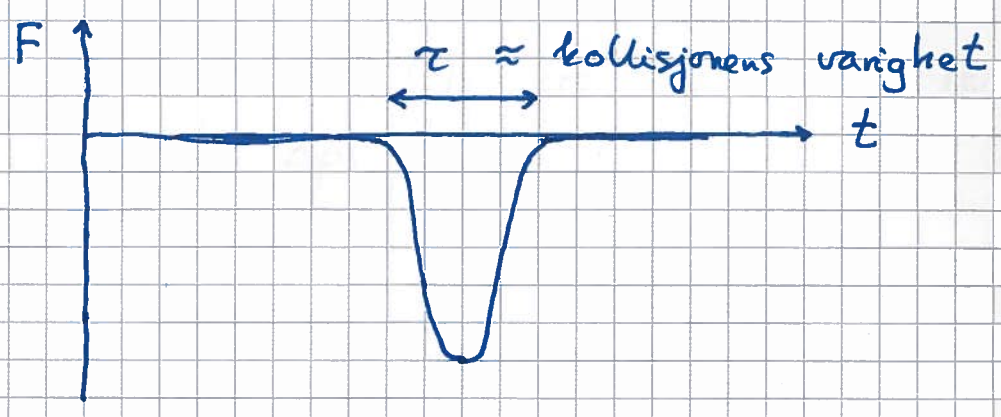
$$= -m u + 2m u = m u = p \quad ; \quad \text{OK}$$



Ballens impuls  $p(t)$  (kvalitativt):



Kraften fra veggen på ballen,  $\vec{F}(t) = d\vec{p}/dt$ :



Anta f.eks.  $\tau \approx 2 \text{ ms}$  og  $|\Delta \vec{v}| \approx 40 \text{ m/s}$ .

Gir en midlere akselerasjon i støtet

$$\langle a \rangle \approx \frac{40 \text{ m/s}}{0.002 \text{ s}} = 20 \text{ km/s}^2 \gg g$$

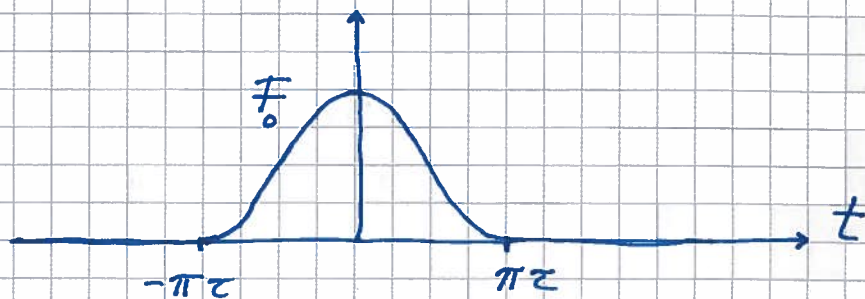
Dvs, tyngden  $mg$  kan trygt neglisjeres i selve kollisjonen

Kraftstøt ("impulse") :

Ytre kraft  $\vec{F}(t)$  gir legemet en impulsendring

$$\Delta \vec{p} = \int d\vec{p} = \int \vec{F}(t) dt$$

Eks :



Anta  $F(t) = \frac{1}{2} F_0 (1 + \cos t/\tau)$  for  $|t| \leq \pi\tau$   
og regn ut  $\Delta p$ .

Løsn :

$$\Delta p = \int_{-\pi\tau}^{\pi\tau} F(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} F_0 \int_{-\pi\tau}^{\pi\tau} (t + \tau \sin t/\tau)$$

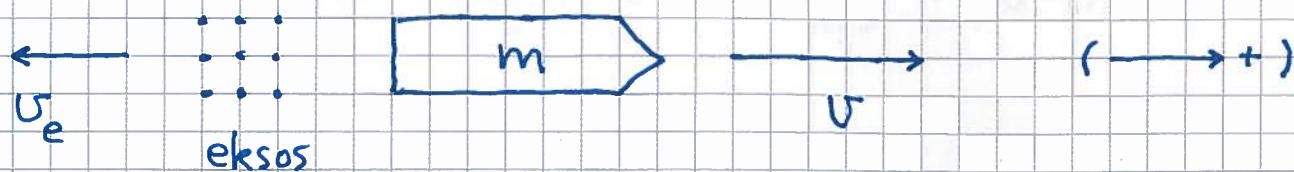
$$= \frac{1}{2} F_0 \cdot 2\pi\tau$$

$$= \underline{\underline{\pi F_0 \tau}}$$



Rakett [OS1 9.7; YF 8.6; LL 5.4]

(39)



Eksosfart relativt raketten :  $u < 0$

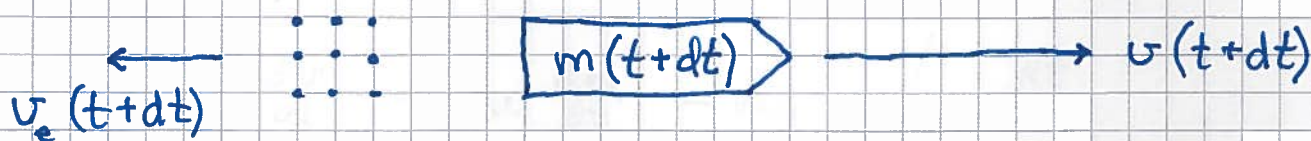
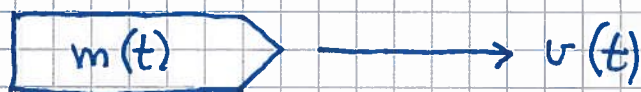
Rakettfart — " — fast system:  $v > 0$

Eksosfart — " — — " — :  $u_e = u + v$

Drivstoff-forbruk pr tidsenhet :  $dm/dt < 0$

Anta  $u = \text{konstant}$  og (foreløpig)  $F_{\text{ytre}} = 0$

$\Rightarrow$  Impulsen er bevart for en gitt masse :



$$dm_e = -dm$$

$$p(t) = m(t) \cdot v(t)$$

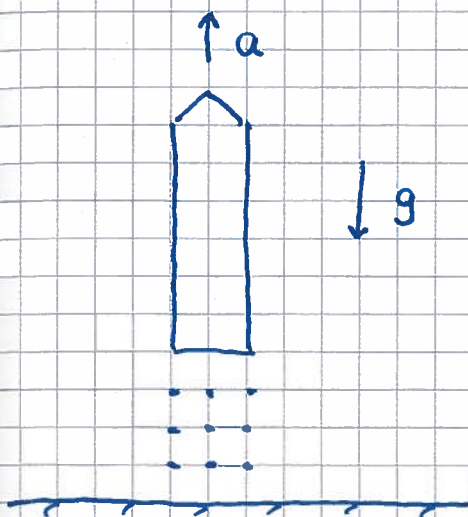
$$\begin{aligned} p(t+dt) &= m(t+dt) \cdot v(t+dt) + dm_e \cdot v_e(t+dt) \\ &= [m(t) + dm] \cdot [v(t) + dv] - dm \cdot [u + v(t) + dv] \\ &= m(t) \cdot v(t) + m(t) \cdot dv - dm \cdot u \end{aligned}$$

$$p(t+dt) = p(t) \quad \Rightarrow \quad m dv - u dm = 0$$

Derivasjon med  $dt$  gir  $m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt}$ , som er N2, (40)

$ma = F_{\text{skyr}}$ , med skyrkraft  $F_{\text{skyr}} = u \cdot \dot{m} > 0$ .

For oppskyting fra bakken:  $F_{\text{ytte}} = -mg$



$$\Rightarrow ma = u \dot{m} - mg$$

Må (selvsagt) ha  
 $u \dot{m} > mg$

for å kunne ta av  
fra bakken.

Øving:

$$m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} - mg \quad / \cdot \frac{dt}{m}$$

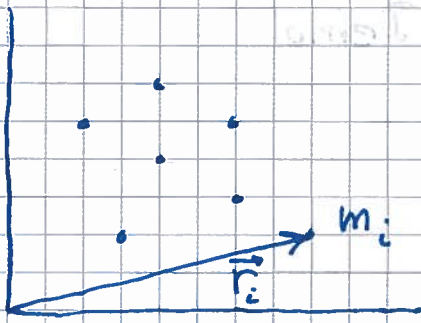
$$\Rightarrow dv = u \frac{dm}{m} - g dt$$

som kan integreres.



Massesenter [OS1 9.6; YF 8.5 + oppg 8.115, 116;  
(Tyngdepunkt) LL 5.6, 5.8, 6.1]

(41)



N punktmasser  $m_1, m_2, \dots, m_N$   
i posisjoner  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

Systemets massesenter:  $\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$

Systemets totale masse:  $M = \sum_i m_i$

Med kontinuerlig massefordeling:

$$m_i \rightarrow dm; \quad \sum_i \rightarrow \int$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm; \quad M = \int dm$$

Masseelementet  $dm$ :

1D:  $dm = \lambda dl$ ;  $\lambda =$  masse pr lengde<sup>enhet</sup>;  $dl =$  lengdeelement

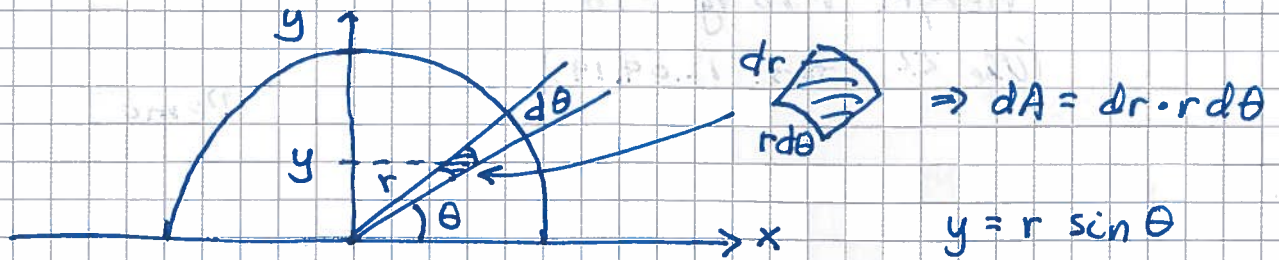
2D:  $dm = \sigma dA$ ;  $\sigma =$  " " flateenhet;  $dA =$  flatelement

3D:  $dm = \rho dV$ ;  $\rho =$  " " volum<sup>enhet</sup>;  $dV =$  volumelement

Uniform massefordeling:  $\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V}$  osv

Ekse 1: Halv sirkulær plate, radius  $R$

(42)



$$X = 0 \text{ pga symmetri} \Rightarrow \vec{R}_{cm} = Y \cdot \hat{y}$$

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{M} \int y \, dm = \frac{1}{A} \int y \, dA ; A = \frac{1}{2} \pi R^2 \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta \, dr \, r \, d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \left| \frac{r^3}{3} \right|_0^R \cdot \left| (-\cos \theta) \right|_0^\pi = \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R}} \end{aligned}$$

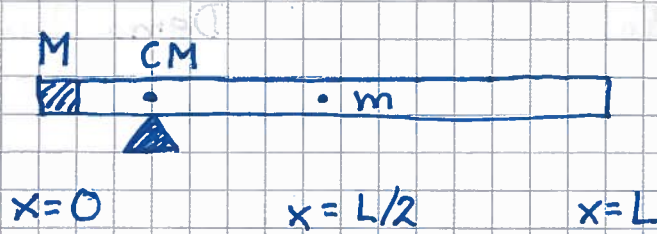
Beregn selv disse:

Halv tynn ring:  $Y = \frac{2}{\pi} R$

Halv kompakt kule:  $Y = \frac{3}{8} R$



Eks 2: Rør med "punktmasse" i enden

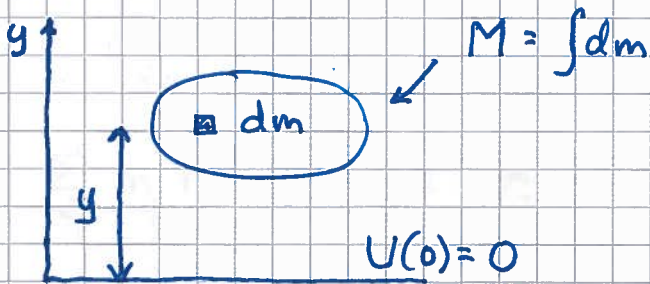


$m = 165 \text{ g}$

$M = 305 \text{ g}$

$$\bar{x}_{CM} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + \int_0^L x \cdot \frac{m dx}{L} \right\} = \frac{mL}{2(m+M)} \approx \underline{0.18L}$$

Eks 3 : Potensiell energi i tyngdefeltet



$U = \int dU = \int g y dm = g M Y$ , dvs som om hele massen  $M$  er plassert i CM's høyde  $Y$

Legemets tyngdepunkt er der det vil balansere (som røret i Eks 2).

Som regel er  $g$  like stor for hele systemet. Da er CM og tyngdepunktet samme sted.

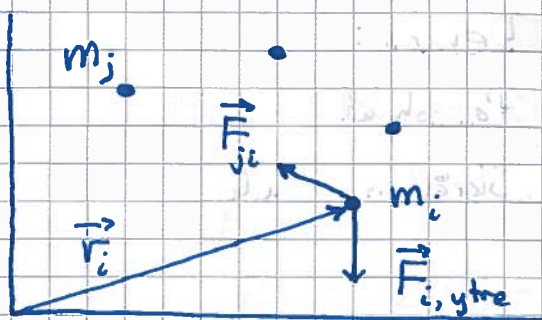
# CM's bevegelse

[OS1 9.6 ; YF 8.5 ; LL 5.8]

(44)

Exp. med rør viser / antyder at CM beveger seg som om hele massen er samlet i CM.

Bevis:



$$N2 \text{ for } m_i : m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

Vi tar  $\sum_i$  på begge sider.

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \{ M \vec{R}_{cm} \} = M \ddot{\vec{R}}_{cm}$$

$$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft på systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \dots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ytre} = M \ddot{\vec{R}}_{cm}}$$

CM's bevegelse er som om hele massen  $M$  er samlet i  $\vec{R}_{cm}$  og blir påvirket av netto ytre kraft  $\vec{F}_{ytre}$ .

Eks:  $\vec{F} \rightarrow \boxed{M}$       $\vec{F} \rightarrow \boxed{M}$       $\vec{A}_{cm} = \frac{\vec{F}}{M}$  for begge klasser

Men klossen til høyre vil også få en rotasjon om CM.

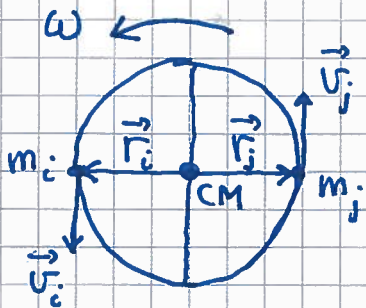
Ikke helt stive legemer kan også få indre vibrasjon.



# Rotasjon [OS1 10,11; YF 9,10; LL 5,6]

De neste 2-3 ukene:

- Rotasjon om akse gjennom CM



Hvis CM er i ro (ren rotasjon):

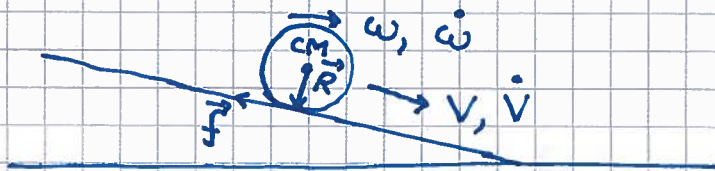
$$K_{CM} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 = 0$$

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

Men vi har rotasjonsenergi  $K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 > 0$

og dreieimpuls (mhp CM)  $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \neq 0$

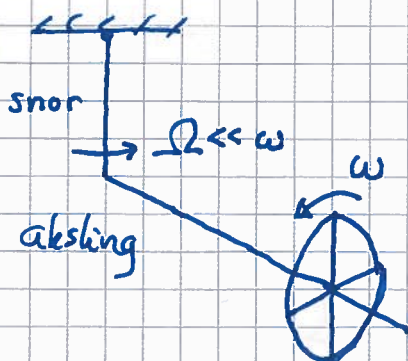
- Rulling: Translasjon av CM + Rotasjon om CM



$\dot{v} > 0$  pga netto ytre kraft  $\vec{F} = \vec{G}_{||} - \vec{f}$

$\dot{\omega} > 0$  pga netto ytre dreiemoment (mhp CM)  $\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{f}$

- Kompleks dynamikk

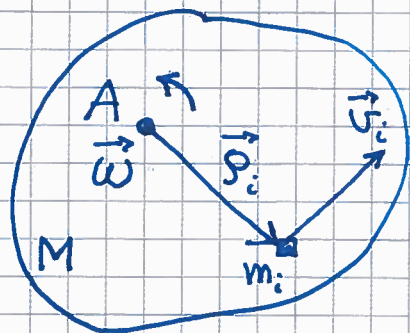


Preesjon  
Gyroskop



# Rotasjonsenergi. Tregghetsmoment [OST 10.4; YF 9.4; LL 6.2-6.4] (46)

Ser (stort sett!) på stive legemer, og først ren rotasjon om fast akse (ikke nødvendigvis gjennom CM):



Antar rotasjonsaksen A langs  $\hat{z}$  ut av planet.

Lar vinkelfarten være en vektor langs rot.aksen:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

Høyrehåndsregel (HHR) for "fortegnet" på  $\vec{\omega}$ :

4 fingre på HH følger rot. bevegelsen. (Her: Mot klokke)

Da peker tommelen langs  $\vec{\omega}$ .

Fra figur:

$$\vec{\rho}_i = \rho_i \hat{\rho} \quad ; \quad \rho_i = \text{avstand fra A til } m_i$$

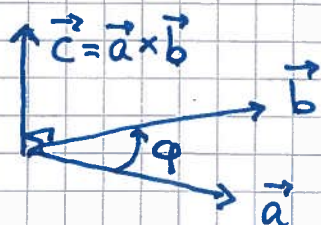
$$\vec{v}_i = v_i \hat{\phi} \quad ; \quad \vec{v}_i = \text{farten til } m_i$$

$$\vec{\rho}_i \perp \vec{v}_i, \quad \vec{\rho}_i \perp \vec{\omega}, \quad \vec{v}_i \perp \vec{\omega}$$

$$\text{Fra før: } v_i = \rho_i \omega$$

$$\text{Dermed: } \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

HHR for kryssprodukt: 4 fingre langs  $\vec{a}$  bøyes mot  $\vec{b}$ ; da peker tommelen langs  $\vec{a} \times \vec{b}$ :



$$c = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| \\ = a \cdot b \cdot \sin \phi$$



Bruker her syylinderkoordinater = polarkoord. + z

= ρ, φ, z [Reserverer  $\vec{r}$  som posisjonsvektor relativt origo!]

Rotasjonsenergi:

$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

der I = legemets treghetsmoment mhp rot.aksen A:

$$I \stackrel{def}{=} \sum_i m_i \rho_i^2$$

Med kontinuerlig massefordeling:  $m_i \rightarrow dm$ ;  $\sum_i \rightarrow \int$

$$I = \int \rho^2 dm$$

ρ = avstand fra A til dm

Generell bevegelse for stivt legeme: Translasjon av CM, med fart  $\vec{V}$ , og rotasjon om akse gjennom CM, med vinkel fart  $\vec{\omega}$ .

Total kin. energi blir (ganske enkelt!)

$$K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

Se utlagt notat for utledning. [og YF 10.3; LL 6.6]

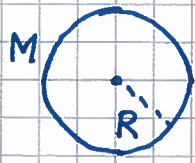
Notasjon:  $I_0$  betyr mhp akse gjennom CM.



# Tregghetsmoment, eksempler [OS1 10.5; YF 9.6; LL 6.3]

(48)

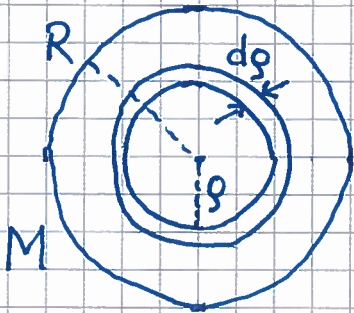
- Ring eller hul sylinder



$$I_0 = \int r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

[Oppgis ikke til eksamen]

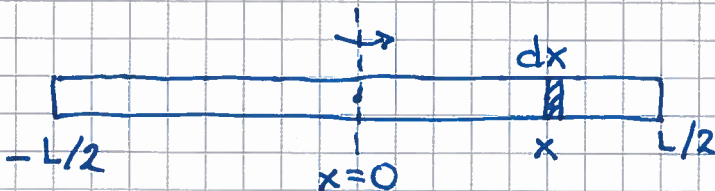
- Skive eller kompakt sylinder = sum av tynne ringer med radius  $g$  og tykkelse  $dg$



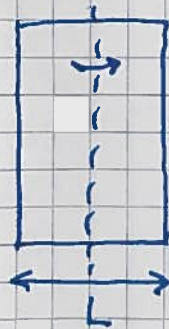
$$\begin{aligned} dI_0 &= g^2 dm = g^2 \cdot M \cdot dA / \pi R^2 \\ &= g^2 \cdot M \cdot 2\pi g dg / \pi R^2 = 2Mg^3 dg / R^2 \end{aligned}$$

$$I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R g^3 dg = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}} \quad [\text{Oppgis}]$$

- Tynn stang eller tynn plate (f.eks. ei dør)



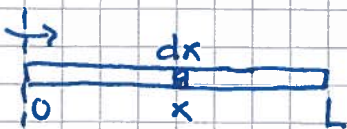
eller



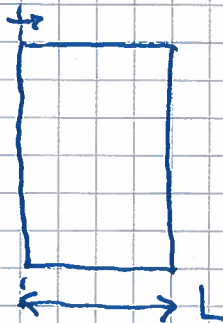
$$g = x, \quad dm = M \cdot dx / L$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}} \quad [\text{Oppgis}]$$

Mhp akse ved enden:



eller



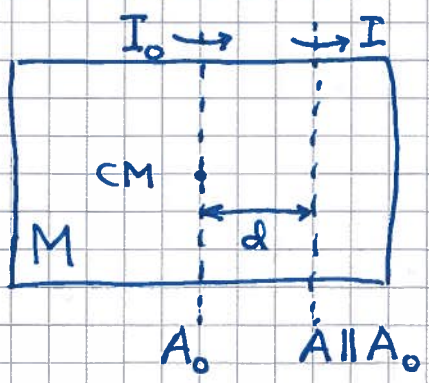
$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

[Oppgis ikke pga Steiners sets, som oppgis]



- Kuleskall :  $I_o = \frac{2}{3}MR^2$
  - Kompakt kule:  $I_o = \frac{2}{5}MR^2$
- } Oppgis. Se øving/LF for detaljer.

Steiners sats [OS1 10.5; YF 9.5; LL 6.3]

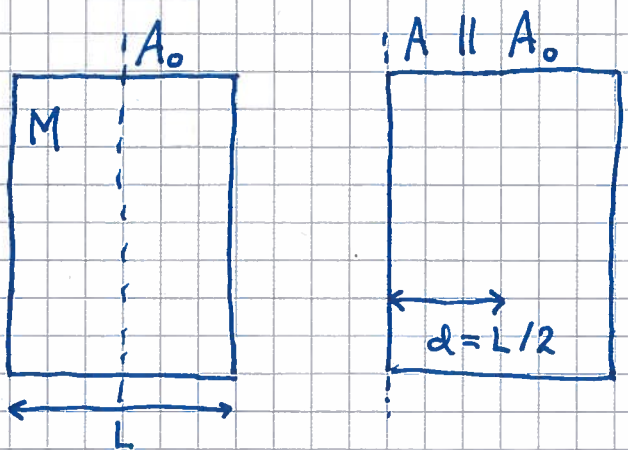


Med A parallell med A\_o er

$$I = I_o + Md^2$$

[Se notat for utledning]

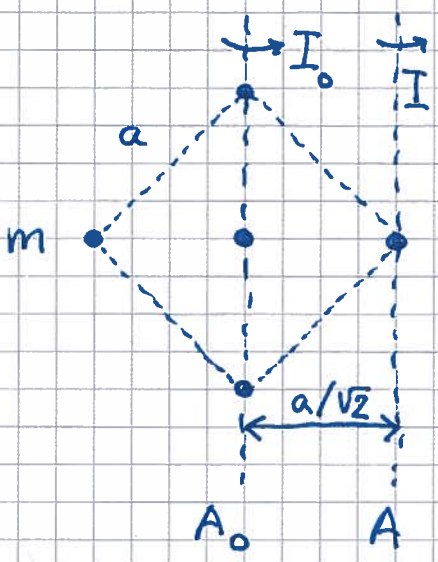
Eks 1: Dør



$$I = I_o + M \cdot (L/2)^2$$

$$= \frac{1}{3} ML^2 \quad (\text{OK!})$$

Eks 2: System med 5 punktmasser

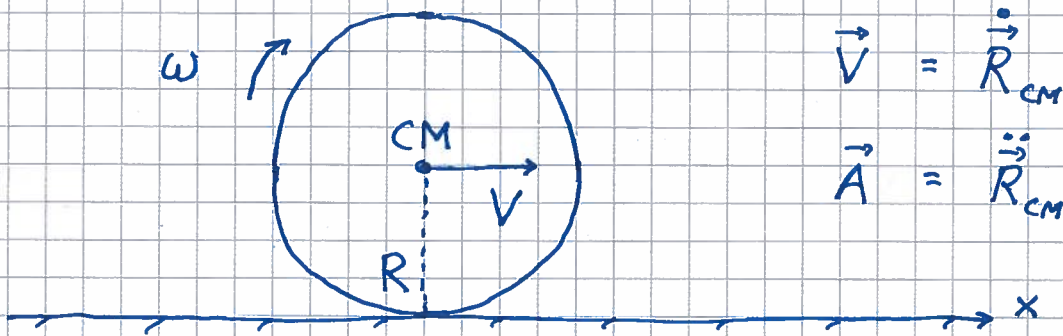


$$I_o = 2 \cdot m \cdot (a/\sqrt{2})^2 = \underline{ma^2}$$

$$\Rightarrow I = I_o + 5m \cdot (a/\sqrt{2})^2 = \underline{\frac{7}{2} ma^2}$$

# Rulling [OS1 11.1 ; YF 10.3 ; LL 6.7]

50



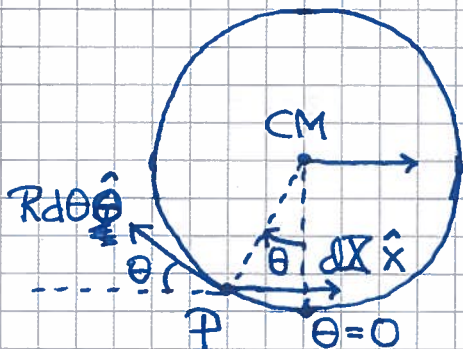
$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$$
$$\vec{A} = \ddot{\vec{R}}_{CM} = \dot{\vec{V}}$$

Ren rulling : Ved rotasjon en liten vinkel  $d\theta = \omega dt$  om CM flyttes CM lengden  $dx = R d\theta = R\omega dt$  mot høyre, slik at  $dx/dt = R\omega$ , dvs

$$\boxed{V = R\omega}$$

Rullebetingelsen ( $\Rightarrow A = R\dot{\omega}$ )

Punkt P på periferien følger en sykloide :



Forflytning av P ved vinkelendring fra  $\theta$  til  $\theta + d\theta$ :

$$d\vec{r} = R d\theta \hat{\theta} + dX \hat{x}$$

Her er

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \quad \text{og} \quad dX = R d\theta$$

slik at

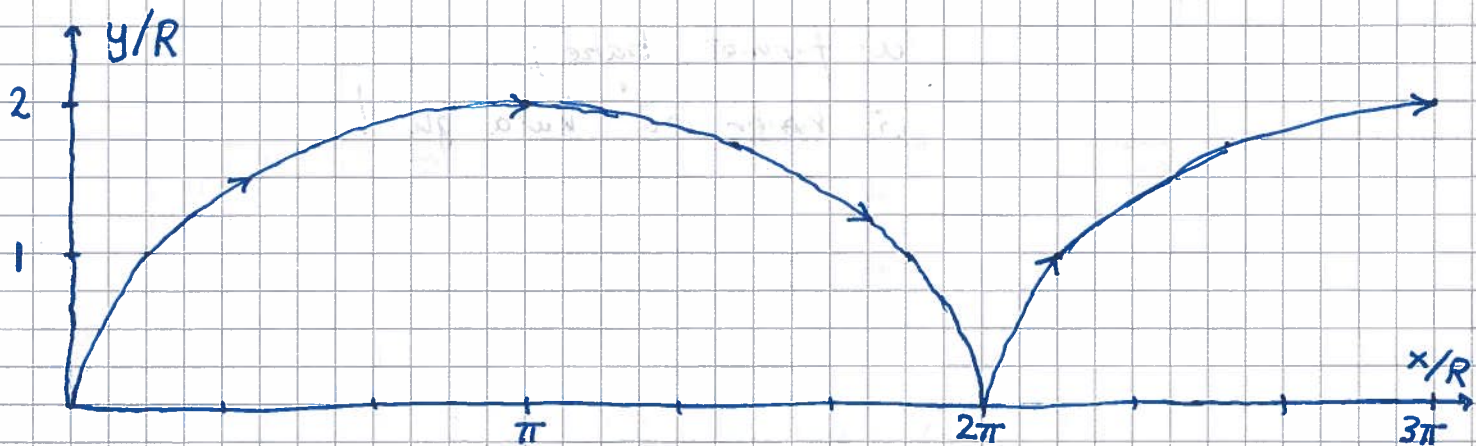
$$d\vec{r} = \hat{x} R d\theta (1 - \cos \theta) + \hat{y} R d\theta \sin \theta$$



Anta P i origo,  $x=y=0$ , når  $\theta=0$ . Da er

$$\vec{r} = \int d\vec{r} = \int_0^\theta \{ \hat{x} R d\theta (1 - \cos\theta) + \hat{y} R d\theta \sin\theta \}$$

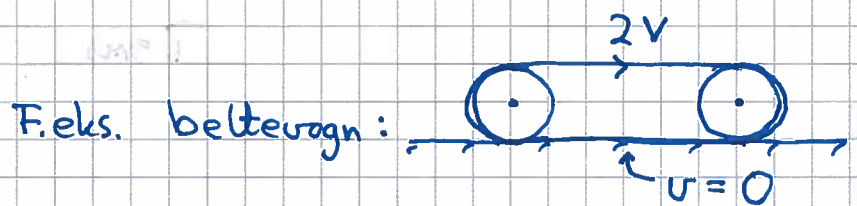
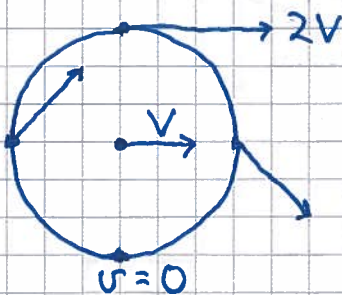
$$= \underline{\hat{x} R (\theta - \sin\theta) + \hat{y} R (1 - \cos\theta)}$$



Hastigheten til P:

$$\vec{v} = \hat{x} (R\dot{\theta} - R\dot{\theta} \cos\theta) + \hat{y} R\dot{\theta} \sin\theta$$

$$= \hat{x} V (1 - \cos\theta) + \hat{y} V \sin\theta$$



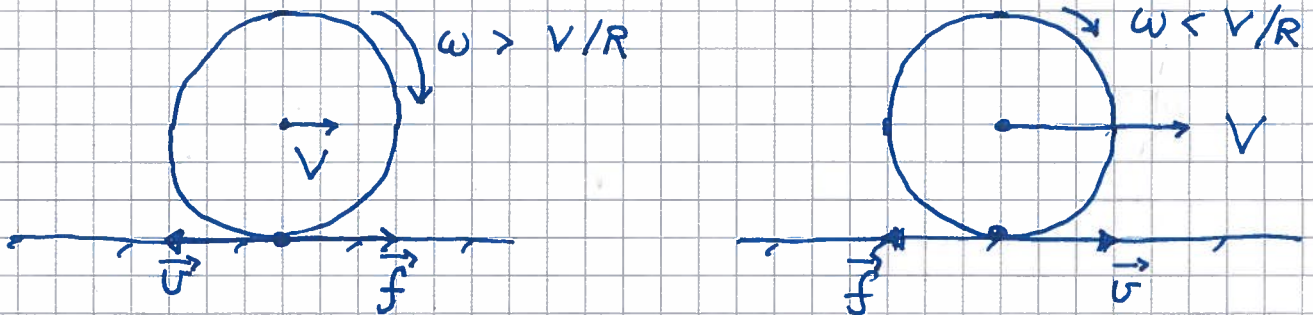
Merk:  $v=0$  når P har kontakt med underlaget; da er  $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$ , dvs null effekttap, selv med  $f \neq 0$ .

Med ren rulling er  $K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} c M R^2 \cdot \frac{V^2}{R^2}$

$$= \underline{(1+c) \cdot \frac{1}{2} M V^2}; \quad c = \frac{2}{5} \text{ for kompakt kule, osv.}$$

Sluring: Ruller og glir. [OS1 11.1 ; LL 6.7] (52)

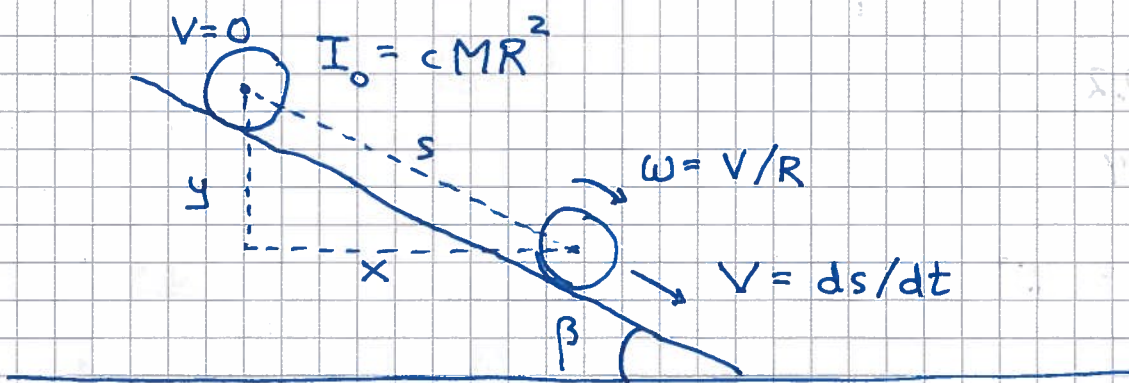
Hvis  $\omega \neq V/R$ , har legemets kontaktpunkt farten  $v = V - \omega R \neq 0$ , dvs det glir:



$$f = \mu_k \cdot N \quad ; \quad P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$$

⇒ taper mek. energi pr tidsenhed lik  $|P_f|$

Ren rulling på skråplan [OS1 11.1 ; YF 10.3 ; LL 6.8]



Bestem  $V$ ,  $A$ ,  $f$  og største  $\beta$  som gir ren rulling

Løses enklast med energibevarelse:  $|\Delta U| = |\Delta K|$

$$\Rightarrow Mgy = (1+c) \frac{1}{2} MV^2 \quad \Rightarrow \underline{V = \sqrt{2gy / (1+c)}}$$

$$\Rightarrow V(\text{kule}) > V(\text{skive}) > V(\text{kuleskall}) > V(\text{hul sylinder})$$



$$\begin{aligned}
 A &= \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \\
 &= \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot \sin \beta \cdot V \quad (V = \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot y^{1/2}) \\
 &= \underline{\underline{\frac{g \sin \beta}{1+c}}}
 \end{aligned}$$

Uten friksjon:  $F_{||} = Mg \sin \beta \Rightarrow A (f=0) = g \sin \beta$   
 $\Rightarrow$  Vi må ha  $\vec{f}$ , rettet oppover skråplanet.

$$\begin{aligned}
 N2: \quad Mg \sin \beta - f &= MA = Mg \sin \beta / (1+c) \\
 \Rightarrow \quad \underline{\underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta}}
 \end{aligned}$$

Ren rulling bare dersom

$$f \leq f_{max} = \mu_s \cdot N = \mu_s Mg \cos \beta$$

$$\Rightarrow \frac{c}{1+c} \sin \beta \leq \mu_s \cos \beta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\beta \leq \arctan \left\{ \mu_s \cdot \frac{1+c}{c} \right\}}}$$

Eks: Stålkule på plastbane, med  $\beta = 30^\circ$   
 $\mu_s \approx 0.2, \quad c = 0.4$

$$\Rightarrow A = 0.36g$$

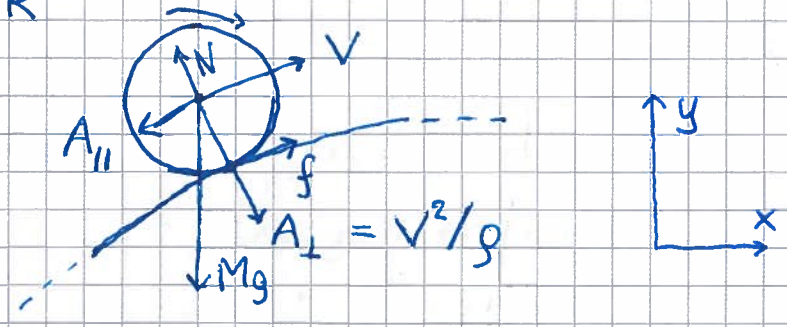
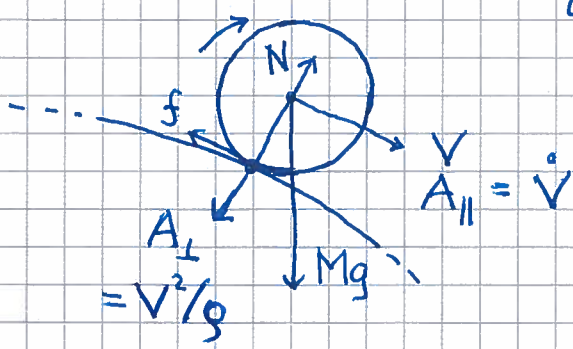
$$f = 0.14 Mg$$

$$\beta_{max} = \arctan(0.7) = 35^\circ$$

Lab: Ren rulling på krum bane

$\omega = v/R$

$I_0 = c = MR^2$



$A_{\parallel} = \dot{v} = g \sin \beta / (1+c) ; \tan \beta = dy/dx = y'$

$A_{\perp} = v^2/g ; 1/g = |y''| / [1 + (y')^2]^{3/2}$

$N \perp$  banen:

$$MA_{\perp} = MV^2/g = \begin{cases} Mg \cos \beta - N & \text{(krumning ned)} \\ N - Mg \cos \beta & \text{(--- opp)} \end{cases}$$

Ekperimentelt:

- Film av bevegelsen
  - "Tracking" av CM gir  $\{x(t), y(t)\}_{exp}$
  - Måling av  $y(x)$  i 8 festepunkter.
- Gir god tilnærming til hele banen  $y(x)$  med såkalte kubiske splines (se neste side).

Numerikk:

- Beregn  $\{x(t), y(t)\}_{num}$  med utgangspunkt i  $dV/dt = g \sin \beta / (1+c)$ , startbetingelser  $\{x(0), y(0)\}$  og kjent bane  $y(x)$ , dvs kjent  $\beta = \arctan(dy/dx)$



Kubisk spline: Labbanen  $y(x)$  tilnærmes med

3. grads - polynomer

$$S_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, 6$$

på hver av de 7 intervallene  $(x_j, x_{j+1})$ , der de 8 festepunktene  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_7, y_7)$  er kjent, og på løben med fast avstand horisontalt,  $h = x_{j+1} - x_j = 20.0 \text{ cm}$ . Polynomene  $S_j(x)$  velges slik at  $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) = y_{j+1}$ , og dessuten slik at  $S'(x)$  og  $S''(x)$  er kontinuerlige i festepunktene (og dermed overalt). En velger gjerne  $y_0'' = y_7'' = 0$ , dvs null krumning i de ytterste festepunktene.

Skrives nå polynomene på formen

$$S_j(x) = \frac{y_j'' - (x_{j+1} - x)^3}{6h} + \frac{y_{j+1}'' (x - x_j)^3}{6h} + \left( \frac{y_{j+1}}{h} - \frac{y_{j+1}'' \cdot h}{6} \right) \cdot (x - x_j) + \left( \frac{y_j}{h} - \frac{y_j'' \cdot h}{6} \right) \cdot (x_{j+1} - x) \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, 6$$

blir de ukjente størrelsene  $y_1'', y_2'', \dots, y_6''$  løsningen av de 6 lineære ligningene  $A \vec{y}'' = \vec{b}$ , dvs

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \\ y_5'' \\ y_6'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} \quad \text{med} \quad b_j = \frac{6}{h^2} (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1})$$

Når alle  $S_j(x)$  er beregnet, kan  $y'(x)$  og  $y''(x)$  beregnes, hvor som helst mellom  $x_0$  og  $x_7$ . Dvs, helningsvinkel  $\beta$  og krumningsradius  $\rho$  kan beregnes langs hele banen.



Numenikk: Bruker Euler - metoden her.

(56)

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Rightarrow \Delta V = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Delta t$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = V \Rightarrow \Delta S = V \Delta t$$

$$t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \dots, t_n = n \Delta t, \dots$$

$$x_0 = 0, y_0 = 0, V_0 = V(t_0), \beta_0 = \arctan \{y'(x_0)\}$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = V_{0x} \Delta t = V_0 \cos \beta_0 \cdot \Delta t$$

$$y_1 = y(x_1)$$

$$V_1 = V_0 + \Delta V_0 = V_0 + \frac{g \sin \beta_0}{1+c} \Delta t ; \beta_1 = \arctan \{y'(x_1)\}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 = x_1 + V_{1x} \Delta t = x_1 + V_1 \cos \beta_1 \cdot \Delta t$$

$$y_2 = y(x_2)$$

$$V_2 = V_1 + \frac{g \sin \beta_1}{1+c} \Delta t ; \beta_2 = \arctan \{y'(x_2)\}$$

osv.

• Deretter kan exp. og num. beregelse sammenlignes, dvs

$$\{x(t), y(t)\}_{\text{exp}} \quad \text{vs} \quad \{x(t), y(t)\}_{\text{num}}$$

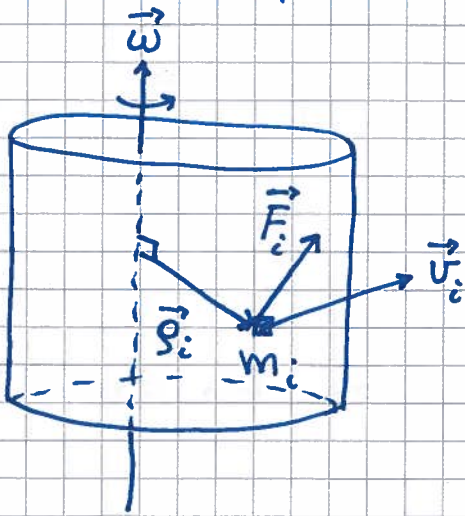
• Kraftene  $\vec{N}$  og  $\vec{f}$  fra banen på objektet kan (og skal!) beregnes, og framstilles grafisk på hensiktsmessig vis.

• Dissipative krefter - dvs slike som fører til tap av mekanisk energi - kan modelleres, på "laminaer form" som  $\vec{f} = -k \cdot \vec{V}$ , og/eller på "turbulent form" som  $\vec{f} = -D \cdot V^2 \cdot \hat{V}$ .



# Rotasjonsdynamikk

Akse med fast orientering [OS1 10.6, 10.7; YF 10.1, 10.2; LL 6.2]



Legemet tilføres effekten

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{i\omega} v_i \\
 &= \left\{ \sum_i F_{i\omega} r_i \right\} \omega \\
 &= \tau \omega
 \end{aligned}$$

Her er  $\tau = \sum_i F_{i\omega} r_i =$  netto ytre dreiemoment på legemet, mhp rot.aksen;  $F_{i\omega}$  er komponenten langs  $\vec{v}_i$  av ytre kraft  $\vec{F}_i$  på masselement  $m_i$ .

Tilført effekt tilsvarer økning i kin. energi pr tidsenhet:

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} I \omega^2 \right\} = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = I \omega \dot{\omega}$$

der  $I = \sum_i m_i r_i^2$  er legemets treghetsmoment mhp rot.aksen

Sammenligning gir

$$\boxed{\tau = I \dot{\omega}}$$

som er N2 for rotasjon om akse med fast orientering.

Jf. N2 for translasjon:  $F = m \dot{v}$

Arbeid utført av  $\tau$  [OS1 10.8; YF 10.4; LL 6.4]

$P = \tau \omega = \tau \frac{d\phi}{dt}$  og  $P = \frac{dW}{dt}$

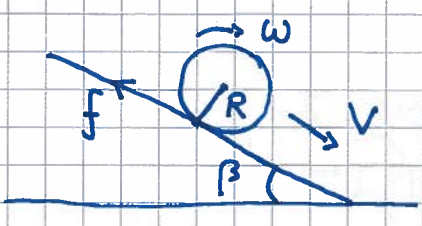
$\Rightarrow$   $dW = \tau d\phi$

= arbeid utført av  $\tau$  ved omloppt vinkel  $d\phi$

Jf. arb. utf. ved transl.:  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

---

Eks 1: Ren rulling på skråplan



$I_o = cMR^2$ ,  $\omega = v/R$ ,  $\dot{\omega} = \dot{v}/R$

N2, II:  $Mg \sin\beta - f = M\dot{v}$

N2 for rot. om akse gjennom CM:  $\tau = I_o \dot{\omega}$

Her er  $\tau = f \cdot R$ ; både  $\vec{N}$  og  $M\vec{g}$  har null arm relativt akse gjennom CM.

(Kraftens arm = Avstanden fra akse til kraftens forlengelseslinje)

Dermed:  $f \cdot R = cMR^2 \cdot \frac{\dot{v}}{R} \Rightarrow f = cM\dot{v}$

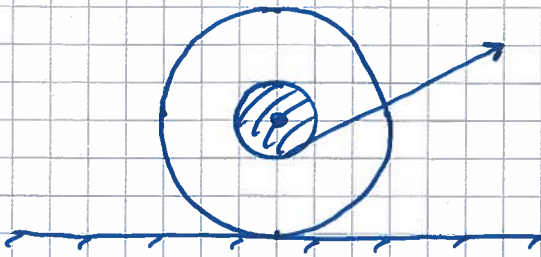
som innsatt i N2, II gir  $Mg \sin\beta - cM\dot{v} = M\dot{v}$ ,

dus

$\dot{v} = \frac{g \sin\beta}{1+c}$  (som s. 53)



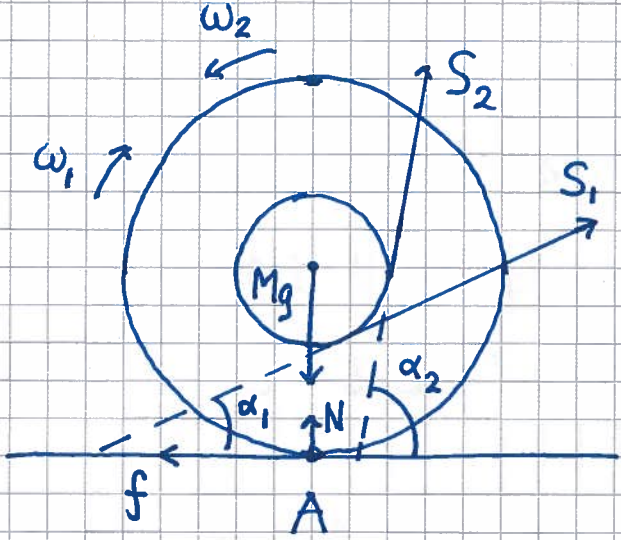
Eks 2: Trådsnelle på flatt underlag



S = snordraget

Når ruller snella mot høyre og mot venstre?

"Triks": Velg "kontaktlinja" som referanseakse A.

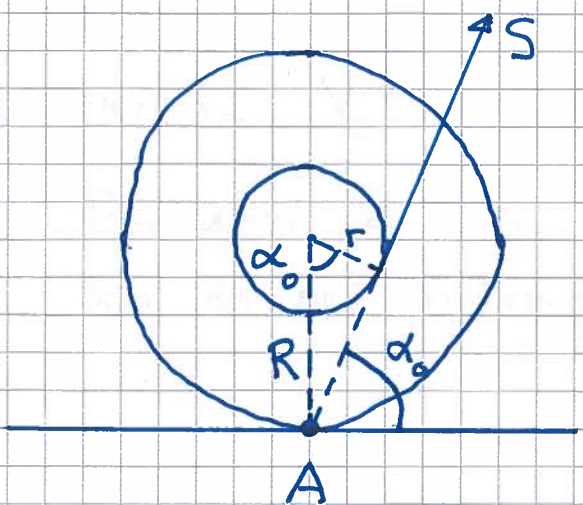


Bare S som har en arm, og dermed dreiemoment  $\tau_A$  mhp aksen A.

$S_1 \Rightarrow$  (rot.) mot høyre

$S_2 \Rightarrow$  (rot.) mot venstre

Hvis forlengelsen av  $\vec{S}$  går gjennom A, må snella bli liggende i ro:



$$\sum \tau_A = 0 \Rightarrow \dot{\omega} = 0$$

$$\Rightarrow \text{ingen rotasjon}$$

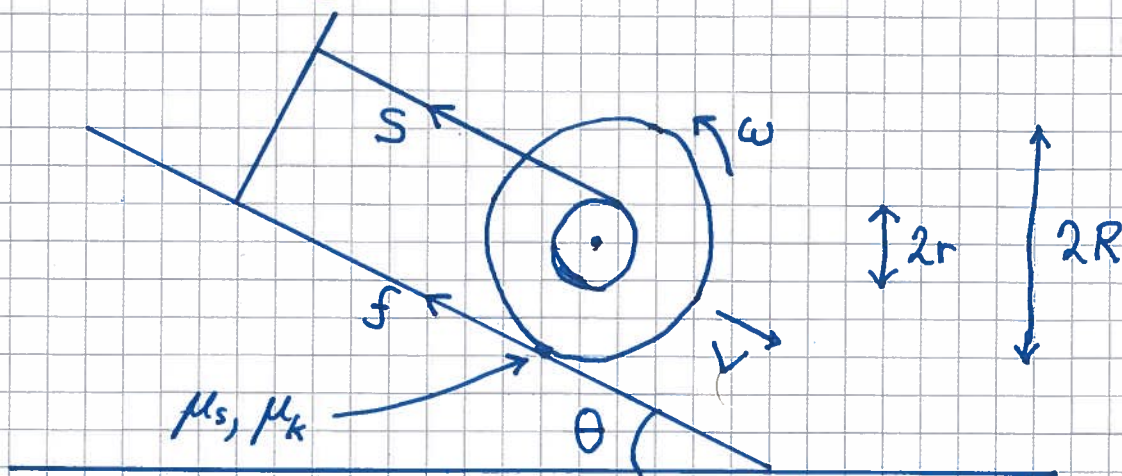
Fra figur:

$$\cos \alpha_0 = \frac{r}{R}$$

(Hvis  $S_x > f_{max}$ , glir snella mot høyre, uten å rotere)

Eks 3: Baklengssnelle (Ør. 6)

60



- Hvor stor er max vinkel  $\theta_0$  uten at snella slurer baklengs nedover skråplanet?

Løsn:  $N1 \parallel$  skråplanet og  $N1$  for rot. om CM

$$f = f_{\max} = \mu_s N \quad \text{når } \theta = \theta_0$$

- Hvis  $\theta > \theta_0$ , hva blir  $S$  og  $\dot{V}$ ?

Løsn:  $N2 \parallel$  skråplanet og  $N2$  for rot. om CM

$$f = \mu_k N$$

Her må  $V = \omega r$  være oppfylt:

Translasjon av CM en lengde  $2\pi r$  tar samme tid som en hel omdreining, dvs omlept vinkel  $2\pi$

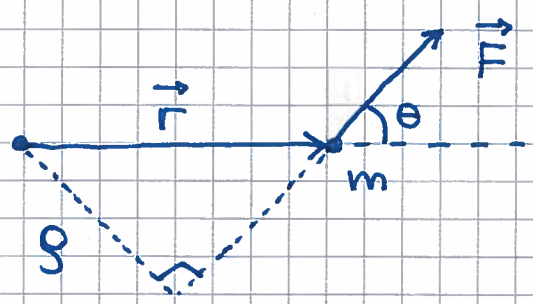


# Rotasjonsdynamikk i 3D

Generelt må dreiemoment  $\vec{\tau}$  og dreieimpuls  $\vec{L}$  beregnes relativt et fritt valgt referansepunkt  $\vec{r}_0$ .  
 Posisjonen til en punktmasse  $m$ , relativt  $\vec{r}_0$ , er da  $\vec{r} - \vec{r}_0$ , dersom  $\vec{r}$  er dens pos. relativt origo.  
 For enkelhets skyld velger vi her  $\vec{r}_0 = 0$ .

---

## Dreiemoment [OS1 10.6; YF 10.1; LL 5.5, 6.4]



$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}} = \text{kraftens dreiemoment p\u00e5 } m \text{ (rel. origo)}$$

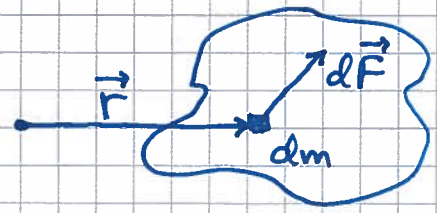
$\Rightarrow \vec{\tau} \perp \vec{r}$  og  $\vec{\tau} \perp \vec{F}$  (Her:  $\vec{\tau}$  ut av planet)

$$\tau = |\vec{\tau}| = r \cdot F \cdot \sin \theta = g \cdot F$$

der  $g$  = kraftens arm = avstand fra refpunktet til kraftens forlengelseslinje

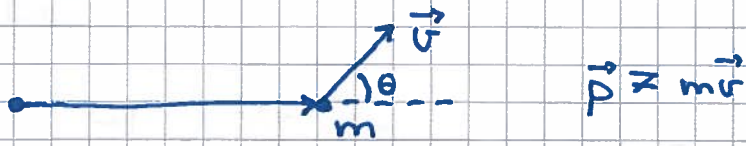
For partikkelsystem:

$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$$



= netto dreiemoment p\u00e5 systemet

Dreieimpuls [OS1 11.2; YF 10.5; LL 6.6]

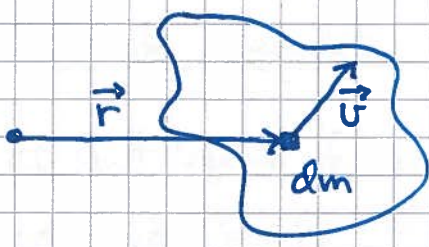


$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$  = massens dreieimpuls (rel. origo)

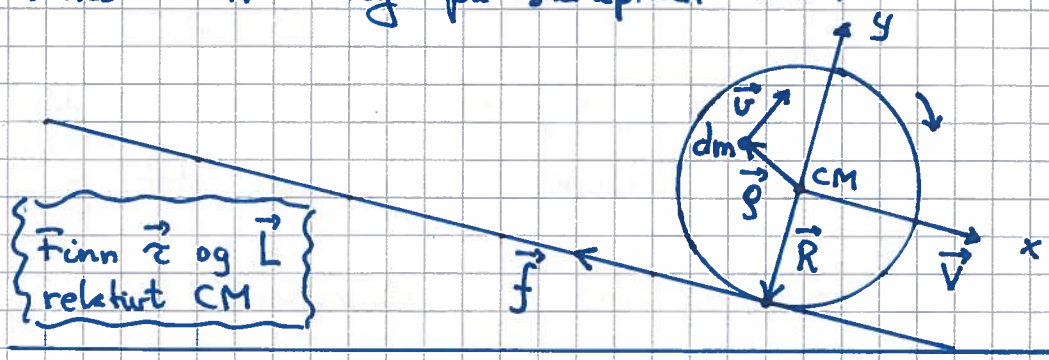
$\vec{L} \perp \vec{r}; \vec{L} \perp \vec{p}$  og  $L = |\vec{L}| = r \cdot p \cdot \sin\theta$

For partikkelsystem :

$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v} dm = \int \vec{r} \times d\vec{p}$   
 = systemets totale dreieimpuls



Eks: Rulling på skrånplan (⊙)



Finn  $\vec{\tau}$  og  $\vec{L}$  relativt CM

$\vec{v} = v\hat{x}$   
 $\vec{\omega} = -\omega\hat{z}$   
 $\vec{R} = -R\hat{y}$   
 $\vec{f} = -f\hat{x}$   
 $\vec{s} = s\hat{\phi}$   
 $\vec{v} = -v\hat{\phi}$

$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{f} = \underline{\underline{-Rf\hat{z}}}$

$\vec{L} = \int \vec{s} \times \vec{v} dm = \int s \cdot \omega s \cdot dm \cdot (-\hat{z}) = (\int s^2 dm) \cdot (-\omega\hat{z}) = \underline{\underline{I_0 \vec{\omega}}}$

Merk at vektoren  $d\vec{L}/dt = I_0 \dot{\vec{\omega}}$  peker langs  $-\hat{z}$  (siden vinkelfarten øker i absoluttverdi), dvs  $\dot{\vec{L}}$  og  $\vec{\tau}$  peker i samme retning. Vi skal straks vise at  $\dot{\vec{\tau}} = \dot{\vec{L}}$ .



N2 for rotasjon [OSI 11.2 ; YF 10.5 ; LL 6.6]  
("Spinnsatsen")

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \{ \vec{r} \times \vec{p} \} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

altså  $\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$  (Jf. N2 for translasjon:  $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ )

der  $\vec{\tau}$  = netto ytre dreiemoment på systemet  
 $\vec{L}$  = systemets totale dreieimpuls

Statisk likevekt [OSI 12.1, 12.2 ; YF 11.1-11.3 ; LL 7.1]

Et stivt legeme forblir i ro, med  $\vec{p} = 0$  og  $\vec{L} = 0$ , bare dersom netto ytre kraft  $\vec{F}$  og netto ytre dreiemoment  $\vec{\tau}$  begge er null.

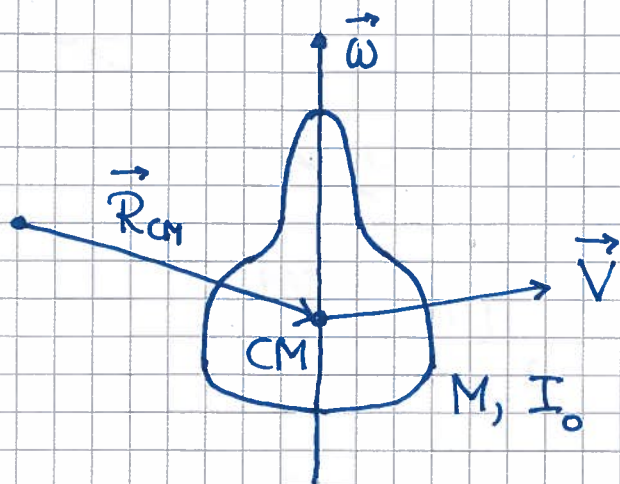
Bevaringslover oppsummert

- I et isoleret system (ingen ytre krefter) er total energi, total impuls og total dreieimpuls bevart.
- I et konservativt system er total mekanisk energi, K+U, bevart.
- Hvis netto ytre kraft  $\vec{F}$  på et system er null, er total impuls  $\vec{p}$  bevart
- Hvis netto ytre dreiemoment  $\vec{\tau}$  på et system er null, er total dreieimpuls  $\vec{L}$  bevart

## Total dreieimpuls for sturt legeme [osi... ; YF 10.5; LL 6.6]

(64)

Anta at rotasjonsaksen er en 2-tallig rotasjonsakse; dvs at legemet ser likedan ut etter å ha blitt rotert  $180^\circ (= 360^\circ/2)$ .



Legemets bandedreieimpuls, pga CMs translasjonsbevegelse:

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$$

Legemets indre dreieimpuls ("spinn"), pga rotasjon om CM:

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$$

Legemets totale dreieimpuls:

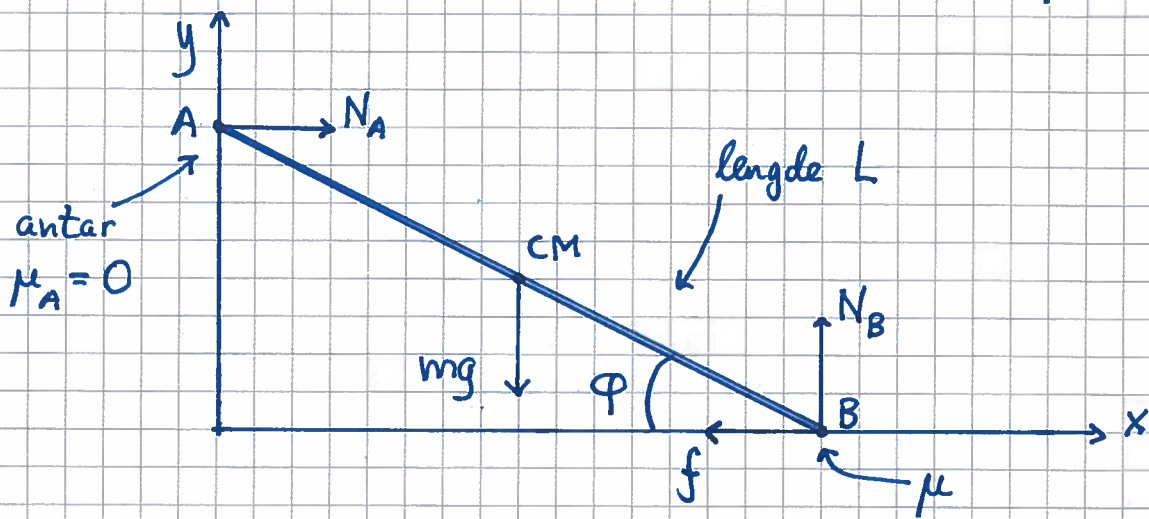
$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s$$

(Se notat for detaljert utledning.)



Eksempler

Eks 1: Glir stigen? Finn minste  $\varphi$  uten at den glir.



Stigen i ro når  $\sum F_x = \sum F_y = \sum \tau = 0$ .

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow f = N_A ; \quad \sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = mg$$

Beregner  $\tau$  relativt  $B$ :  $\sum \tau_B = 0$

$$\Rightarrow mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\varphi - N_A \cdot L \cdot \sin\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} mg \cos\varphi = f \sin\varphi = \mu N_B \sin\varphi = \mu mg \sin\varphi$$

(siden  $\varphi_{\min}$  må tilsvare  $f = f_{\max} = \mu N_B$ )

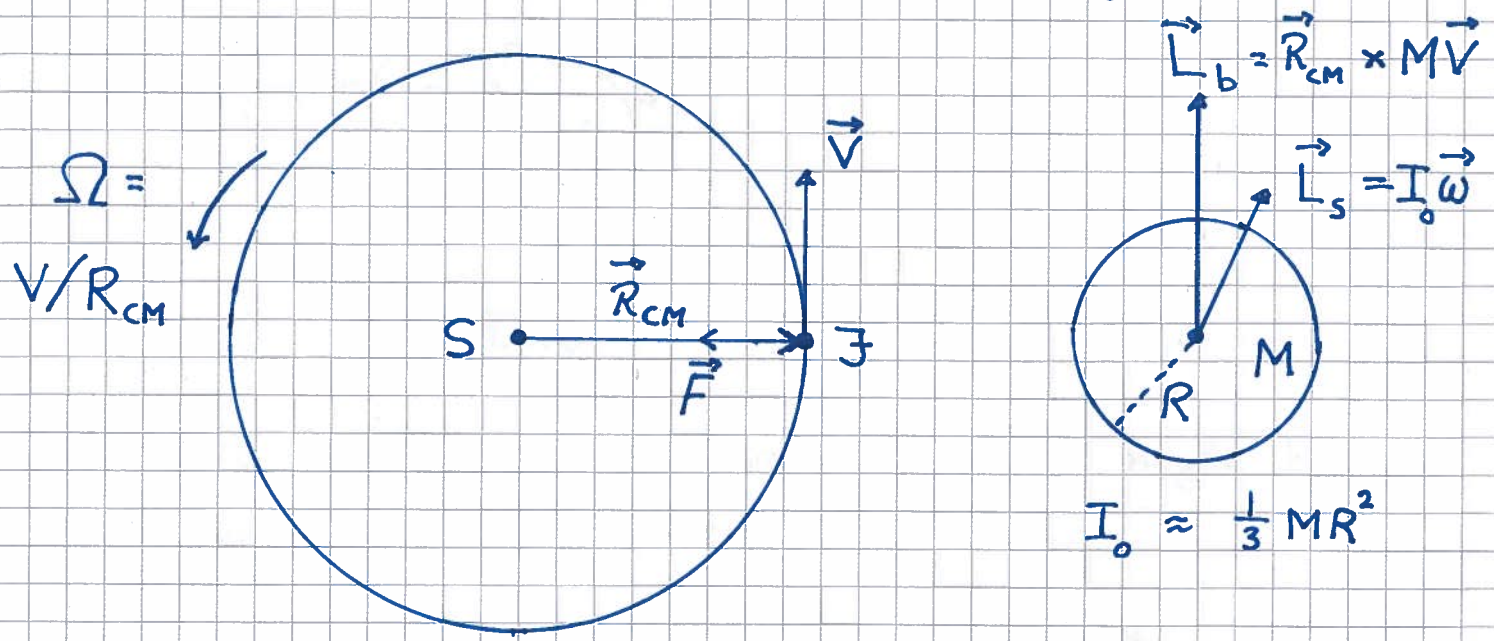
$$\Rightarrow \tan\varphi_{\min} = \frac{1}{2}\mu \Rightarrow \varphi_{\min} = \arctan\left(\frac{1}{2}\mu\right)$$

[Kommentar: Hva hvis  $\mu_A > 0$ ? Har da 4 ukjente krefter, men bare 3 ligninger. Systemet er "statisk ubestemt".

En fjerde ligning oppnås f.eks. ved å ta hensyn til at stigen i virkeligheten ikke er helt stiv, men at den bøyes litt ned på midten.]

Eks 2: Hva er jordas dreieimpuls relativt sola ?

Anta sirkelbane, stivt legeme og fast sol i origo.



$$\vec{\tau} = \vec{R}_{CM} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \text{konstant}$$

(Ikke helt riktig, av diverse grunner. F.eks. er J ikke et <sup>helt</sup> stivt legeme.)

$$L_b = R_{CM} MV = R_{CM}^2 M \Omega \approx (1.5 \cdot 10^{11} \text{ m})^2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ år}}$$

$$\approx 3 \cdot 10^{40} \text{ Js}$$

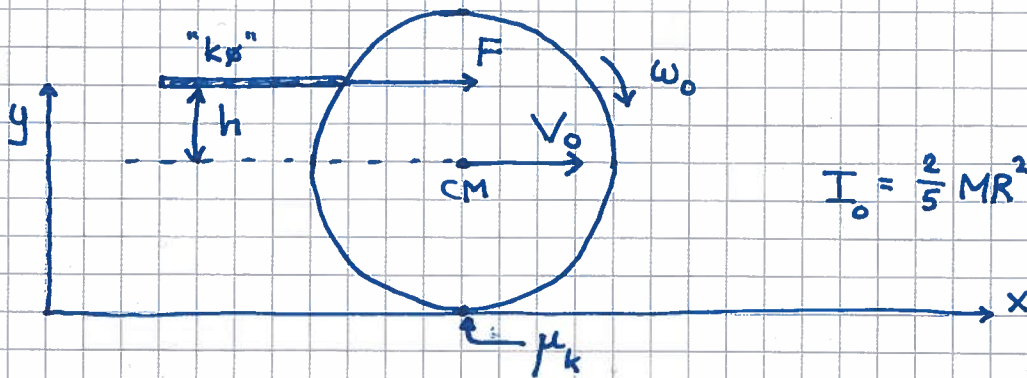
$$L_s = I_0 \omega \approx \frac{1}{3} MR^2 \omega \approx \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (6.37 \cdot 10^6 \text{ m})^2 \cdot \frac{2\pi}{1 \text{ døgn}}$$

$$\approx 6 \cdot 10^{33} \text{ Js} \ll L_b$$

dus  $L \approx L_b$



## Eks 3: Snooker [ LL 6.7 ; øving 6 ]



Kortvarig kraft  $F$ , med varighet  $\Delta t$ , i høyde  $h$  over (evt. under;  $h < 0$ ) senterlinja.

Kan neglisjere friksjonskraften  $f$  i selve støtet ( $f \ll F$ )

$$N2, \text{ transl.: } F = \Delta p / \Delta t \Rightarrow F \cdot \Delta t = M V_0$$

$$N2, \text{ rot. om CM: } \tau = \Delta L / \Delta t \Rightarrow F \cdot h \cdot \Delta t = I_0 \omega_0$$

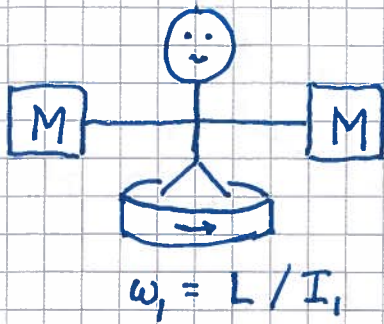
Hvis  $\omega_0 > V_0 / R$  : "Toppenn" } Sluring  
 Hvis  $\omega_0 < V_0 / R$  : "Underskru" }

Ren rulling fra start ( $\omega_0 = V_0 / R$ ) for en bestemt  $h$ -verdi.

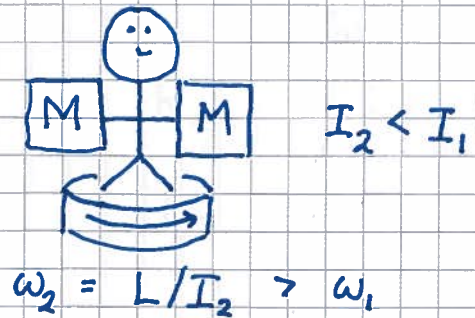
Hvis sluring fra start: Ren rulling etter hvert. Kinetisk friksjon medfører at ~~ω~~  $\omega$  nærmer seg  $V/R$ .

$\tau = 0 \Rightarrow L = I\omega = \text{konstant}$

$\Rightarrow \omega$  øker hvis  $I$  reduseres !



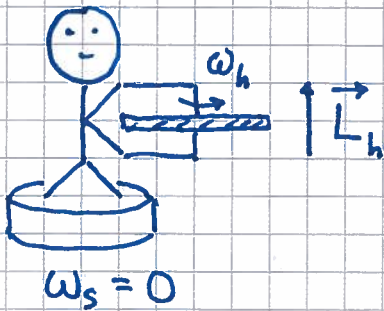
$\tau = 0$   
 $\Delta L = 0$



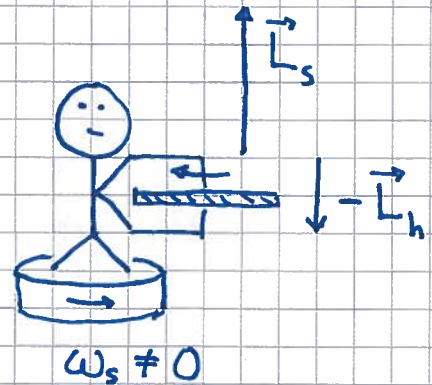
Arbeid gjøres på de to massene og gir økt rotasjonsenergi:

$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} L \omega_1$  ;  $K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} L \omega_2 > K_1$

Eks 5: Student og sykkelhjul



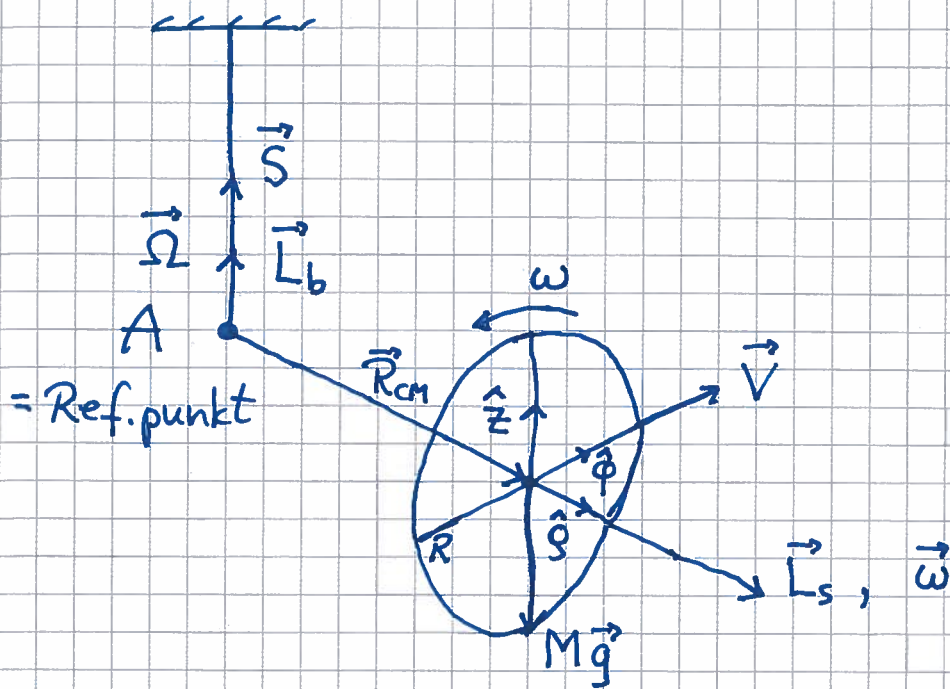
Hjulets snus  
 $\tau_{\text{sykkle}} = 0$   
 $\Delta \vec{L} = 0$



Før:  
 $\vec{L} = \vec{L}_h$

Efter:  
 $\vec{L} = \vec{L}_s - \vec{L}_h$   
 $\Rightarrow \vec{L}_s = 2\vec{L}_h$   
 $\omega_s \neq 0$





$$I_0 \approx MR^2$$

$$M \approx 5 \text{ kg}$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{CM} \approx 0.2 \text{ m}$$

$$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 5 \text{ s}$$

Finn  $\omega$ !

Løsning:

N2 for rotasjon om A:

$$\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A / dt \quad ; \quad \vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s, \quad \text{der}$$

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = R_{CM} \hat{g} \times MV\hat{\phi} = R_{CM} MV\hat{z} = R_{CM}^2 M\Omega\hat{z}$$

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega} = MR^2 \omega \hat{g}$$

Siden  $\omega \gg \Omega$ , dvs  $L_s \gg L_b$ , er  $\vec{L}_A \approx \vec{L}_s = MR^2 \omega \hat{g}$

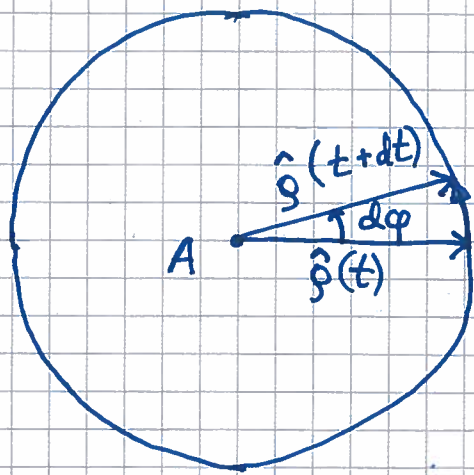
Ytre dreiemoment:

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} \hat{g} \times (-Mg\hat{z}) = R_{CM} Mg \hat{\phi}$$

Dermed:

$$\underbrace{R_{CM} Mg \hat{\phi}}_{\vec{\tau}_A} = \underbrace{MR^2 \omega \frac{d\hat{\phi}}{dt}}_{\dot{\vec{L}}_A}$$

Vektoren  $\hat{g}$  roterer om z-aksen med vinkelhast  $\Omega$ : (70)



$$d\hat{g} = \overbrace{|\hat{g}| \cdot d\varphi}^{\text{buelengden}} \cdot \hat{\varphi} = d\varphi \cdot \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{g}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \hat{\varphi} = \Omega \hat{\varphi}$$

Dermed:

$$R_{CM} M g \hat{\varphi} = M R^2 \omega \Omega \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega = \frac{R_{CM} g}{R^2 \Omega}}}$$

Hjulets (raske!) omløpstid:

$$T_{\omega} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R^2 \cdot 2\pi / T_{\Omega}}{R_{CM} g} = \frac{(2\pi R)^2}{R_{CM} g T_{\Omega}}$$

Talverdier:

$$T_{\omega} \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 5} \text{ s} \approx \frac{2^2}{10} \text{ s} = \underline{0.4 \text{ s}}$$

$$f_{\omega} = 1/T_{\omega} \approx 2.5 \text{ omdreininger pr sekund (Hz)}$$



# Swingninger [OS1 15 ; YF 14 ; LL 9]

(71)

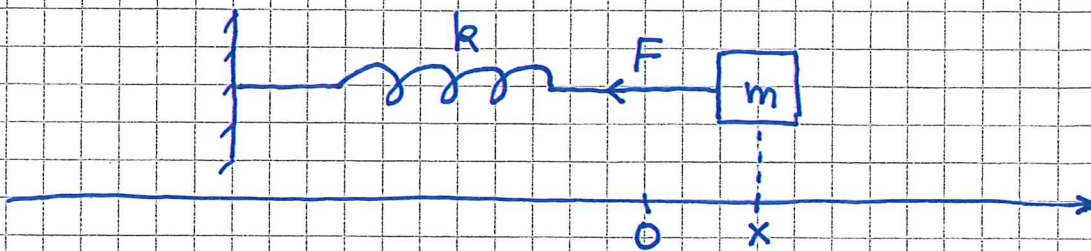
Periodisk oppførsel omkring en likevekt.

En kraft trekker hele tiden systemet tilbake mot likevekt.

Eksempler:

Masse og fjær. Pendler. Atomer i molekyler og krystaller.

## Harmonisk oscilator [OS1 15.1 ; YF 14.2 ; LL 9.1-9.3]



Likevekt,  $F = 0$ , når  $m$  er i posisjon  $x = 0$

$x =$  posisjonen til  $m =$  fjæras forlengelse ( $x > 0$ )  
eller forkortelse ( $x < 0$ )

$F(x) =$  kraft fra fjæra på  $m$ , retning mot likevekt

Ideell fjær oppfyller Hookes lov:

$$\boxed{F = -kx} ; k = \text{fjærkonstanten} ; [k] = \text{N/m}$$

$$\text{N2 : } -kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Vi innfører  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Bevægelsesligning for  
harmonisk oscilator i 1D.



Generell løsning:

$$x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$$

eller

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Eks: Bestem  $A$  og  $\varphi$  når  $x(0) = x_0$  og  $\dot{x}(0) = v_0$

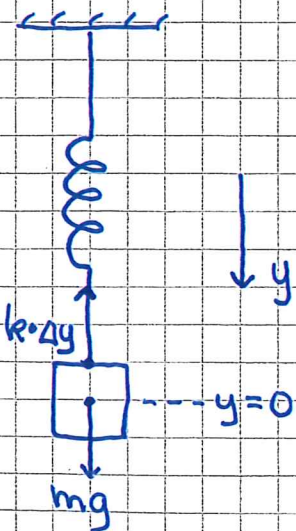
Løsn:  $x_0 = A \cos \varphi$ ,  $v_0 = -\omega_0 A \sin \varphi$

$$\Rightarrow \tan \varphi = -\frac{v_0}{x_0 \omega_0}$$

$$x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2 = A^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = A^2$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}$$

Eks: Harmonisk oscillator i tyngdefeltet



N1 gir fjæras forlengelse i likevekt:

$$k \Delta y = mg \Rightarrow \Delta y = mg/k$$

Velg  $y=0$  i "strukket likevekt".

N2 for  $m$  i posisjon  $y$ :

$$m \ddot{y} = mg - k(\Delta y + y) = -ky$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dvs: Harmonisk svingning omkring strukket likevekt.



Harmoniske svingninger "ligner" på uniform sirkelbevegelse:

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  = utsving fra likevekt

$A$  = amplitude = max utsving ;  $[A] = [x]$

$\omega_0$  = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet ;  $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega_0$  = periode = tid pr hel svingning ;  $[T] = s$

$f = 1/T$  = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet ;  $[f] = Hz$

$\omega_0 t + \varphi$  = svingningens fase

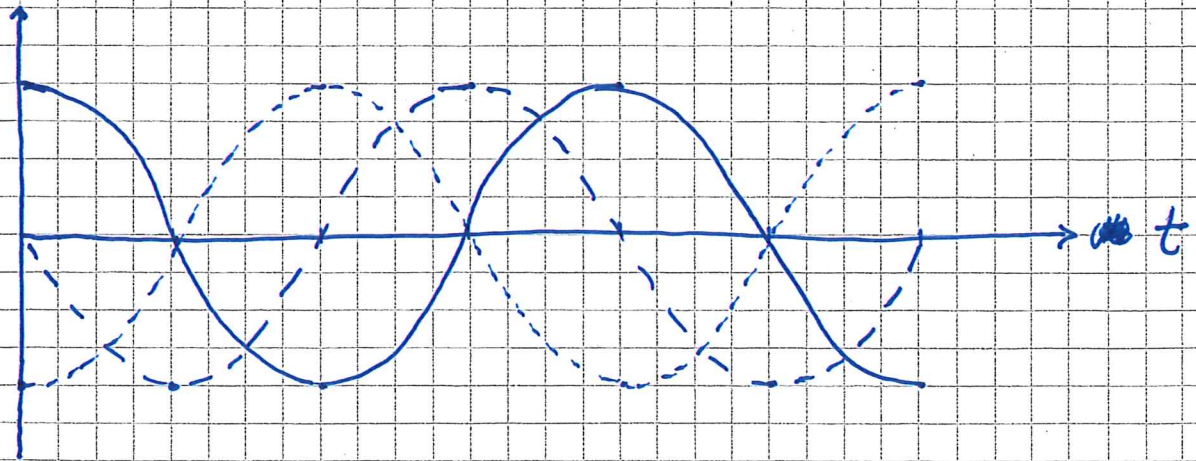
$\varphi$  = fasekonstant ;  $[\varphi] = 1$

Anta  $\varphi = 0$  :

$x(t) = A \cos \omega_0 t$

$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t = \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \pi)$



- x
- - -  $\dot{x}$
- · ·  $\ddot{x}$



# Energi i harmonisk oscillator [OS1 15.2; KF 14.3; LL 9.4]

74

Potensiell energi (Konservativ kraft):

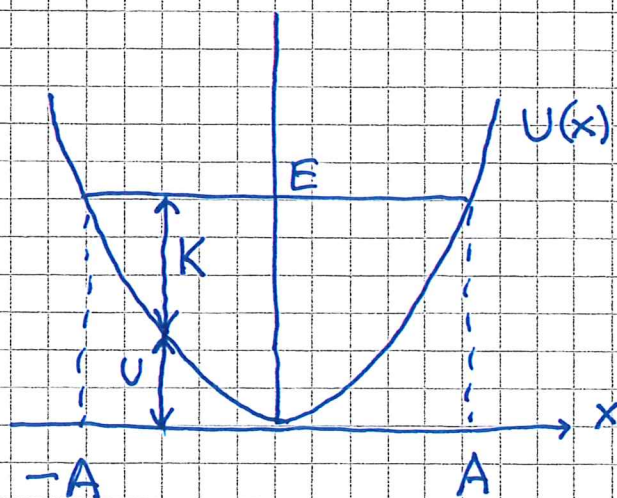
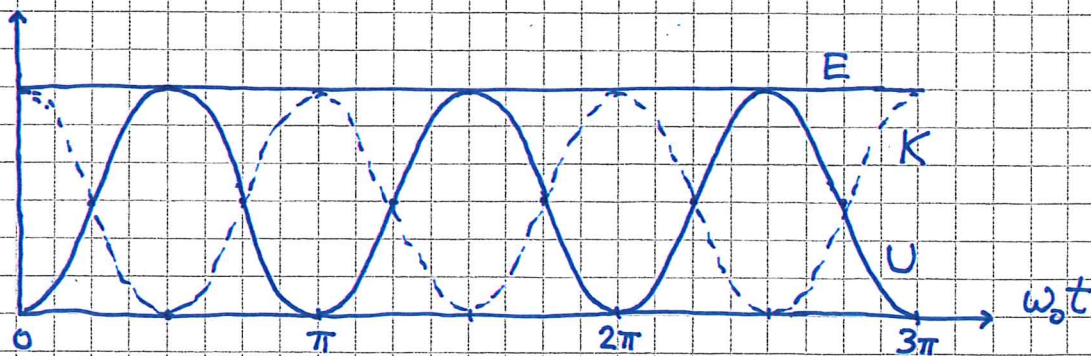
$$U = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2 \omega_0 t$$

Kinetisk energi:

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

Total mekanisk energi:

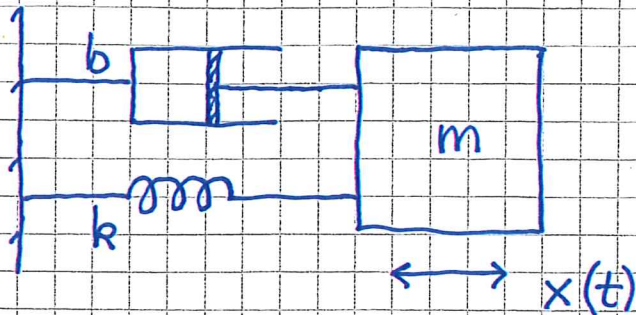
$$E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 ; \text{ uavhengig av } t$$





## Dempet fri svingning [OS1 15.5; YF 14.7; LL 9.7]

Anta friksjonskraft  $-b\dot{x}$  (dvs, som for langsom bevegelse i fluid)



$$N2: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$\text{med } \gamma = b/2m, \quad \omega_0 = \sqrt{k/m}, \quad [\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$$

Erfaring viser:

Svak damping gir svingninger med avtagende amplitude.

Sterk damping gir bevegelse mot likevekt, uten svingninger.

Vi "gjetter"  $x(t)$  på formen  $\exp(-\alpha t)$  og setter inn:

$$[\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2] e^{-\alpha t} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \left\{ 2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2} \right\} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$



Overkritisk demping :  $\gamma > \omega_0$

Generell løsn:  $x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Hvis  $\gamma \gg \omega_0$  (meget sterk demping) :

$$\alpha_2 = \gamma - \gamma \left(1 - \omega_0^2/\gamma^2\right)^{1/2} \approx \gamma - \gamma \left(1 - \omega_0^2/2\gamma^2\right) = \frac{\omega_0^2}{2\gamma} = \frac{k}{b}$$

$$\alpha_1 \approx 2\gamma = b/m \gg \alpha_2$$

$$\Rightarrow x(t) \stackrel{t \gg 1/\alpha_1}{\approx} B e^{-\alpha_2 t} = B e^{-kt/b}$$

Dvs,  $x(t)$  går langsomt mot null, uavhengig av massen  $m$ .

Kritisk demping :  $\gamma = \omega_0$

Da er  $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$ , og generell løsn. er

$$x(t) = (A + Bt) e^{-\gamma t}$$

Svakeste demping som ikke gir svingninger.

Bra i f.eks. støtdempere.



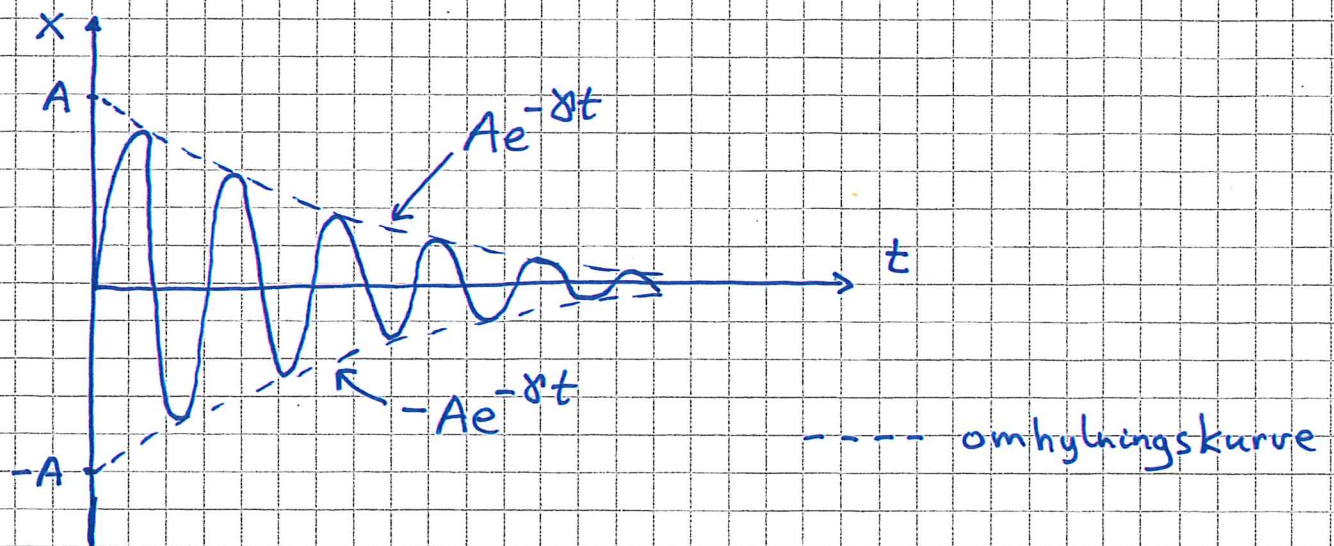
Underkritisk demping :  $\gamma < \omega_0$

$$\alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \gamma \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\Rightarrow \exp(-\alpha t) = \exp(-\gamma t) \cdot [\cos \omega t \pm i \sin \omega t] ; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\Rightarrow \text{Generell l\u00f8sn: } x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) ; \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

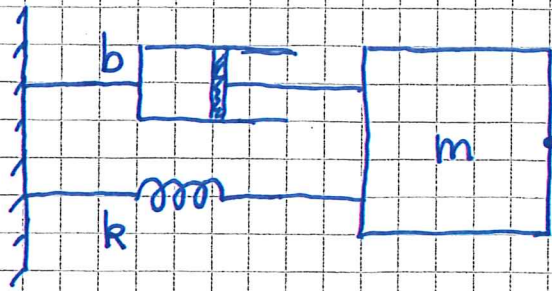
Dus: Harmonisk svingning med eksponentielt avtagende amplitude,  $A \exp(-\gamma t)$ . "Tidskonstanten"  $\tau = 1/\gamma$  avgj\u00f8r hvor raskt amplituden avtar.



Med svak demping, dvs  $\gamma \ll \omega_0$ , er  $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$ .



# Tvingen svingning og resonans [OSI 15.6; YF 14.8; LL 9.9] (78)



Antar harmonisk ytre kraft:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Generell løsning er en sum av en homogen løsning  $x_h(t)$  og en partikulær løsning  $x_p(t)$ , der  $x_h(t)$  oppfyller

$$\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

Dvs,  $x_h(t) \sim \exp(-\gamma t)$  og "dør ut", etter et innsvingningsforløp med varighet ca  $3\tau = 3/\gamma$ .

Etter dette:  $x(t) \approx x_p(t)$

En naturlig gjetning er:  $x(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$

Innsetting gir 2 ligninger for bestemmelse av  $A$  og  $\varphi$ .

Løsning:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2]^{1/2}}; \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

Resonans: Amplituden  $A$  blir stor hvis

$$\gamma \ll \omega_0 \quad \text{og} \quad \omega \approx \omega_0$$

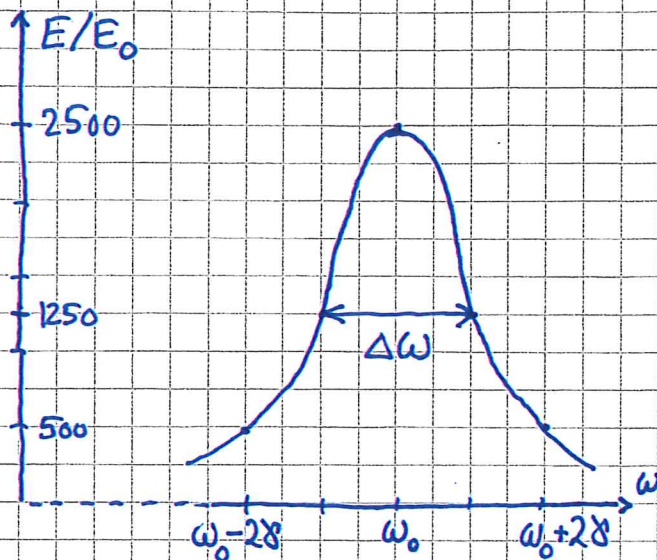


Oscillatorens energi:

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} ; E_0 = F_0^2 / 2k$$

Anta  $\gamma \ll \omega_0$ , f.eks.  $\omega_0 = 100 \gamma$ :

$$E(\omega_0) = 2500 E_0 ; E(\omega_0 \pm \gamma) = 1250 E_0 ; E(\omega_0 \pm 2\gamma) = 500 E_0$$



Resonanskurvens halvverdibredde:  $\Delta\omega \approx 2\gamma$

(Full Width Half Maximum; FWHM)

Oscillatorens Q-faktor:  $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}$

Smal resonanskurve gir stor Q-faktor.

Exp: Mekanisk oscillator

Frie svingninger gir  $T_0 \approx 0.65s$ , dvs  $f_0 \approx 1.5 \text{ Hz}$

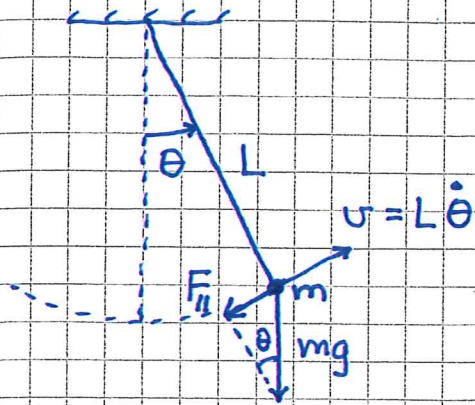
Tvingne svingninger gir stor amplitude når ytre kraft har frekvens ca 1.5 Hz.



## Pendler

### Matematisk pendel [OS1 15.4 ; VF 14.5 ; LL 9.6]

Punktmasse  $m$  i masseløs snor med lengde  $L$



$$N2: F_{||} = ma_{||}$$

$$\text{der } F_{||} = -mg \sin \theta; \quad a_{||} = L \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow -mg \sin \theta = mL \ddot{\theta}$$

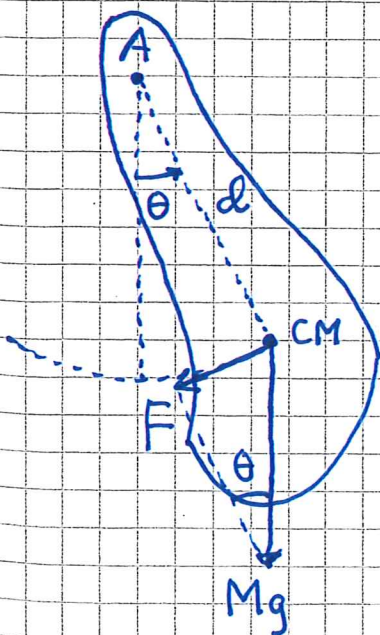
Anta små utsving,  $|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{g/L}$$

Eks: Foucaultpendelen i Realbygget:  $L = 25 \text{ m} \Rightarrow T \approx 10 \text{ s}$ .

### Fysisk pendel [OS1 15.4 ; VF 14.6 ; LL 9.6]

Stivt legeme, masse  $M$ , treghetsmoment  $I$  mhp  $A$



$$N2 \text{ for rot. om fast akse } A: \tau = I \ddot{\theta}$$

$$\text{der } \tau = -F \cdot d = -Mgd \sin \theta$$

$$(\tau > 0 \text{ mot klokke}; \quad \theta > 0 \text{ mot klokke})$$

$$\Rightarrow -Mgd \sin \theta = I \ddot{\theta}$$

$$\text{Anta } |\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta \approx \theta$$

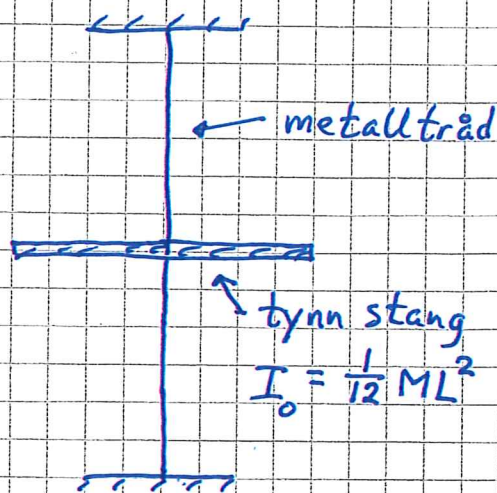
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{Mgd/I}$$



# Torsjionspendel

[OS1 15.4; YF 14.4; LL 9.6]

(81)

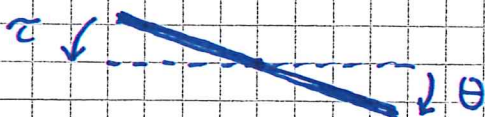


Hookes lov: Vridning av metalltråden en vinkel  $\theta$  gir dreiemoment

$$\tau = -\kappa \theta$$

på stanga;  $\kappa$  er her metalltrådens torsjonsstivhet

Sett langs metalltråden:



N2 for rot. om trådaksen:

$$\tau = I_0 \ddot{\theta} \quad \text{med} \quad \tau = -\kappa \theta$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0; \quad \omega_0 = \sqrt{\kappa / I_0}$$

Exp:  $M = 50 \text{ g}$ ,  $L = 11 \text{ cm}$ ,  $T = 0.8 \text{ s}$

$$\Rightarrow \kappa = I_0 \omega_0^2 = \frac{1}{12} ML^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \approx \underline{0.003 \text{ Nm}}$$



# ELEKTRISITET OG MAGNETISME

①

## I. Elektrostatikk. Ledere og isolatorer

OS2 5-8 ; YF 21-24 ; LHL 19-20

ca 10F ; 2,5 uker

## II. Strøm. Likestrømkretser (DC)

OS2 9-10 ; YF 25-26 ; LHL 21-22

ca 4F ; 1 uke

## III. Magnetostatikk. Magnetisme

OS2 11-12 ; YF 27-28 ; LHL 23, 26

ca 6F ; 1,5 uker

## IV. Elektromagnetisk induksjon. Vekselstrømkretser (AC)

OS2 13-15 ; YF 29-31 ; LHL 24, 25, 27

ca 6F ; 1,5 uker



# I. Elektrostatikk [OS2 5-8; YF 21-24; LHL 19-20]

(2)

## Elektriske ladning [OS2 5.1; YF 21.1; LHL 19.1]

Materie = molekyler, atomer

Atom = kjerne og elektroner

Kjerne = protoner og nøytroner = kjernepartikler

Kjernepartikkel = 3 kvarker

Elementærpartikler = naturens udelelige byggeklosser,  
med kvantisert elektrisk ladning

Partikkel	Symbol	Ladning
Elektron	$e$	$-e$
Opp-kvark	$u$	$+2e/3$
Ned-kvark	$d$	$-e/3$
Elektron-nøytrino	$\nu_e$	0
Foton	$\gamma$	0

OSU

(I alt 17 elementærpartikler i Standardmodellen  
for partikkelfysikk.)

$e$  = elementærladningen (Robert Millikan, oljedråpeforsøk  
1909, nobelpris 1923)

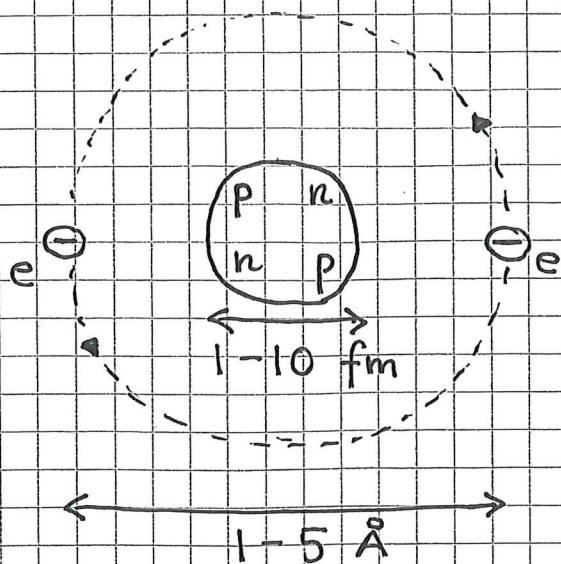
$$\text{Nøytron (n)} : 1u + 2d \Rightarrow q_n = 0$$

$$\text{Proton (p)} : 2u + 1d \Rightarrow q_p = e$$

Symbol for ladning :  $q, Q$



# Klassisk bilde av atom: (Niels Bohr 1913, NP1922) (3)



$$m_e \approx 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_p \approx m_n \approx 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

Dvs: Nesten all masse i kjernen

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m}$$

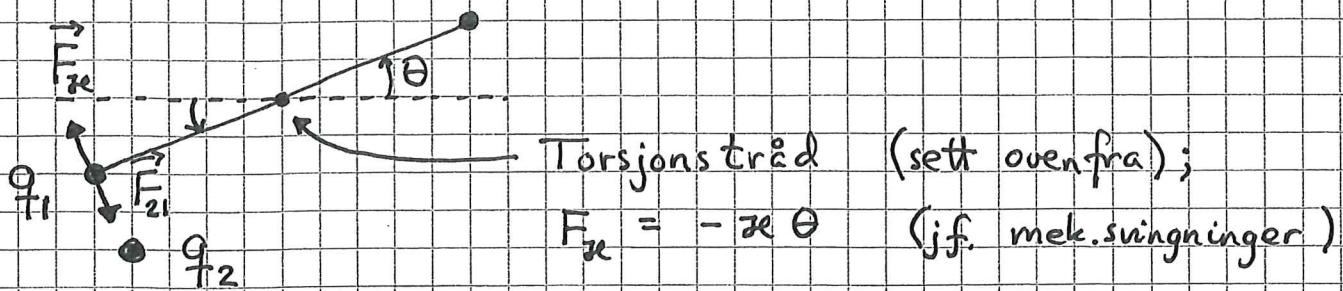
$$1 \text{ Å (ångström)} = 10^{-10} \text{ m}$$

- Nøytralt atom med atomnummer  $Z$  har  $Z$  protoner og  $Z$  elektroner;  $Q = Ze - Ze = 0$
- Ioner er atomer eller molekyler med  $Q \neq 0$ , f.eks:
  - $O^{2-}$  = oksygenatom med 10 elektroner;  $Z=8$ ;  $Q = -2e$
  - $O_2^-$  = oksygenmolekyl med 17 elektroner;  $Q = -e$
- Isotoper er atomer av samme grunnstoff med ulikt antall nøytroner i kjernen, f.eks:
  - $^{16}O$ ,  $^{17}O$ ,  $^{18}O$  har hhv 8, 9, 10 nøytroner
- Netto elektrisk ladning i et isolert system er bevart.
  - Eks:  $\beta^-$  decay
  - $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$  ( $\bar{\nu}_e$  = antielektronnøytrino,  $q=0$ )
  - F.eks  $^{234}_{90}\text{Th} \rightarrow ^{234}_{91}\text{Pa} + e + \bar{\nu}_e$  (+ energi)
  - Halveringstid  $t_{1/2} \approx 24$  døgn
  - Th = thorium; Pa = protactinium



# Coulombs lov [OS2 5.3 ; YF 21.3 ; LHL 19.3] (4)

C.A. de Coulomb ca 1785 :

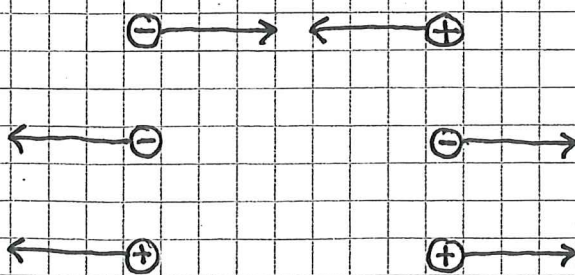


Coulomb fant at  $F_{21} \sim q_1 \cdot q_2 / r_{12}^2$ , dvs

$$\vec{F}_{21} = K_e \cdot \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Samme form som gravitasjonsloven ( $F_{21} = G \cdot m_1 m_2 / r_{12}^2$ ),  
og NB er oppfylt ( $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ ).

Samme type ladning  $\Rightarrow$  Frastøtning  
Ulik type ladning  $\Rightarrow$  Tiltrekning





## Enhet for ladning [OS2 5.1; TF 21.3; LHL 19.1] (5)

$$\text{SI: } [Q] = C \text{ (coulomb)}$$

- $1C = 1As =$  mengde ladning som passerer tverrsnittet av en leder ~~per~~ pr sekund når strømstyrken er  $1A$  (ampere)

- $1C$  er ladningsmengden på hver av to like legemer som i innbyrdes avstand  $1m$  frastøter hverandre med en kraft  $8.987551787 \cdot 10^9 N$ ; dvs

$$K_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/C^2$$

$$\epsilon_0 = 8.854187817 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

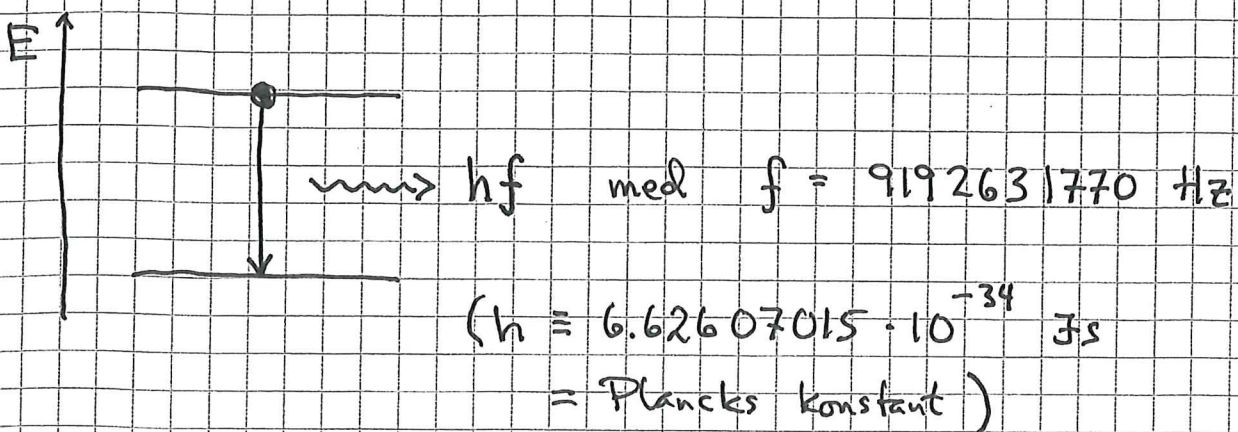
= vakuumpermittiviteten

- Etter ~~20~~<sup>20</sup>.05.2019:

$$e \equiv 1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\Rightarrow 1A = 1C/s$$

$1s = 9192631770$  perioder av stråling pga en elektronovergang mellom hyperfinsplittede nivåer i  $^{133}\text{Cs}$





# Elektrisk felt [OS2 5.4-5.5 ; YF 21.3-5 ; LHL 19.3-5]

⑥



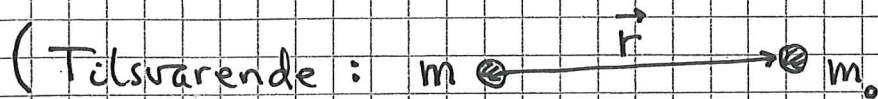
Referanseladning

Testladning

Kraft fra  $q$  på  $q_0$  :  $\vec{F} = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$

Elektrisk felt  $\stackrel{\text{def}}{=} \text{El. kraft pr ladningsenhet}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{F}/q_0 ; [E] = \text{N/C}}$$



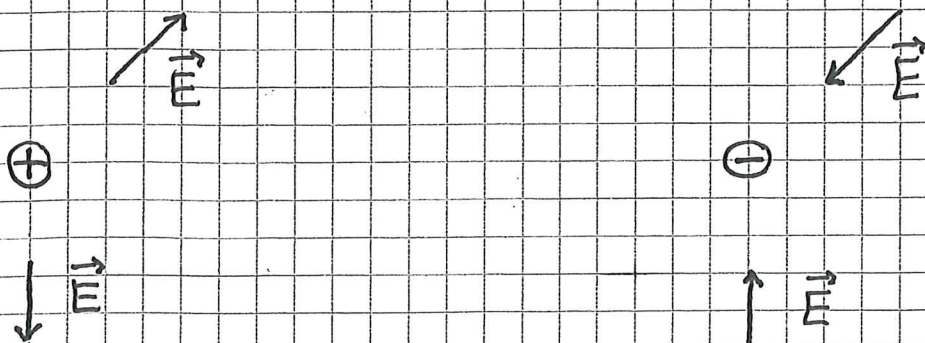
Kraft fra  $m$  på  $m_0$  :  $\vec{F} = -G \frac{mm_0}{r^2} \hat{r}$

Gravitasjonsfelt (Tyngdefelt) :  $\vec{g} = \vec{F}/m_0$  )

Punktladning  $q$  omgir seg med et el. felt  $\vec{E}$  som i avstand  $\vec{r}$  er

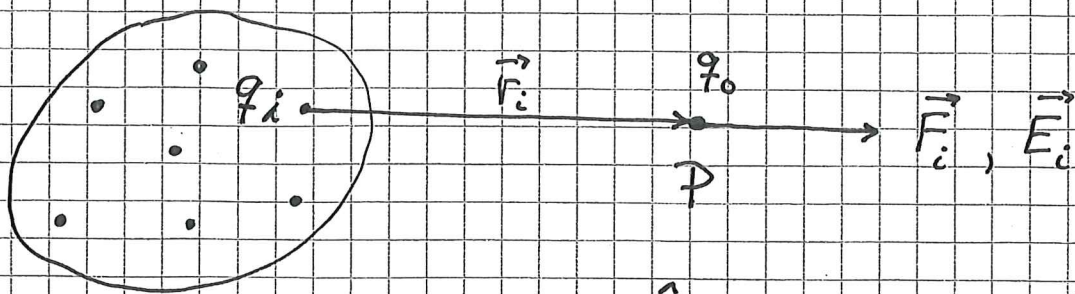
$$\boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}}$$

Radielt bort fra pos. ladm. og radielt inn mot neg. ladm. :





Superposisjonsprinsippet gjelder for krefter, og dermed for elektrisk felt: Total kraft og totalt felt fra flere ladninger er vektorsummen av enkeltbidragene. (7)

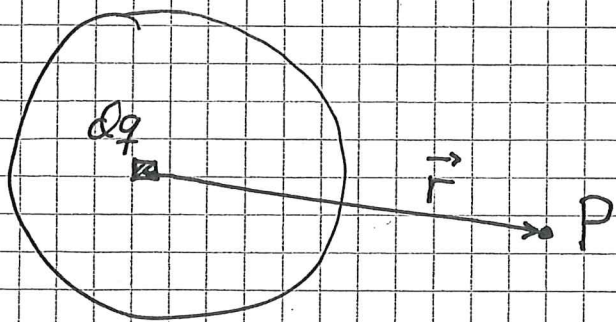


$$\vec{E} = \vec{F} / q_0 = \sum_i \frac{q_i q_0 \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2 q_0} = \sum_i \frac{q_i \hat{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} = \sum_i \vec{E}_i$$

= el. felt i posisjon P fra ref. ladm.  $\{q_1, \dots, q_n\}$

Dersom kontinuerlig fordeling av ref. ladm.:

$$q_i \rightarrow dq ; \quad \sum_i \rightarrow \int$$



El. felt i pos. P:

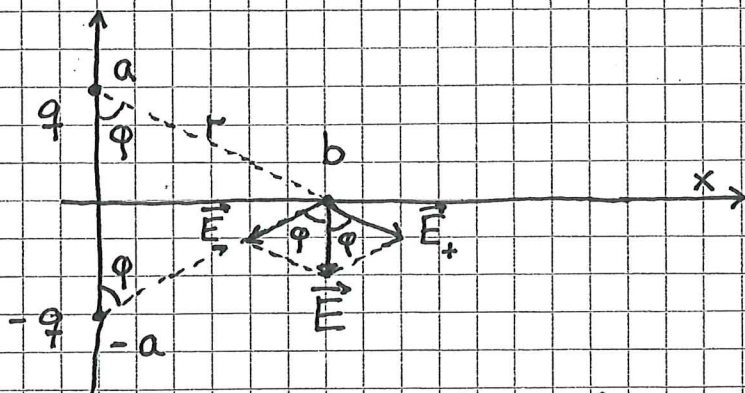
$$\vec{E} = \int \frac{\hat{r} dq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



# Ekse 1: Elektrisk dipol

(8)

Punktladn.  $\pm q$  i  $y = \pm a$ ; hva er  $\vec{E}$  i  $x = b$  (på x-aksen)?



$$\vec{E} = -E \hat{y}$$

$$E = 2E_+ \cos \varphi \quad (E_- = E_+)$$

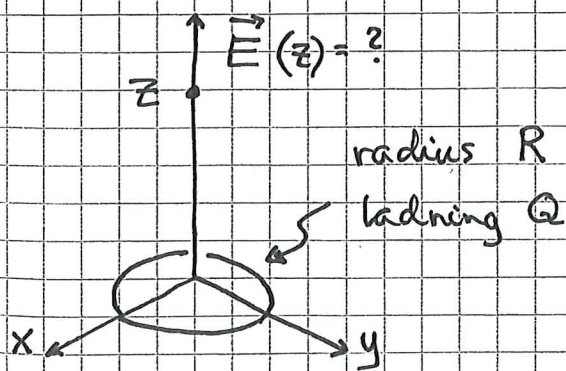
$$E_+ = q / 4\pi\epsilon_0 (a^2 + b^2)$$

$$\cos \varphi = a / \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\hat{y} \cdot 2qa / (a^2 + b^2)^{3/2} 4\pi\epsilon_0$$

$E(r) = \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sim 1/r^3$ ; dvs  $E(r)$  går raskere mot null enn for en punktladning når  $r$  øker.

# Ekse 2: Jevn ladet ring

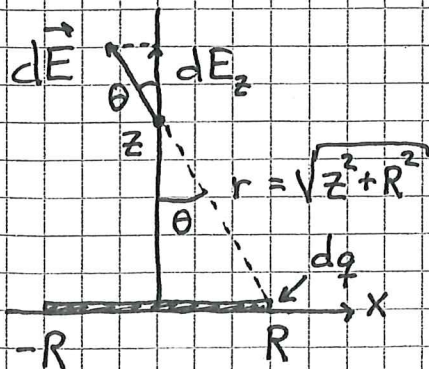


Pga symmetri er

$$\vec{E}(z) = E_z(z) \hat{z}$$

på z-aksen.

Bidrag fra liten ladning  $dq$ , f.eks. på x-aksen:



$$dE_z = dE \cdot \cos \theta$$

$$dE = dq / 4\pi\epsilon_0 r^2$$

$$\cos \theta = z/r$$



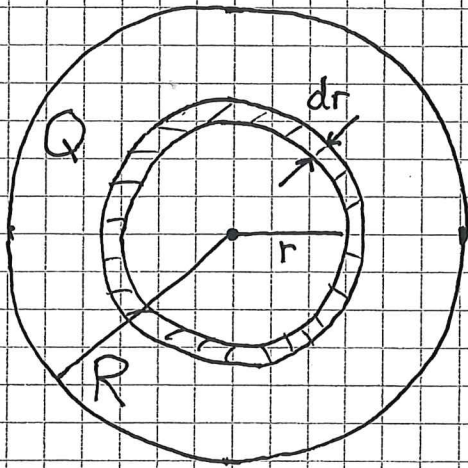
$$\Rightarrow E_z(z) = \int dE_z = \frac{z}{4\pi\epsilon_0 r^3} \int dq = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \quad (9)$$

Rimelig: Riktig enhet.  $E_z(0) = 0$ .  $E_z(-z) = -E_z(z)$ .

$$E_z(z) \stackrel{z \gg R}{\approx} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}; \text{ som punktladn. } Q \text{ i origo.}$$

Eks 3: Jevnt ladet skive

= sum av tynne ringer (jfi samme type ide ved beregning av treghetsmoment for ring og skive)



Ladning på tynn ring med radius  $r$  og bredde  $dr$ :

$$dq = Q \cdot \frac{dA}{A} = Q \cdot \frac{2\pi r dr}{\pi R^2}$$

Bidrar med el. felt

$$dE_z = \frac{dq \cdot z}{4\pi\epsilon_0 (r^2 + z^2)^{3/2}}$$

på  $z$ -aksen (symmetriaksen; ut av planet)

$\Rightarrow$  Totalt el. felt på symmetriaksen:

$$E_z = \int dE_z = \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left[ - (r^2 + z^2)^{-1/2} \right]_0^R$$

$$= \frac{Qz}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ \frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right\}$$

$$= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + R^2/z^2}} \right\}$$



Svaret er rimelig: Langt unna skiva er  $z \gg R$ .

Da er  $(1 + R^2/z^2)^{-1/2} \approx 1 - R^2/2z^2$  slik at

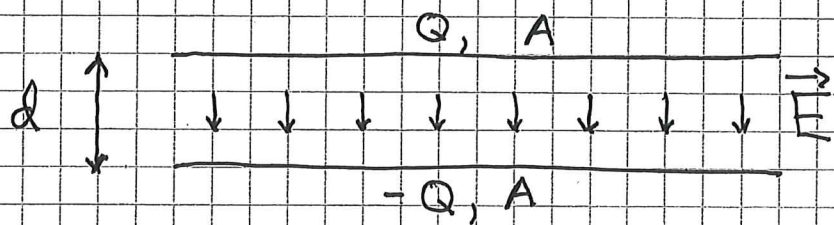
$E_z \approx \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z^2}$ , som er felt i avstand  $z$  fra en punktladning  $Q$  i origo.

Nær skiva, for  $z \ll R$ , er feltet konstant:

$$E_z \approx \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

med  $\sigma = Q/\pi R^2 =$  skivas ladning pr flateenhet.

Et nyttig resultat: En parallelplatekondensator er to parallelle metallplater som kan tilføres like stor ladning med motsatt fortegn,  $\pm Q$ :



Med liten avstand  $d$  mellom platene blir

$$E \approx 2 \cdot \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (\sigma = Q/A)$$

mellom platene, og

$$E \approx 0$$

utenfor platene.



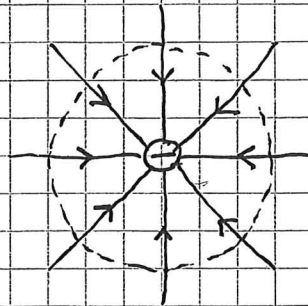
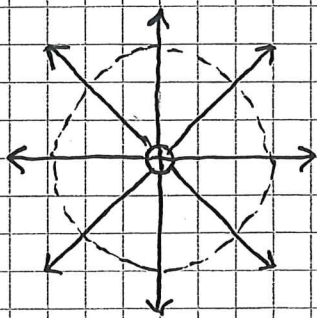
## Feltlinjer for $\vec{E}$ [OS2 5.6; YF 21.6; LHL 19.6] (11)

Gir et visuelt bilde av  $\vec{E}$  i området omkring ladningen (e). Retning: Feltlinjene  $\parallel \vec{E}$  overalt.

Feltstyrke:  $E = |\vec{E}|$  er prop. med antall feltlinjer som krysser en flate, pr flateenhet.

### Eks 1: Punktladning

Feltlinjer starter / ender på pos. / neg. ladning og går radielt utover / innover:



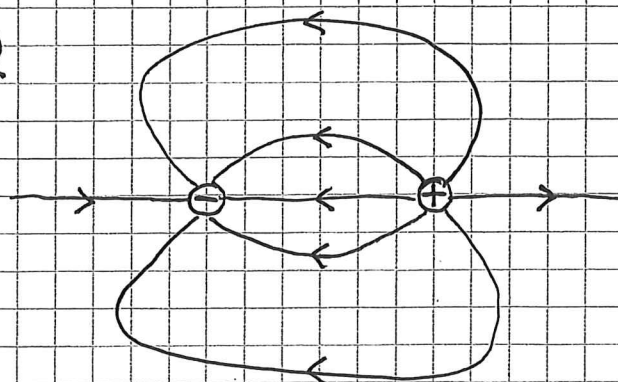
Med  $N$  feltlinjer ut/inn gjennom kuleflate med radius  $r$  og areal  $4\pi r^2$  blir

$$\text{feltlinjetettheten } N/A = N/4\pi r^2$$

$$\text{og feltstyrken } E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$$

på kuleflaten. Dvs, både  $N/A$  og  $E$  er prop. med  $1/r^2$ , slik at  $E$  er prop. med  $N/A$ , som foreskrevet.

### Eks 2: Dipol





# Elektrisk dipolmoment [OS2 5.7; YF 21.7; LHL 19.10] (12)

Enkel dipol,  har dipolmoment

$$\vec{p} = q\vec{d}$$

$$[p] = \text{C} \cdot \text{m}$$

System med flere punktladninger  $q_i$  i pos.  $\vec{r}_i$ :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

Kontinuerlig ladningsfordeling:

$$\vec{p} = \int \vec{r} dq$$

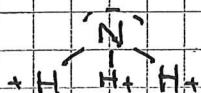
NB: Har alltid null nettoladning for en elektrisk dipol,

$$Q = \sum_i q_i = 0 \quad \text{evt} \quad Q = \int dq = 0$$

Anvendelser:

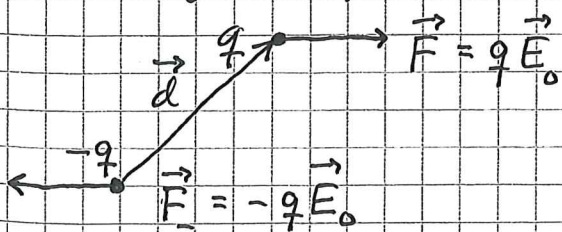
- Molekyler som  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{NH}_3$  ... er permanente el. dipoler.

$|\vec{p}|$  sier i hvor stor grad molekylet er polarisert



- Symmetri kan gi  $p = 0$ :  $0 = 0 = 0$

- Molekylære dipoler rettes inn langs et ytre felt  $\vec{E}_0$ :

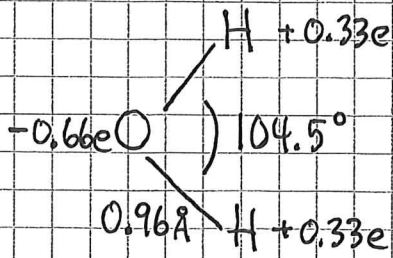


Stoffet polariseres.

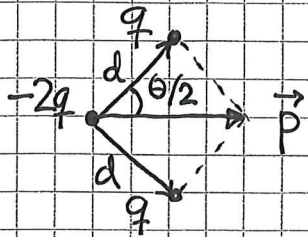
(Mer om materialers elektriske egenskaper snart!)



# Eks 1: $H_2O$ , punktladningsmodell



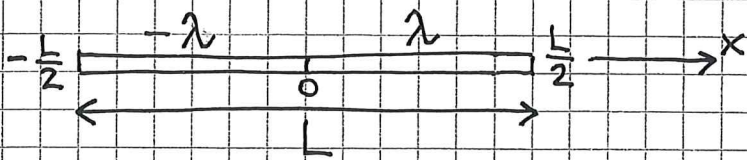
Hva er  $\vec{p}$ ?



$$p = 2 q d \cos \frac{\theta}{2} = 2 \cdot 0.33e \cdot 0.96 \text{ \AA} \cdot \cos 52.25^\circ$$

$$= \underline{0.39 \text{ e\AA}} = 6.2 \cdot 10^{-30} \text{ Cm}$$

# Eks 2: Stavedipol



$\pm \lambda =$  ladning pr lengdeenhet

Ladningsparet  $\pm dq = \pm \lambda dx$  i posisjon  $\pm x$  bidrar med

$$d\vec{p} = 2 \times \lambda dx \hat{x}$$

$\Rightarrow$  Totalt dipolmoment:

$$\vec{p} = \int d\vec{p} = \int_0^{L/2} 2 \times \lambda dx \hat{x} = 2\lambda \hat{x} \int_0^{L/2} x^2 = \underline{\underline{\frac{1}{4} \lambda L^2 \hat{x}}}$$

Enhet:  $[\lambda L^2] = \frac{C}{m} \cdot m^2 = C \cdot m$ ; OK,

$p = \frac{1}{4} \lambda L^2$  tilsvarer to punktladninger  $\pm \lambda \cdot \frac{L}{2}$

i innbyrdes avstand  $L/2$ ; ikke unimelig !!

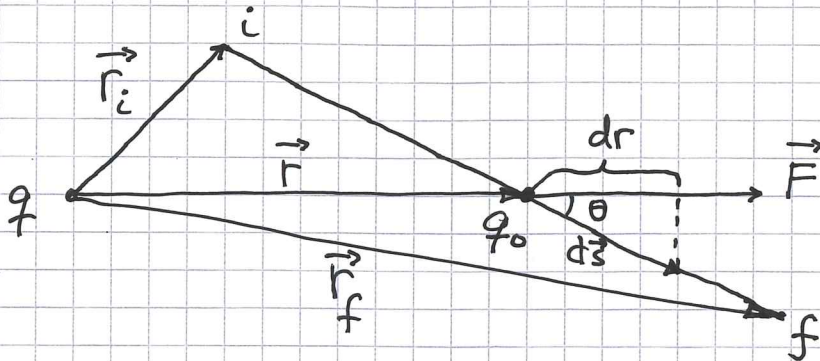


# Potensiell energi. Elektrisk potensial

(14)

[OS2 7.1-2 ; YF 23.1-2 ; LHL 19.9, 20.3]

Pot. energi  $U$  for ladningspar  $q$  og  $q_0$  :



$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot d\vec{s} &= F \cdot ds \cdot \cos\theta \\ &= F \cdot dr\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_f - U_i \stackrel{\text{def}}{=} - \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{r_i}^{r_f} \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_f} - \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r_i}\end{aligned}$$

Her er det da naturlig å velge  $U=0$  for  $r \rightarrow \infty$  slik at

$$U(r) = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

er pot. energi for ladningsparet  $q, q_0$  i innbyrdes avstand  $r$ .

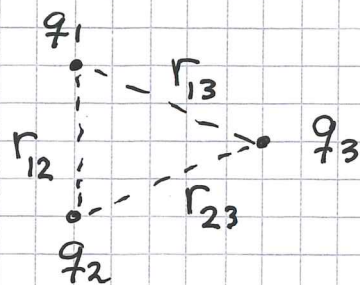
Jf. gravitasjon og massepar  $M$  og  $m$ , der  $M$  (f.eks) er jordmassen. Da var det naturlig å velge  $U=0$  for avstand  $r=R$  = jordradien mellom  $m$  og (sentrum av)  $M$ , slik at

$$U(r=R+h) = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R+h} \stackrel{h \ll R}{\approx} m \cdot \frac{GM}{R} \cdot h = mgh$$



I et system med flere ladninger vil alle  $q_i$  og  $q_j$  vekselvirke parvis og bidra med (15)

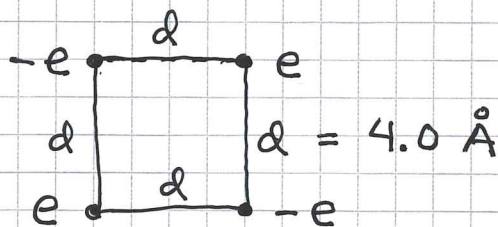
$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}}$$



til total pot. energi  $U$ , dvs

$$\begin{aligned} U &= U_{12} + U_{13} + \dots + U_{1n} \\ &+ U_{23} + \dots + U_{2n} + \dots + U_{n-1,n} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^n U_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i < j} U_{ij} \\ &= \underline{\underline{\sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{4\pi \epsilon_0 r_{ij}}}} \end{aligned}$$

Eks: Bestem  $U$  og dipolmomentet  $p$  for systemet



Løsn:

$$\begin{aligned} U &= \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 d} \left\{ 4 \cdot (-1) + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \\ &= \left[ 9 \cdot 10^9 \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2 / 4.0 \cdot 10^{-10} \right] \cdot (-2.59) \text{ J} \\ &= \underline{\underline{-1.5 \cdot 10^{-18} \text{ J}}} \end{aligned}$$

$p = 0$  (sum av  $\longrightarrow$  og  $\longleftarrow$ , hver med abs.verdi  $e \cdot d = 4.0 \text{ eÅ}$ )



Elektrisk potensial  $\stackrel{\text{def}}{=} \text{pot. energi pr ladningsenhet}$

$$\Rightarrow V = \frac{U}{q_0} \quad ; \quad [V] = \frac{J}{C} = V \text{ (volt)}$$

For laddn. par  $q, q_0$  i inbyrdes avstand  $r$ :

$$U = q q_0 / 4\pi\epsilon_0 r. \quad \text{Punktladdn. } q \text{ omgir seg dermed med}$$

potensialet

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Coulombpotensialet

Potensialforskjell mellom to posisjoner  $f$  og  $i$ :

$$\Delta V = \Delta U / q_0 = - \int_i^f (\vec{F} / q_0) \cdot d\vec{s} = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow V_f - V_i = - \int_i^f \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

- Ser at  $[E] = V/m$  (mer brukt enn  $N/C$ )
- Energienheten  $eV$  (elektronvolt) = elementærladningen  $e$  multiplisert med potensialforskjellen  $1V$

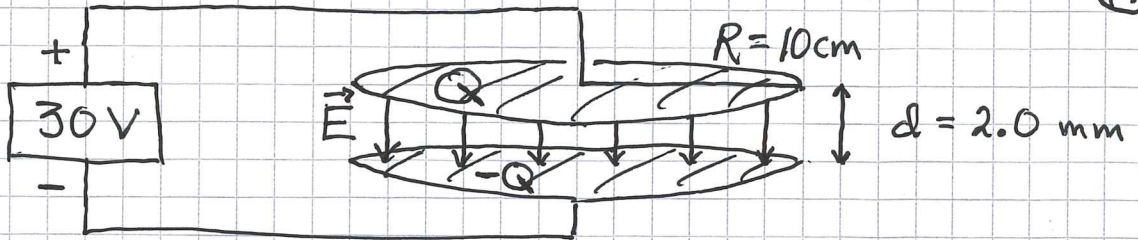
$$\Rightarrow \underline{1 eV} = 1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot 1 \frac{J}{C} = \underline{1.6 \cdot 10^{-19} J}$$

Hensiktsmessig energienhet på atomært nivå!



Eks :

(17)



Bestem ladningen  $\pm Q$  på metallplatene.

Løsn: Fra s. 10 er  $E = \sigma/\epsilon_0 = Q/A\epsilon_0$  mellom platene og  $E=0$  utenfor. Da blir

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_+^- \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \cdot d = \frac{Q \cdot d}{A \cdot \epsilon_0}$$

slik at

$$Q = \frac{\Delta V A \epsilon_0}{d} = \frac{30V \cdot \pi \cdot (0.10m)^2 \cdot 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2}{2.0 \cdot 10^{-3} \text{ m}}$$

$$= 4.2 \cdot 10^{-9} \text{ C} = \underline{\underline{4.2 \text{ nC}}}$$

Siden  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$ , peker  $\vec{E}$  i retning lavere potensial.

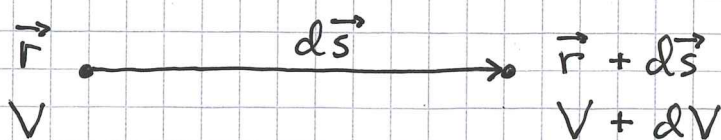
Vi vet fra før at  $\vec{E}$  har retning fra pos. ladd. mot neg. ladd.

Dermed må det være høyere potensial ved pos. ladd. enn ved neg. ladd. i et system.

I eks. ovenfor: 30 V høyere pot. på pos. ladd plate enn på neg. ladd plate.



# Beregning av $\vec{E}$ fra $V$ [OS2 7.4; YF 23.5; LHL 19.9] (18)



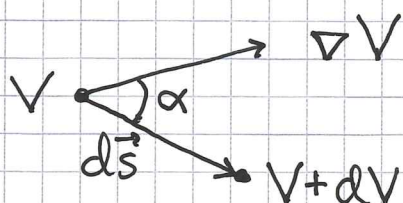
$$\begin{aligned}dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\&= \left\{ \hat{x} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial V}{\partial z} \right\} \cdot \left\{ \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz \right\} \\&= \underbrace{\nabla V} \cdot d\vec{s} \\&= \text{gradienten til } V\end{aligned}$$

Dessuten er  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$

Da må vi ha sammenhengen

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$$

Tolkning av vektoren  $\nabla V$ :



$$\begin{aligned}dV &= \nabla V \cdot d\vec{s} \\&= |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos \alpha\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Får max. potensialendring  $dV$  når forflytningen  $d\vec{s}$  foretas i samme retning som  $\nabla V$ .

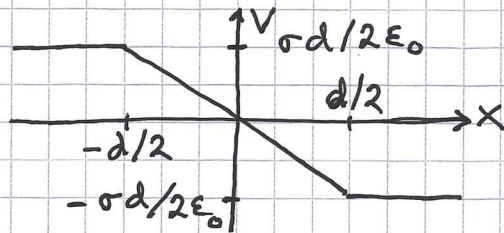
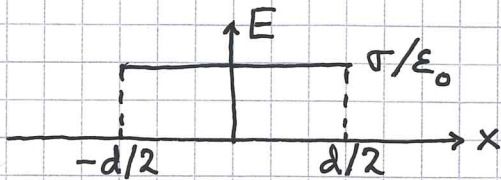
Dvs:  $\nabla V$  er vektor som peker i den retningen som  $V$  øker raskest, og da er  $|\nabla V|$  endringen i  $V$  pr lengdeenhet. Samtidig er  $|\vec{E}| = |\nabla V|$ .



Eks: Bestem  $\vec{E}(x)$  og  $V(x)$  mellom to store plater i  $x = \pm d/2$  med ladning hvor  $\mp \sigma$  pr flateenhet. Velg  $V=0$  i  $x=0$ .

Løsn: For  $|x| < d/2$  er  $\vec{E} = \hat{x} \sigma/\epsilon_0$ , og dermed  $dV/dx = -\sigma/\epsilon_0$ , dvs  $V(x) = -\sigma x/\epsilon_0$ .

Utenfor platene,  $|x| > d/2$ , er  $E=0$ , og dermed  $V = \text{konstant}$ .

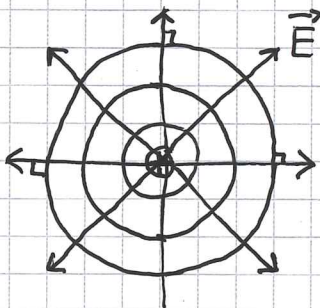


Ekipotensialflater [OS2 7.5; YF 23.4; LHL 19.11]

er flater med  $V = \text{konst}$ . Hvis  $d\vec{s}$  er en forflytning på en ekipotensialflate, er  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ , dvs  $\vec{E} \perp d\vec{s}$

$\Rightarrow \vec{E} \perp \text{ekipotensialflatene}$

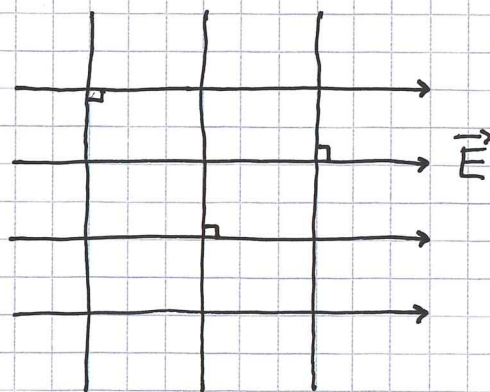
Eks 1: Punktladning



$\vec{E}$  radielt

$\Rightarrow$  ekipot. flatene er kuleskall

Eks 2: Uniformt  $\vec{E}$ -felt



...  $V_0$   $V_0 - \Delta V$   $V_0 - 2\Delta V$  ...

ekipot. flatene er plan normalt på  $\vec{E}$



# Materialers elektriske egenskaper

20

## Ledere. Metaller [OS2 7.5; YF 22.5; LHL 19.8]

Har frie ladninger (typisk 1 eller 2 frie elektroner pr atom i et metall) som vil settes i bevegelse hvis de utsettes for en nettokraft.

Dermed, i elektrostatisk likevekt :

- $\vec{E} = 0$  inni et metall.

$\vec{E} \neq 0$  ville gi kraft  $\vec{F} = -e\vec{E}$  på de frie elektronene, og dermed ikke likevekt.

- All netto ladning ligger på overflaten av et metall.

Ikke uten videre opplagt! Skyldes at  $F(r) \sim 1/r^2$ .

Se evt. Gauss' lov (ikke pensum).

- På overflaten til et metall (med nettoladning) står  $\vec{E}$  normalt på overflaten.

$E_{\parallel} \neq 0$  ville gi kraft  $F_{\parallel} = -eE_{\parallel}$  på de frie elektronene.

$E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$  ;  $\sigma$  = overflatens ladn. pr flateenhet.

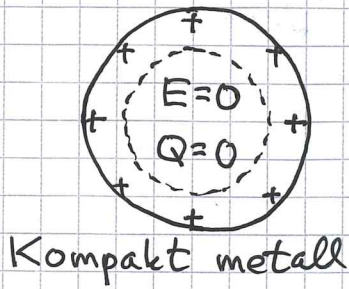
- Et stykke metall i likevekt er et ekvipotensial.

$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$  ; inni er  $\vec{E} = 0$  og på overflaten er  $\vec{E} \perp d\vec{s}$ .

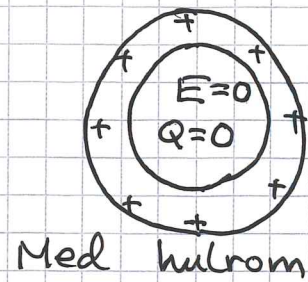


- Metall med hulrom har  $E=0$  i hulrommet og all nettoladning på ytre overflate.

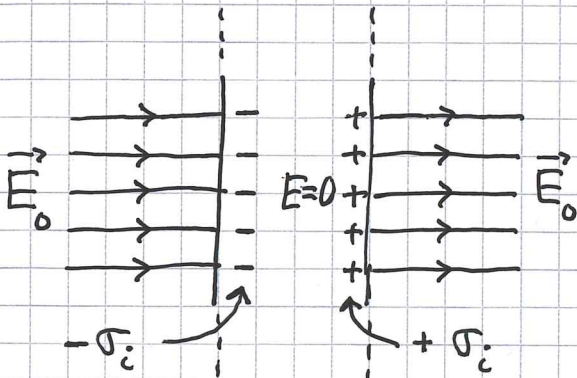
Bevis :



Ta bort en bit inni. Dette påvirker ingen nettoladning!

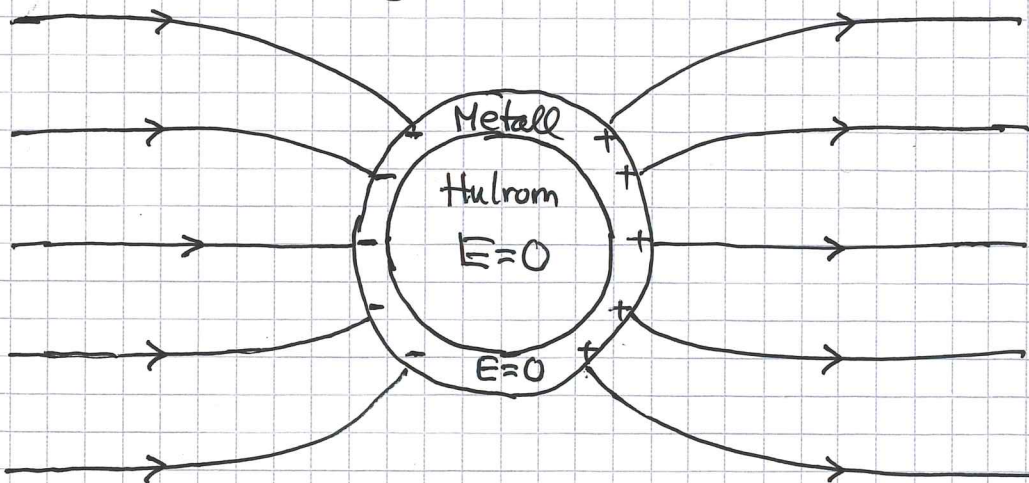


Eks 1: Metallskive i uniformt ytre felt  $\vec{E}_0$



Ytre felt  $\vec{E}_0$  trekker frie elektroner til venstre overflate. Likevekt når induisert overflateledning er  $\pm \sigma_i$  med  $\sigma_i = \epsilon_0 E_0$ . Tilhørende induisert felt er da  $\vec{E}_i = -\vec{E}_0$ , og totalt felt inni er  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$ .

Eks 2: Faradaybur; elektrostatisk skjerming



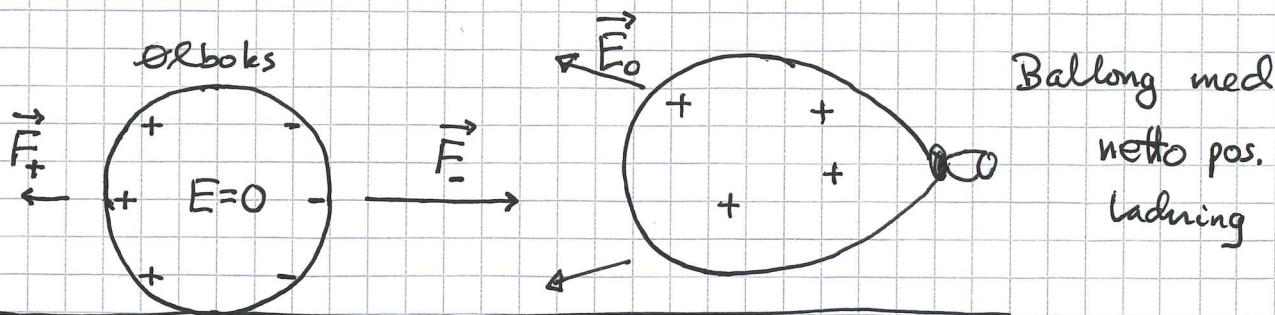
Ytre felt  $\vec{E}_0$   
(Totalt felt  $\vec{E}$  blir forskjellig fra  $\vec{E}_0$  nær metallboksen.)

Med uniformt ytre felt  $\vec{E}_0$  blir det null nettokraft på metallboksen.



### Eks 3: Metallboks i inhomogent felt

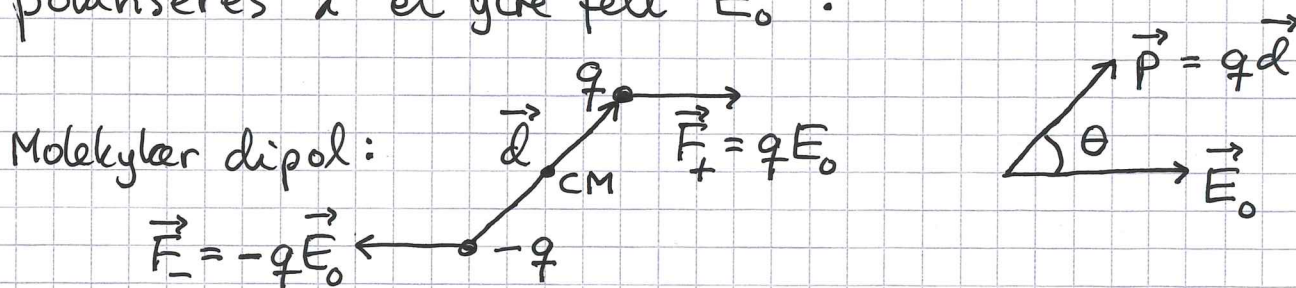
(22)



Pga kortere avstand til ørboksens negative ladning blir  $F_- > F_+$ , og dermed en netto tiltrekkende kraft.

### Dielektrikum. Isolator [OS2 8.5; YF 24.4-5; LHL 20.5]

Har ikke frie elektroner, men bundet ladning som polariseres i et ytre felt  $\vec{E}_0$ :



Dreiemoment på dipolen:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \dots \text{øvring} \dots = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

Pot. energi:

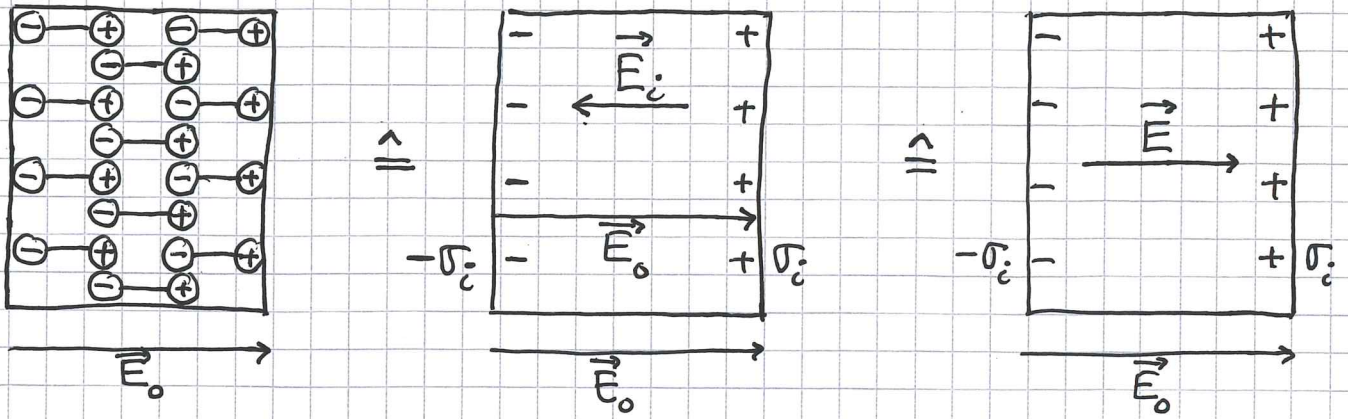
$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int \tau d\theta = \dots = - \vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

(der vi valgte  $U=0$  for  $\theta = \pm \pi/2$ , dvs  $\vec{p} \perp \vec{E}_0$ )

Dermed: En tendens til innretning av molekylære dipolmoment i samme retning som det ytre feltet  $\vec{E}_0$ .



# Makroskopisk effekt:



- Får induert ladning  $\pm \sigma_i$  pr flateenhet på overflaten
- Null nettoladning inni isolatoren
- Det induerte feltet inni isolatoren,  $E_i = \sigma_i / \epsilon_0$ , gir et svekket totalt felt inni:  $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$ ;  $E = E_0 - E_i$
- Antar lineær respons:  $E_i$  prop. med  $E_0$ , og dermed  $E$  prop. med  $E_0$
- Definerer isolatorens relative permittivitet:

$$\epsilon_r = E_0 / E ; \text{ dvs } E = E_0 / \epsilon_r \quad (\epsilon_r \geq 1)$$

Tallverdier:

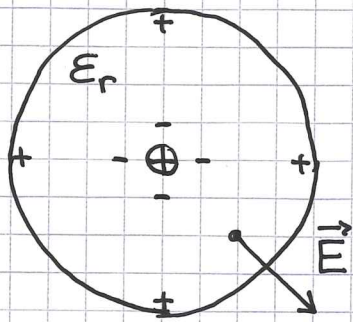
Stoff	Vakuum	Tørr luft	Plast	Rent vann	Perfekt metall
$\epsilon_r$	1	1.00054	2-6	80	$\infty$

- Definerer isolatorens permittivitet:

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

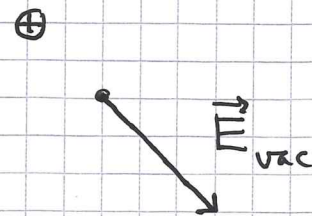


- Ladning  $q$  omgitt av isolator gir svekket felt inni isolatoren pga induisert ladning og induisert motsatt rettet felt:



$$E(r) = q / 4\pi \epsilon_r \epsilon_0 r^2$$

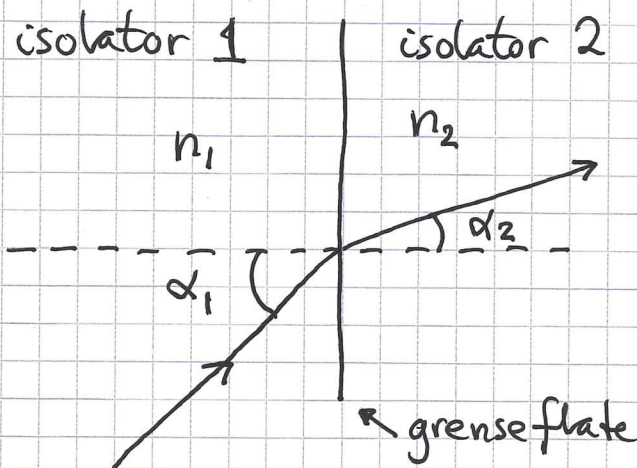
$$= q / 4\pi \epsilon r^2$$



$$E_{vac}(r) = q / 4\pi \epsilon_0 r^2$$

- Lysfarten i isolator:  $v = c / \sqrt{\epsilon_r} < c$   
( $c = 299792458 \text{ m/s} = \text{lysfarten i vakuum}$ )

- Lysbrytning i grenseflate mellom to isolatorer:



$$n = \sqrt{\epsilon_r} = \text{brytningsindeks}$$

Snells lov:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2$$

\* Grunnlag for mikroskop, teleskop etc ( $n \approx 1.5$  i glass, for synlig lys).

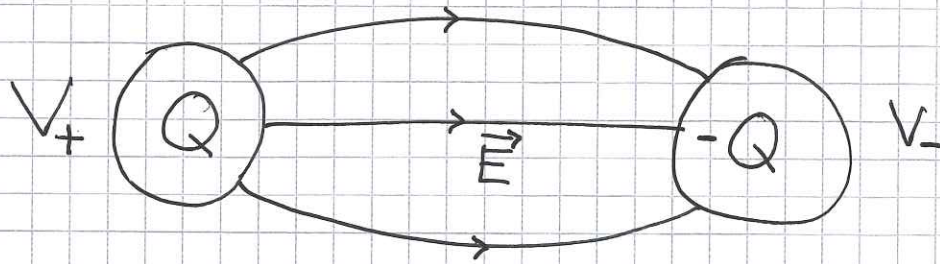
\* I vann er  $n = 1.33$  for rødt lys og  $n = 1.35$  for blått lys. Gir regnbue!



# Kondensator og kapasitans [OS2 8; YF 24; LHL 20] (25)

(capacitor) (capacitance)

En kondensator består av to ledere adskilt av en isolator; anta at lederne er tilført en nettoladning  $\pm Q$ :



Potensialforskjellen, evt. spenningen, mellom lederne:

$$V = V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Siden  $\vec{E}$  er prop. med  $Q$  (Coulombs lov), er også  $V$  prop. med  $Q$ :

$$\boxed{C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{Q}{V}} = \text{kondensatorens kapasitans}$$

• Enhet:  $[C] = C/V = F$  (farad)

• Kretssymbol:

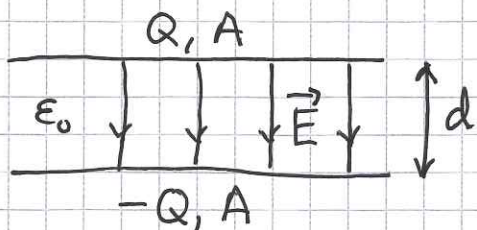
• Kan lagre ladning og energi

•  $C$  avhenger av utforming (geometri) og type isolator mellom lederne.  $C$  avhenger ikke av  $Q$  eller  $V$ .

• Beregner  $C$  ved å anta ladning  $\pm Q$  og regne ut  $V$  (evt. via  $\vec{E}$ ); da er  $C = Q/V$ .



### Eks 1: Luftfylt platekondensator



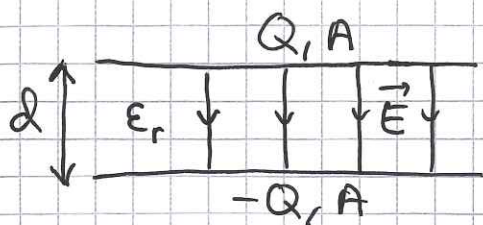
$$E = \sigma / \epsilon_0 = Q / A \epsilon_0$$

$$V = E d = Q d / A \epsilon_0$$

$$\Rightarrow \underline{C = \epsilon_0 A / d}$$

Med  $d = 2.0 \text{ mm}$  og  $A = \pi \cdot (0.10 \text{ m})^2$  er  $\underline{C \approx 0.14 \text{ nF}}$

### Eks 2: Platekondensator fylt med dielektrikum



$$E = \sigma / \epsilon = Q / A \epsilon_r \epsilon_0$$

$$V = E d = Q d / A \epsilon_r \epsilon_0$$

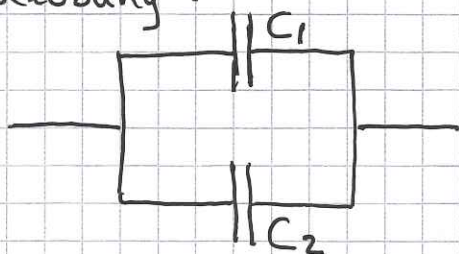
$$\Rightarrow \underline{C = \epsilon_r \epsilon_0 A / d}$$
 ; dvs  $C$  økes med faktoren  $\epsilon_r$

Vi ser nå at  $[\epsilon] = \text{F/m}$ ; dvs  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

### Kobling av flere kapasitanser [OS2 8.2; TF 24.2; LHL 20.2]

Parallellkobling:

Hvis



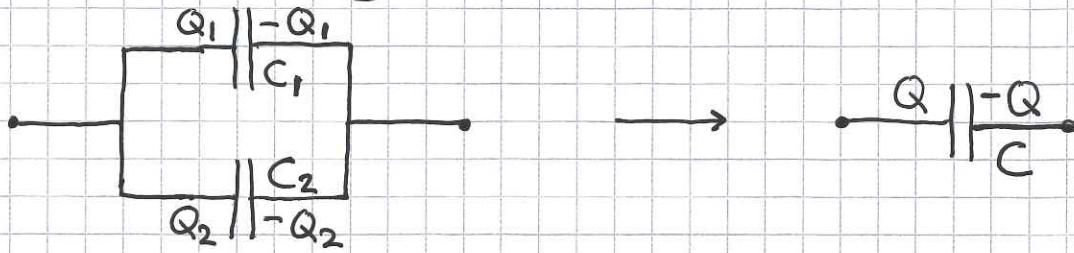
skal erstattes av



og oppføre seg likt, hva må da  $C$  være?




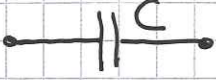
Vi har lik spenning,  $V_1 = V_2 = V$ , over  $C_1$  og  $C_2$ : (27)



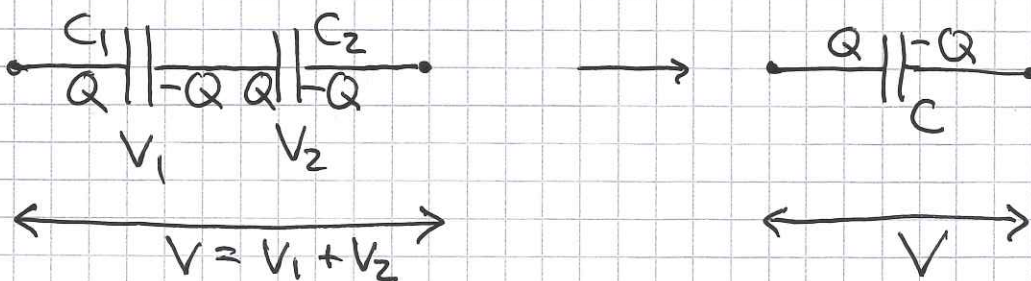
Dvs:  $V = Q_1 / C_1 = Q_2 / C_2 = Q / C$  og  $Q_1 + Q_2 = Q$

$\Rightarrow C_1 V + C_2 V = C V \Rightarrow \boxed{C = C_1 + C_2}$

Med  $N$  stk. koblet i parallell:  $\boxed{C = \sum_{j=1}^N C_j}$

Seriekobling: Hvis  skal erstattes av , hva må da  $C$  være?

Vi har nå lik ladning  $\pm Q$  på  $C_1$  og  $C_2$ :

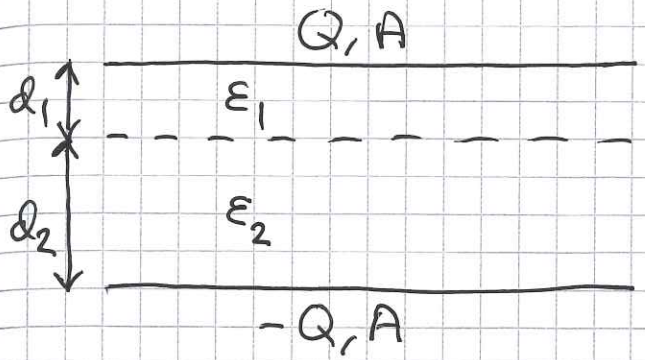


$\Rightarrow \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$

Med  $N$  stk koblet i serie:  $\boxed{C^{-1} = \sum_{j=1}^N C_j^{-1}}$



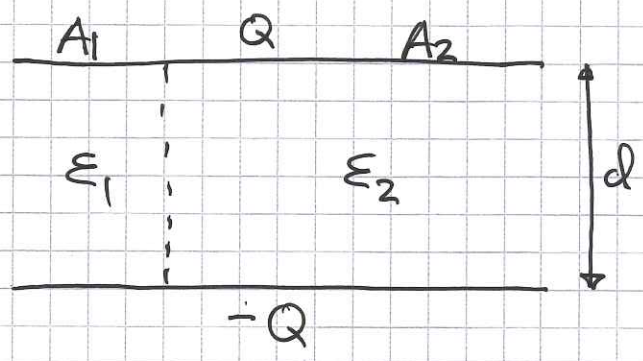
En kondensator fylt med ulike dielektrika blir som en parallell- eller seriekobling:



$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$$

med

$$C_j = \epsilon_j A / d_j ; j=1,2$$



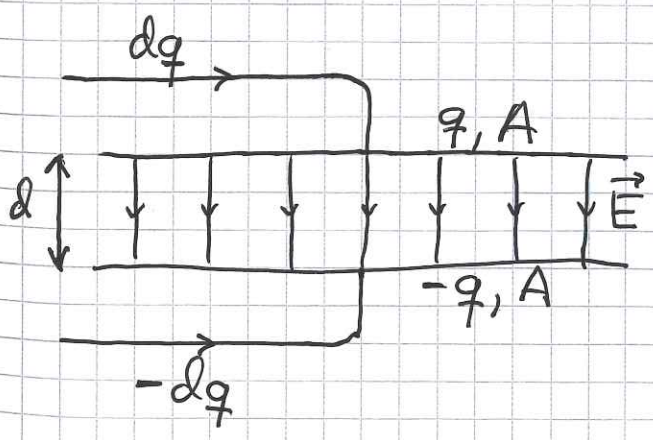
$$C = C_1 + C_2$$

med

$$C_j = \epsilon_j A_j / d ; j=1,2$$

Energi lagret i E-felt [OS2 8.3; YF 24.3; LHL 20.4]

Opplading av kondensator fordrer et arbeid W, som tilsvarende pot. energi U lagret i E-feltet mellom platene.



En økning av ladningen, fra ±q til ±(q+dq), gir en økning i lagret potensiell energi:

$$dU = v(q) dq = \frac{q}{C} dq$$



Opplading fra  $q=0$  til  $q=Q$  gir pot.energi

(29)

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2$$

Med  $C = \epsilon_0 A/d$  og  $V = Ed$  gir dette

$$U = \frac{1}{2} (\epsilon_0 A/d) (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$$

der  $A \cdot d =$  volumet mellom platene, dvs der  $E \neq 0$ .

Tolkning:

Energien pr volumenheter i det elektriske feltet er

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

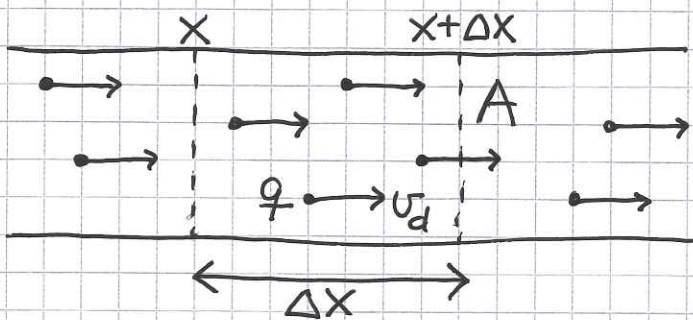
Et resultat som gjelder generelt.



# ELEKRISK STRØM [OS2 9,10; YF 25,26; LHL 21,22] (30)

## Strøm og strømtethet [OS2 9.1-2; YF 25.1; LHL 21.1]

Ser på leder med  $n$  frie ladninger pr volumenet, med midlere driftshastighet  $v_d$  langs lederen:



(Merk: Lederen er typisk elektrisk nøytral.)

strøm def = mengde ladning som passerer tverrsnitt av lederen pr tidsenhet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dQ}{dt}$$

$$\text{Enhet: } [I] = \text{C/s} = \text{A (ampere)}$$

All fri ladning  $\Delta Q = q \cdot \Delta N = q \cdot n \cdot \Delta V$  i volumet  $\Delta V = A \cdot \Delta x$  passerer tverrsnittet ved  $x + \Delta x$  i løpet av tida  $\Delta t = \Delta x / v_d$

$$\Rightarrow I = q n A \Delta x / (\Delta x / v_d) = n q v_d A$$

strømtethet def = strøm pr flateenhet

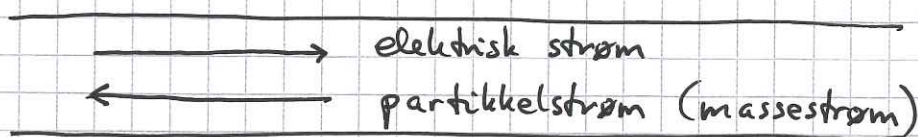
$$j = I/A = n q v_d \quad \text{med enhet } [j] = \text{A/m}^2$$

dvs  $\vec{j} = n q \vec{v}_d$



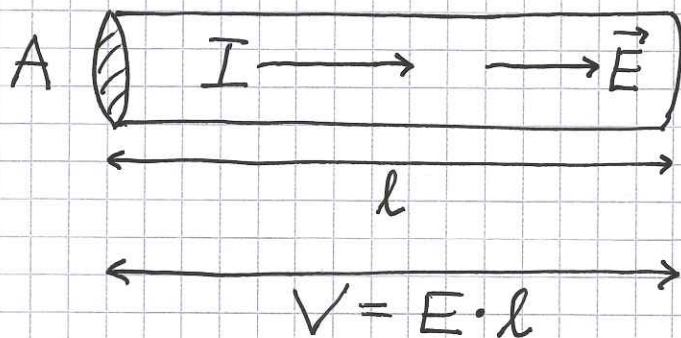
I metaller er  $q = -e$  :  $\vec{j} = -ne\vec{v}_d$

(31)



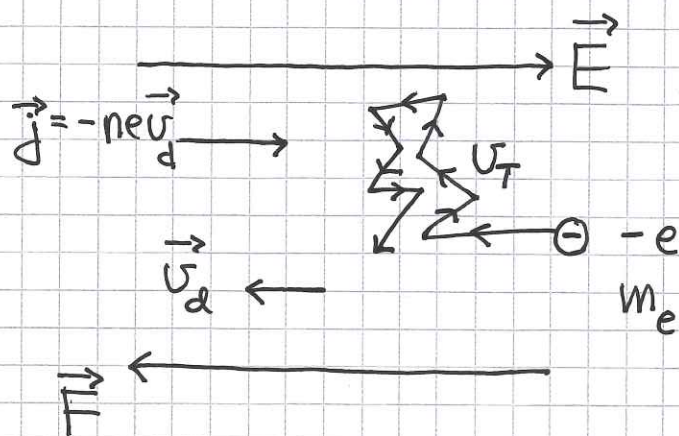
Ohms lov [OS2 9.2-4; YF 25.2, 25.6; LHL 21.2, 21.4]

En spenning  $V$  over en leder med lengde  $l$  og tverrsnitt  $A$  gir et felt  $\vec{E}$  i ledere, og dermed en kraft  $\vec{F} = -e\vec{E}$  på frie elektroner i ledere, og dermed en strøm  $I$  i ledere :



$$j = I/A$$

De frie elektronene akselereres pga  $\vec{F}$ , men pga kollisjoner oppnår de bare en viss midlere driftshastighet  $\vec{v}_d$  langs ledere :





$d$  = midlere avstand mellom kollisjoner

$\tau = d/v_T$  = midlere tid mellom kollisjoner

$v_T$  = midlere elektronfart ved temperatur  $T$

$\vec{v}_d \approx \vec{a} \cdot \tau \stackrel{N2}{=} - \frac{e\vec{E}}{m_e} \cdot \tau$  = midlere driftshastighet

Dermed:  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

med

$\sigma = ne^2\tau/m_e$  = materialets konduktivitet (elektrisk ledningsevne)

Dette er Ohms lov, på mikroskopisk form, i henhold til Drude-modellen (Paul Drude, ca 1900)

Med  $j = I/A$  og  $E = V/l$  fås

$V = RI$  Ohms lov

med motstand (resistans)  $R = l/\sigma A$

Konduktans  $G$ :  $I = G \cdot V \Rightarrow G = \sigma A/l = R^{-1}$

Resistivitet  $\rho$ :  $\rho = \sigma^{-1}$

Enheder:  $[R] = V/A = \Omega$  (ohm)

$[G] = \Omega^{-1} = S$  (siemens)

$[\rho] = \Omega m$ ;  $[\sigma] = \Omega^{-1} m^{-1} = S/m$

Merk at  $\sigma$  og  $\rho$  er materialegenskaper.

$G$  og  $R$  avhenger også av størrelse / utforming.





## RMS-hastighet vs driftshastighet

33

Ved absolutt temperatur  $T$  bidrar hvert kvadratiske ledd i energifunksjonen med  $\frac{1}{2}k_B T$  pr partikkel. (Ekuipartisjonsprinsippet.) Her er  $k_B \approx 1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K; Boltzmanns konstant. For elektroner:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3 \cdot \frac{1}{2} k_B T$$

$$\Rightarrow v_T = v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_B T / m_e} \sim 10^5 \text{ m/s ved } 300\text{K}$$

Driftshastigheten  $v_d$  er typisk mye mindre enn  $v_T$ ; la oss gjøre et estimat med en kobberledning med tverrsnitt  $1.5 \text{ mm}^2$  og strømstyrke  $1 \text{ A}$ . Cu har molar masse  $63 \text{ g}$  og massefyltehet ca  $9 \text{ g/cm}^3$ . Med 1 fritt elektron pr Cu-atom blir det da ca  $10^{29}$  frie elektroner pr  $\text{m}^3$ ,

$$\frac{9 \cdot 10^6 \text{ g/m}^3}{63 \text{ g/mol}} = \frac{10^6}{7} \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ el./m}^3 \approx 10^{29} \text{ el./m}^3$$

Dermed:

$$v_d = j / n \cdot e = I / A \cdot n \cdot e = (1 / 1.5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{29} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}) \text{ m/s} \\ \approx 10^{-4} \text{ m/s}$$

Dvs:  $v_d / v_T \lesssim 10^{-9} \quad !!$

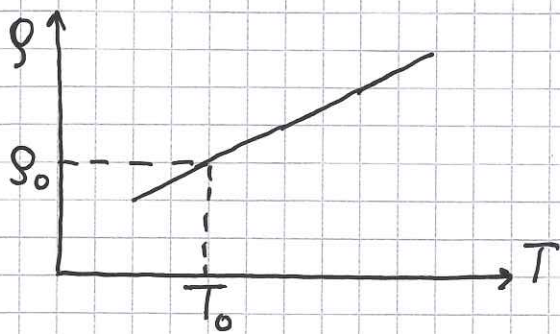


## Resistivitet og temperatur [OS2 9.3; YF 25.2; LHL 21.2+5] (34)

$$\text{Drudemodellen: } \rho = \frac{m_e}{e^2 n \tau} \sim \frac{1}{n \tau}$$

Metaller: Cu, Al, Ag, Fe, ...

Stor  $n$  som avhenger lite av  $T$ . Hyppigere kollisjoner når  $T$  øker, dvs mindre  $\tau$  og større  $\rho$ . Exp. gir lineær  $\rho(T)$ :

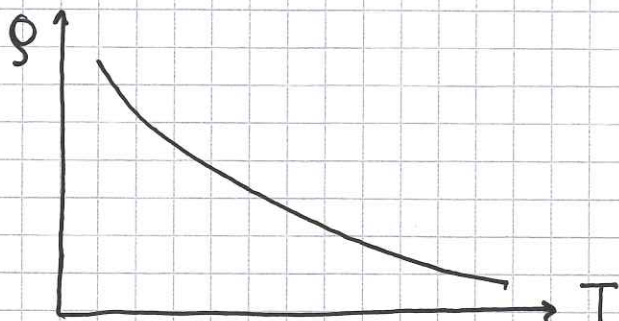


$$\rho(T) = \rho_0 \{ 1 + \alpha \cdot (T - T_0) \}$$

$$\alpha \approx 0.004 \text{ K}^{-1} \text{ for Cu, Al, Ag}$$

Halvledere: Si, Ge, GaAs, GaN, ...

Isolator med  $n \approx 0$  ved  $T \approx 0$ . Økt  $T$  gjør at elektroner løsnes og  $n$  øker sterkt; dermed avtar  $\rho$  med økende  $T$ . (Også forurensningsatomer - doping - øker  $n$  og reduserer  $\rho$ .)





Viktige anvendelser:

Solceller: Fotoner med energi  $hf$  ( $h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} =$  Plancks konstant;  $f =$  lysets frekvens) absorberes av elektroner i halvlederen; disse blir frie elektroner som gir elektrisk strøm.

Lysemitterende dioder (LED): Frie elektroner i halvlederen fanges i tilstander med lavere energi ("hull"); frigjort energi sendes ut som fotoner.

Eks:

$(\text{Al}_x \text{Ga}_{1-x})\text{As}$        $\lambda = 560 - 870 \text{ nm}$       (gult - rødt)

$(\text{In}_x \text{Ga}_{1-x})\text{As}$        $\lambda = 360 - 620 \text{ nm}$       (blått - gult)

$\Rightarrow$  Kan kombineres og gi hvitt lys med LED-pærer.

(Nobelpriis fysikk 2014)

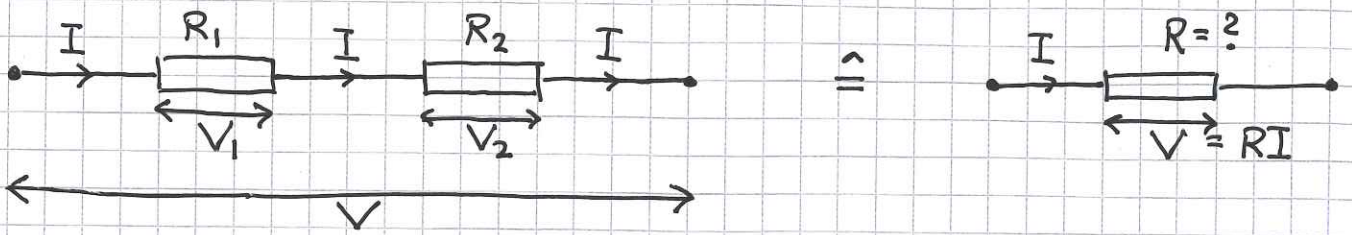
$(\lambda = c/f = \text{lysets bølglengde}; \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s})$



# Kobling av flere motstander

[OS2 10.2; YF 26.1; LHL 21.3]

Seniekobling:



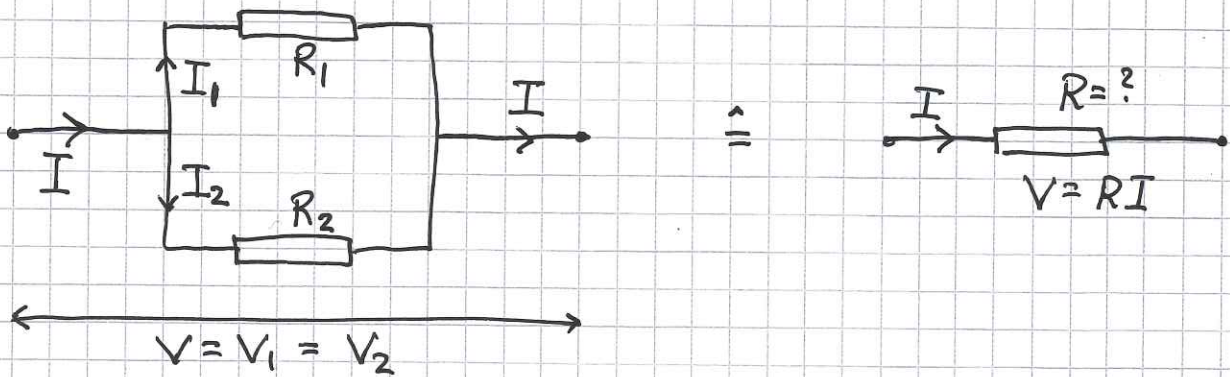
Lik strøm  $I$  gjennom  $R_1$  og  $R_2$ , og  $V = V_1 + V_2$  gir

$$V = R_1 I + R_2 I = RI, \text{ dvs}$$

$$R = R_1 + R_2$$

Med  $N$  stk i serie:  $R = \sum_{j=1}^N R_j$

Parallellkobling:



Lik spenning over  $R_1$  og  $R_2$ , og  $I = I_1 + I_2$  gir

$$\frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}, \text{ dvs}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

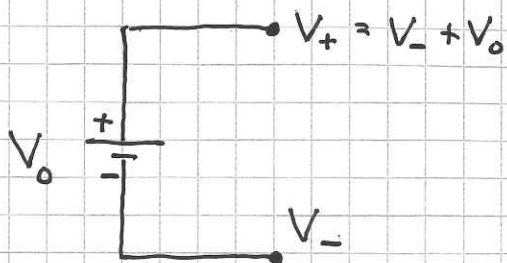
Med  $N$  stk i parallell:  $R^{-1} = \sum_{j=1}^N R_j^{-1}$



# Likestrømkretser [OS2 10; YF 26 (25); LHL 22]

DC = direct current = likestrøm

Likespenningskilde :



Sørger for konstant spenning  
 $V_0 = V_+ - V_-$  mellom polene.

Eks: Kjemisk batteri, solcelle

## Kirchhoffs lover (regler) [OS2 10.3; YF 26.2; LHL 22.3]

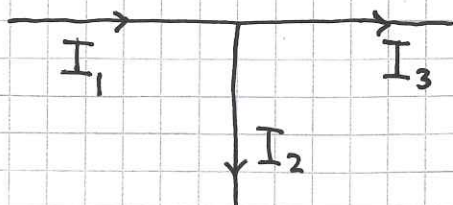
K1: Knudepunktregel (Strømregel)

Ladning hoper seg ikke opp på ulike steder i en elektrisk krets. (Med unntak av platen i en kondensator.)

Da må netto strøm inn mot et knudepunkt være lik netto strøm ut av knudepunktet.

$$\sum_j I_j = 0 \quad \text{i alle knudepunkt i el. krets} \quad K1$$

Eks:



Velg f.eks. positivt fortegn inn og negativt fortegn ut.

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$\underbrace{I_1}_{\text{inn}} = \underbrace{I_2 + I_3}_{\text{ut}}$$



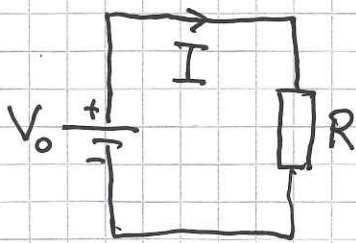
## K2: Sløyferegel (Spenningsregel)

(38)

På et gitt sted i en el. krets må en ladning ha en entydig potensiell energi. Dvs, potensialet på ethvert sted må være entydig. Da må summen av alle potensialendringer rundt enhver lukket sløyfe være null.

$$\boxed{\sum_j V_j = 0 \text{ rundt alle sløyfer i el. krets}} \quad K2$$

Eks 1: Ideell spenningskilde og motstand

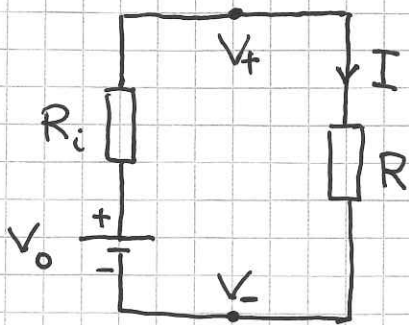


Velg f.eks. pos. fortegn på potensialskninger.

$$\Rightarrow V_0 - RI = 0$$

$$\Rightarrow I = V_0 / R$$

Eks 2: Reell spenningskilde har indre motstand  $R_i$



$$V_0 - R_i I - RI = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{V_0}{R_i + R}$$

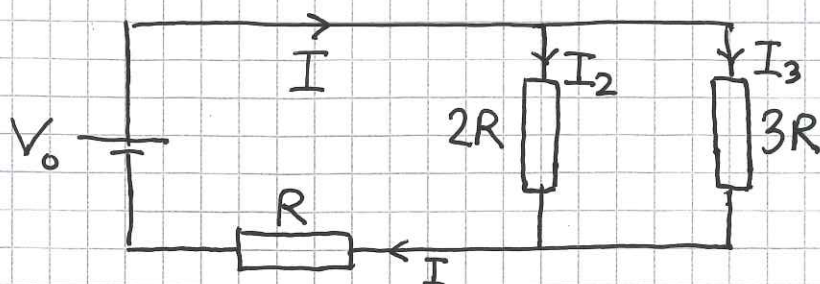
Spennning over ytre krets  $R$ :  $V_+ - V_- = V_0 - R_i I < V_0$   
når  $I > 0$

Gamle batterier: Større og større  $R_i$

$\Rightarrow$  Mindre og mindre polspenning  $V_+ - V_-$   
når  $I > 0$



Eks 3:

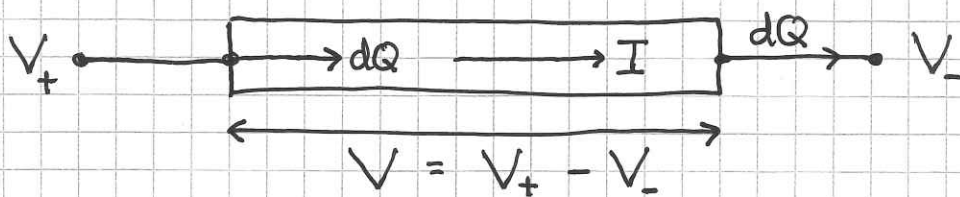


$$V_0 = I \cdot R_{\text{tot}} ; R_{\text{tot}} = R + \left( \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R} \right)^{-1} = \frac{11}{5} R$$

$$\Rightarrow I = \frac{5V_0}{11R} , I_2 = \frac{3}{5} I = \frac{3V_0}{11R} , I_3 = \frac{2}{5} I = \frac{2V_0}{11R}$$

(Lik spenning over  $2R$  og  $3R$ .)

Elektrisk effekt [OS2 9.5 ; YF 25.5 ; LHL 22.2]



Energi som følger med ladning  $dQ$  inn i lederbiten:

$$dU_{\text{inn}} = V_+ \cdot dQ$$

Energi ut med  $dQ$  ved potensial  $V_-$ :

$$dU_{\text{ut}} = V_- \cdot dQ$$

Differansen omdannes til varmeenergi i lederbiten. Effekttap:

$$\underline{P} = \frac{dU}{dt} = \frac{dU_{\text{inn}} - dU_{\text{ut}}}{dt} = (V_+ - V_-) \frac{dQ}{dt} = \underline{\underline{VI}}$$

Hvis ohmsk motstand :  $V = RI$

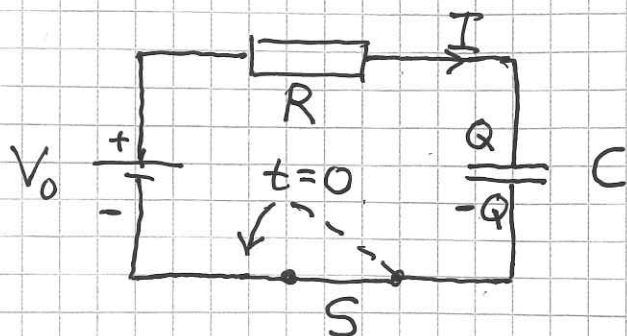
$$\text{Da er: } P = VI = RI^2 = V^2/R$$



# RC-kretser [OS2 10.5; VF 26.4; LHL 22.4]

(40)

Opplading av kondensator i RC-krets:



- $Q=0$ ,  $I=0$  inntil  $t=0$
- Bryter  $S$  lukkes ved  $t=0$
- Finn  $Q(t)$  og  $I(t) = dQ/dt$

$$K2: V_0 - RI - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow -RC \frac{dQ}{dt} = Q - V_0 C$$

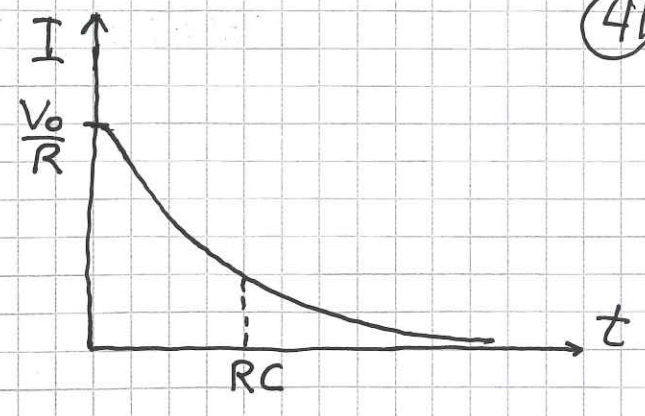
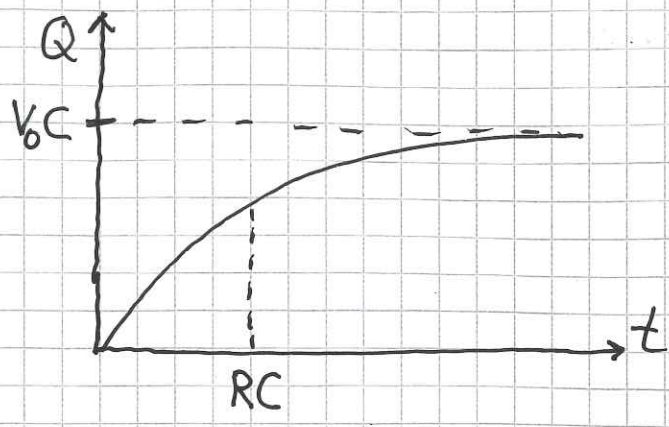
$$\Rightarrow \int_0^Q \frac{dQ}{Q - V_0 C} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{Q - V_0 C}{-V_0 C} \right\} = - \frac{t}{RC}$$

$$\Rightarrow Q(t) = V_0 C \left\{ 1 - e^{-t/RC} \right\}$$

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$





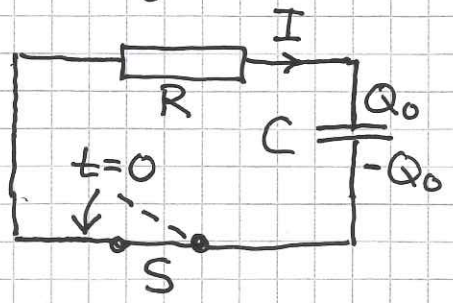
Produktet  $RC$  angir en tidsskala for opplading av kondensatoren i en  $RC$ -krets.

Kalles kretsens tidskonstant :  $\tau = RC$

$Q(\tau) = V_0 C (1 - 1/e) \approx 0.63 V_0 C$  ;  $Q(3\tau) \approx 0.95 V_0 C$

$I(\tau) = \frac{V_0}{R} \cdot \frac{1}{e} \approx 0.37 \frac{V_0}{R}$  ;  $I(3\tau) = 0.05 \frac{V_0}{R}$

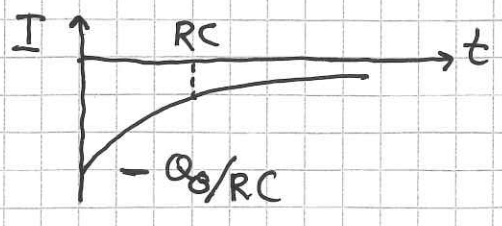
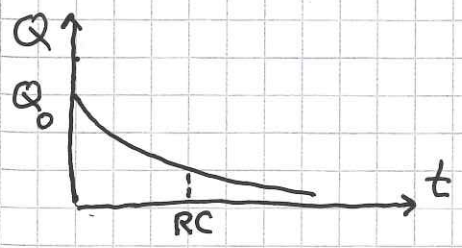
Utlading av oppladet kondensator :



- Før  $t=0$  :  $Q = Q_0$  ;  $I = 0$
- Lukker  $S$  ved  $t=0$
- Finn  $Q(t)$  og  $I(t)$

K2:  $-Q/C - R dQ/dt = 0 \Rightarrow \int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = - \int_0^t \frac{dt}{RC}$

$\Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$  ;  $I(t) = -(Q_0/RC) e^{-t/RC}$



Anvendelser : Blinklys, Blitz,



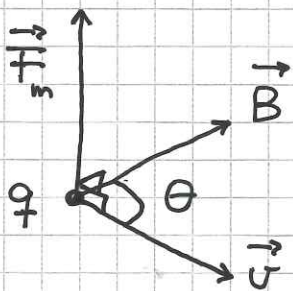
# Magnetostatikk [OS2 11,12 ; YF 27,28 ; LHL 23] (42)

## Magnetisk kraft [OS2 11.2 ; YF 27.2 ; LHL 23.4]

En elektrisk strøm omgir seg med et magnetfelt  $\vec{B}$ .  
Gir magnetisk kraft

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \times \vec{B}$$

på ladning  $q$  i bevegelse med hastighet  $\vec{v}$ .

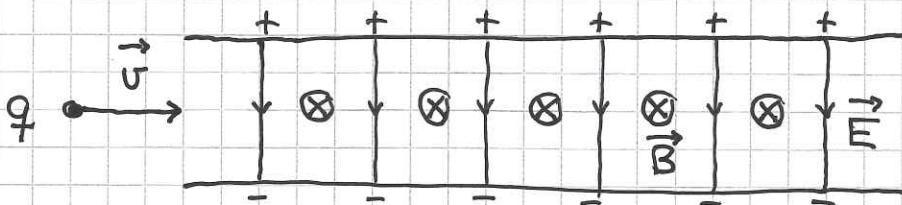


$$F_m = q v B \sin \theta$$

$$\vec{F}_m \perp \vec{B}, \quad \vec{F}_m \perp \vec{v}$$

$$[B] = \frac{N}{C \cdot m/s} = \frac{N}{A \cdot m} = T \quad (\text{tesla})$$

Eks: Krysset  $\vec{E}$ - og  $\vec{B}$ -felt



$\otimes$  inn i planet

$\odot$  ut av —||—

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q \vec{E} + q \vec{v} \times \vec{B} \quad (= \text{Lorentz kraften})$$

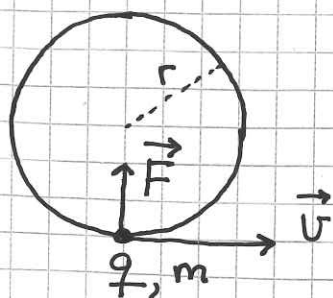
$$q > 0 \Rightarrow \vec{F}_e \text{ ned, } \vec{F}_m \text{ opp}$$

$\Rightarrow$  Ingen avbryning ( $F=0$ ) hvis  $v = E/B$ .



# Ladning i uniformt $\vec{B}$ -felt [OS2 11.3; YF 27.4; LHL 23.1+4] (43)

$\vec{B} \otimes$   
(inn i planet)



Anta  $\vec{v} \perp \vec{B}$

$$\Rightarrow F = qvB$$

Tilført effekt:  $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$

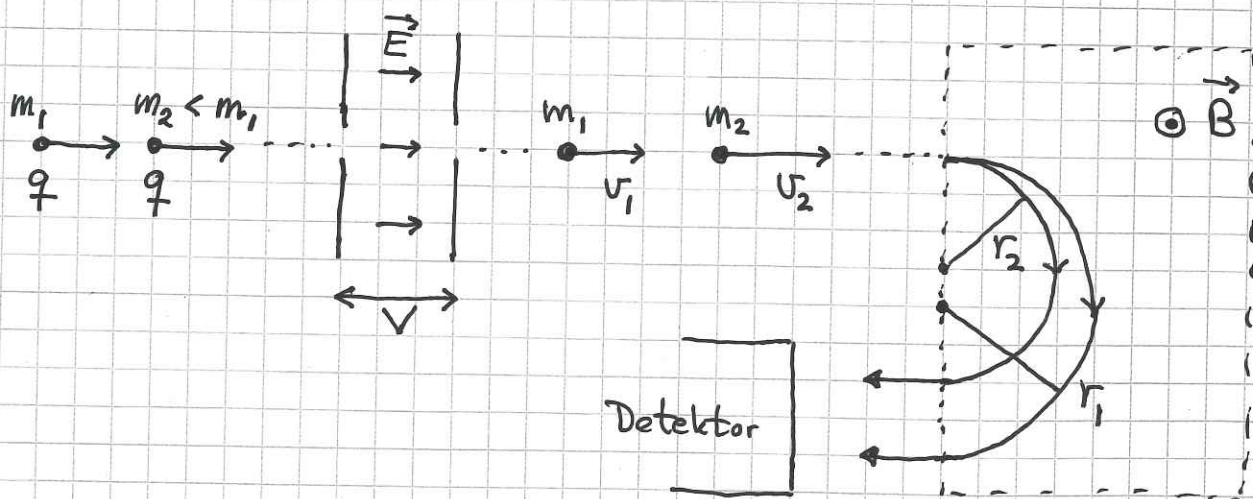
Dvs: Magnetisk kraft kan ikke gjøre et arbeid.

$\Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 = \text{konstant} \Rightarrow$  uniform sirkelbevegelse

$$N2: qvB = mv^2/r \Rightarrow r = mv/qB$$

$$\Rightarrow \omega_c = v/r = qB/m = \text{syklotronfrekvensen}$$

Eks: Massespektrometer [OS2 11.7; YF 27.5] (Ør.12)

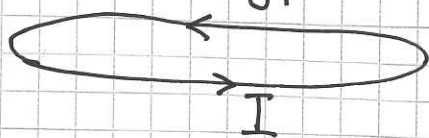


$\Rightarrow$  Separasjon av ulike isotoper med lik ladning  $q$  men ulik masse  $m_1$  og  $m_2$ .



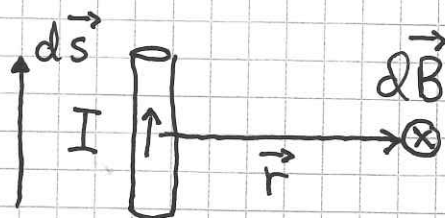
# Biot-Savarts lov [OS2 12.1; YF 28.2; LHL 23.5]

Strømsløyfe



$$\vec{B} = ?$$

Et lite "strømelement"  $I \cdot d\vec{s}$  gir et lite bidrag  $d\vec{B}$  til det totale magnetfeltet  $\vec{B}$  i avstand  $\vec{r}$  fra strømelementet:



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Vakuum permeabiliteten:

$$\mu_0 \approx 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A} \quad (\text{evt. N/A}^2)$$

$$(\text{Før 20.05.2019: } \mu_0 \equiv 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m/A})$$

$$(\text{Lysfarten i vakuum: } c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s})$$

Totalt magnetfelt fra ei strømsløyfe blir dermed:

$$\vec{B} = \oint d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Biot-Savarts lov  
(1820)

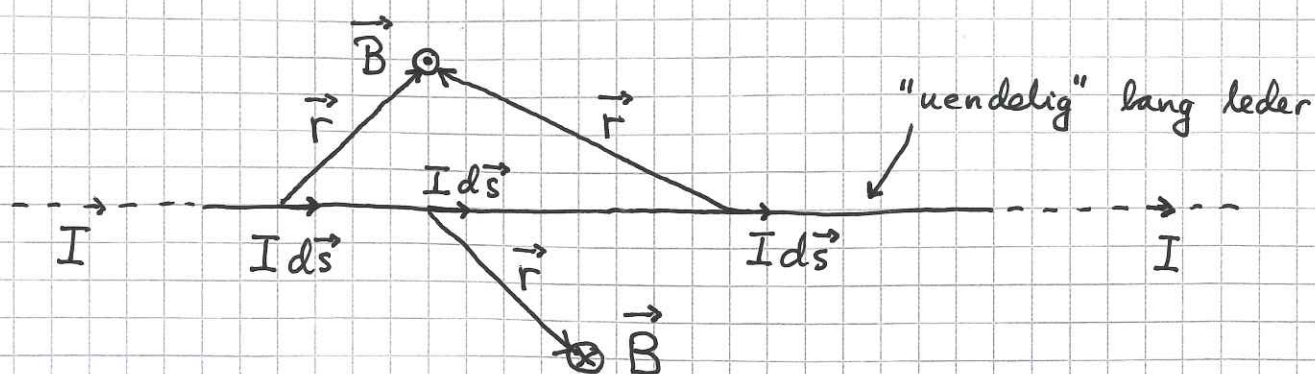
Sammenlign med elektrisk felt fra ladningsfordeling:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \int \frac{dq \hat{r}}{r^2}; \quad \text{Coulombs lov}$$

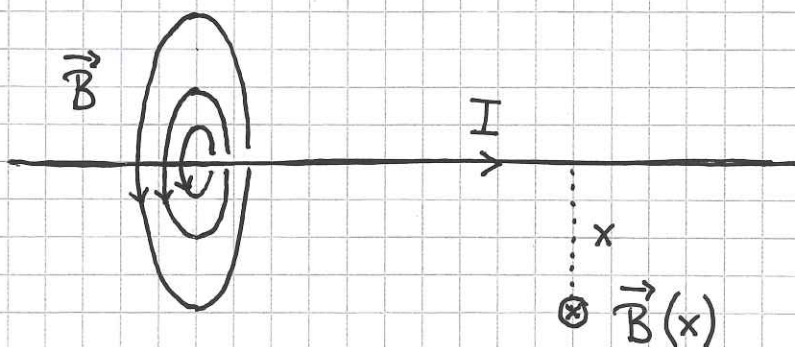


Eks 1 :  $\vec{B}$  fra lang, rett strømførende leder

[OS2 12.2 ; YF 28.3 ; LHL 23.5]



- $d\vec{B} \sim I d\vec{s} \times \vec{r} \Rightarrow$  alle bidrag peker ut av / inn i planet på oppsiden / nedsiden av lederen
- $\vec{B}$  må da være tangentiell til sirkel konsentrisk med lederen  $\Rightarrow$  feltlinjer for  $\vec{B}$  er sirkler konsentriske med lederen

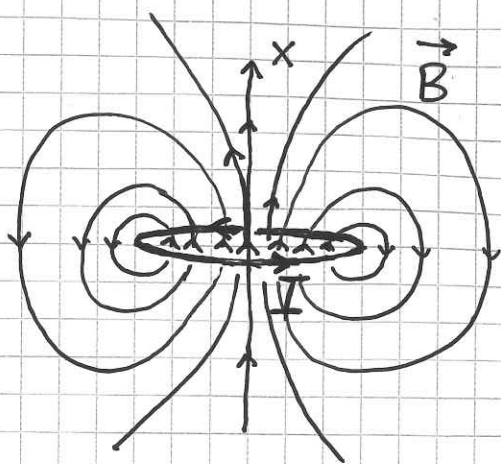


- Biot-Savarts lov gir  $B(x) = \mu_0 I / 2\pi x$  (se pdf-notat for detaljer)
- Høyrehandsregel : Tommel langs  $I \Rightarrow$  Resterende fingre krummer i retningen til  $\vec{B}$
- Alltid lukkede feltlinjer for  $\vec{B}$  : Vi har ikke magnetisk ladning. Men vi har magnetiske dipoler, se Eks 2 og 3.



# Eks 2: $\vec{B}$ fra sirkulær strømsløyfe

[OS2 12.4; YF 28.5; LHL 23.6]

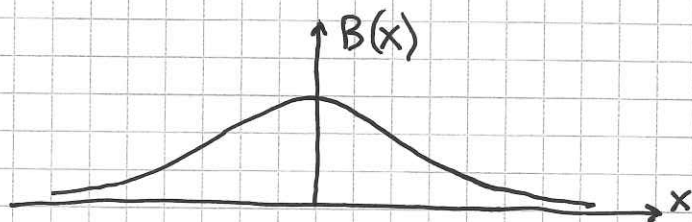


- Strømsløyfe i  $yz$ -planet. Strøm  $I$ . Radius  $R$ .
- Nær lederen er  $\vec{B}$  omtrent som for lang, rett leder (sirkulære feltlinjer)

• På  $x$ -aksen er  $\vec{B} \parallel \hat{x}$  pga symmetri

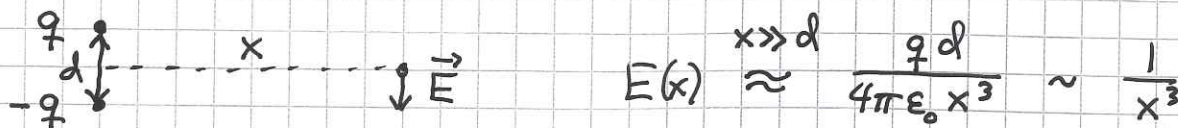
• Biot-Savarts lov gir, for  $B$  på  $x$ -aksen:  $B(x) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}}$

(se notat for detaljer)



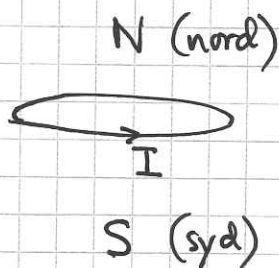
• Langt unna, for  $x \gg R$ , på  $x$ -aksen:  $B(x) \approx \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3} \sim \frac{1}{x^3}$

Sammenlign med el. felt fra el. dipol:



$$E(x) \approx \frac{q d}{4\pi\epsilon_0 x^3} \sim \frac{1}{x^3}$$

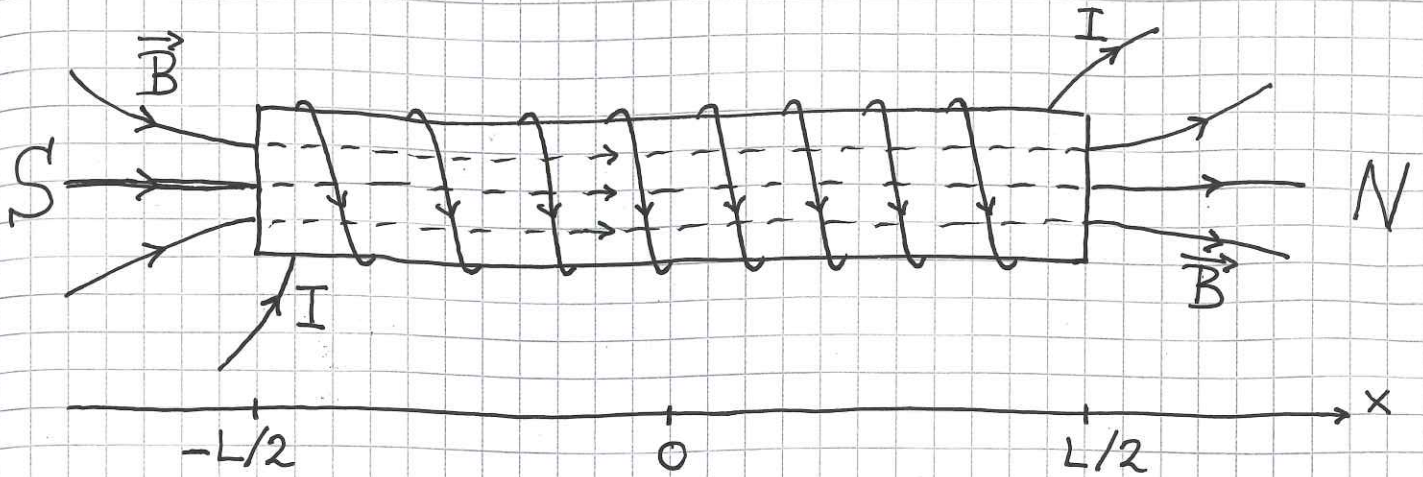
Strømsløyfa er en magnetisk dipol :



(Mer om magn. dipoler og magn. dipolmoment snart.)



Eks 3:  $\vec{B}$  fra strømførende spole [OS2 12.6; YF 28.7; LHL 23.6] (47)



- $N$  viklinger på lengde  $L$ . Tverrsnitt  $A = \pi R^2$
- Tettliggende viklinger  $\Rightarrow$  som  $\vec{B}$  fra  $N$  sirkulære strømsløyper  $\Rightarrow$  kan summere/integrere  $\vec{B}$  fra Eks 2 (se notat for detaljer)
- På spolens akse:  $B(x) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \left\{ \frac{L/2 - x}{\sqrt{(L/2 - x)^2 + R^2}} + \frac{L/2 + x}{\sqrt{(L/2 + x)^2 + R^2}} \right\}$   
med  $n = N/L =$  vikleings tettheten = viklinger pr lengdeenhet

- Lang spole,  $L/2 \gg R$ :

$$B(\pm L/2) = \frac{1}{2} \mu_0 n I \quad (\text{på aksene, ved spolens ender})$$

Overalt inni spolen (så lenge  $|x| \ll L/2$ ):

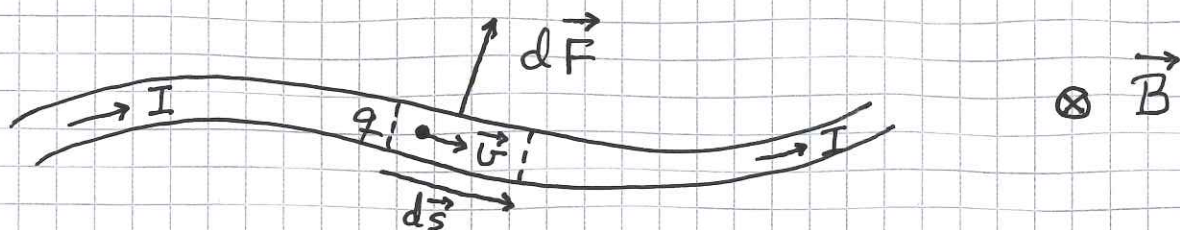
$$\boxed{B = \mu_0 n I} \quad \text{Vårt "hovedresultat" !}$$

Utenfor spolen:

$$B \approx 0$$



# Magnetisk kraft på strøm [OS2 11.4; YF 27.6; LHL 23.2] (48)



$N$  frie ladninger  $q$  med driftshastighet  $\vec{v}$  på lederbit med lengde (og orientering)  $d\vec{s}$

$$\Rightarrow d\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B} = \text{kraft på lederbiten}$$

$$I = dQ/dt = Nq / (ds/v)$$

$$\Rightarrow Nq\vec{v} = I d\vec{s}$$

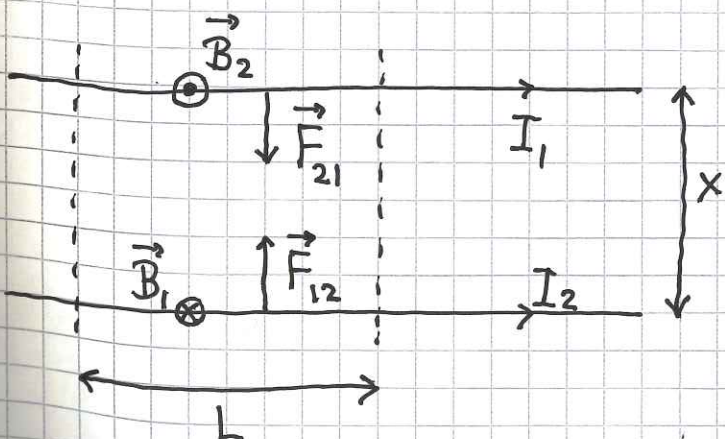
$$\Rightarrow \underline{d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B}}$$

Total kraft på hele ledaren:

$$\vec{F} = \int d\vec{F} = I \int d\vec{s} \times \vec{B}$$

## Eks 1: Kraft mellom parallelle strømmer

[OS2 11.4; YF 28.4; LHL 23.5]



$$B_{1,2} = \frac{\mu_0 I_{1,2}}{2\pi x} =$$

feltstyrke i avstand

$x$  fra leder 1, 2



Innbyrdes kraft på lengde ~~enhet~~  $L$ :  $F_{12} = F_{21} = F$  (N3)

$$F_{12} = I_2 L B_1 = \frac{\mu_0 L}{2\pi x} I_2 I_1$$

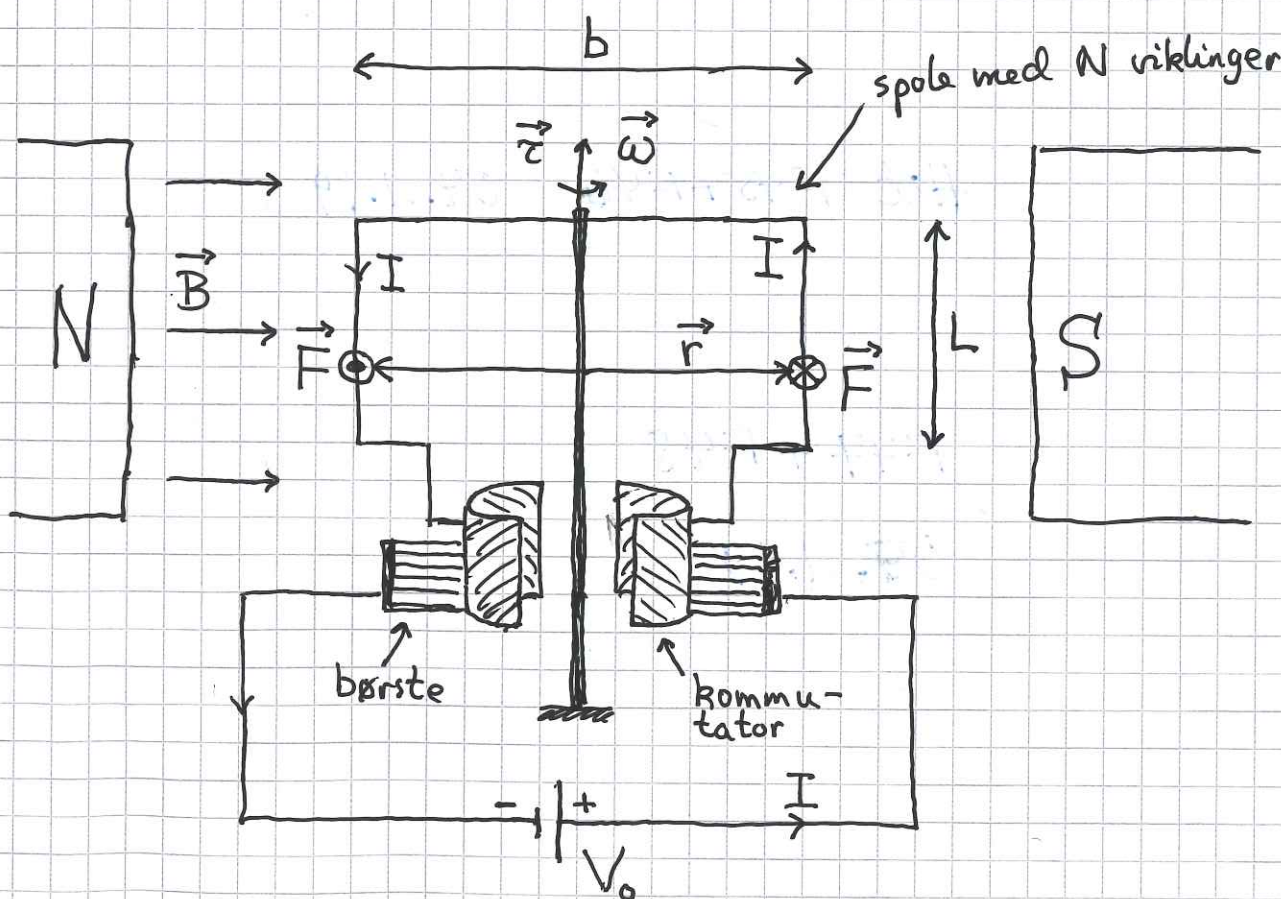
$$F_{21} = I_1 L B_2 = \frac{\mu_0 L}{2\pi x} I_1 I_2 = F_{12}$$

Kraft pr lengdeenhet:  $f = F/L = \mu_0 I_1 I_2 / 2\pi x$

$I_1$  og  $I_2$  i samme retning  $\Rightarrow$  Tiltrekning

— " — motsatt — " —  $\Rightarrow$  Frastøtning

Eks 2. Likestrømsmotor [OS2 11.5 ; VF 27.8 ; LHL 26.3]

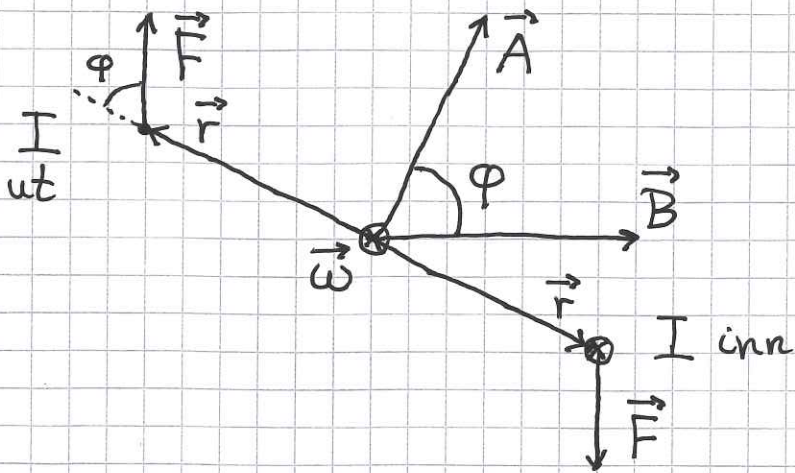


Kommutatoren roterer med spolen og gir strømretning slik at  $\vec{r}$  peker i samme retning hele tiden.

Børstene sørger for kontakt mellom DC-kilden ( $V_0$ ) og kommutatoren.



Sett langs rot. aksen, med  $\vec{\omega}$  inn i planet :



$$\vec{F} = I \vec{L} \times \vec{B}$$

$$\vec{\tau} = \sum \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = |\vec{\tau}| = 2 \cdot \frac{b}{2} \cdot ILB \cdot \sin\phi \cdot N$$

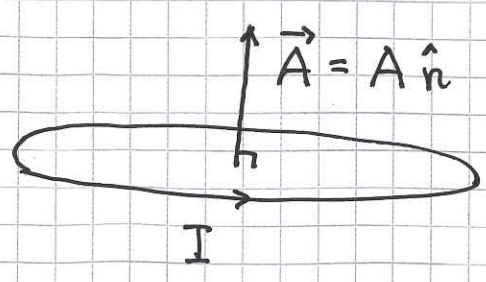
$$= N \cdot IA \cdot B \cdot \sin\phi \quad (A = b \cdot L)$$

$$= |N I \vec{A} \times \vec{B}|$$

$\Rightarrow \vec{\tau} = N I \vec{A} \times \vec{B}$  = dreiemoment på spole med N vindinger

### Magnetisk dipolmoment [OS2 11.5 ; YF 27.7 ; LHL 23.3, 26.2]

Ei strømsløyfe er en magnetisk dipol :



Positiv retning på  $\vec{A}$  med høyrehåndsregel.

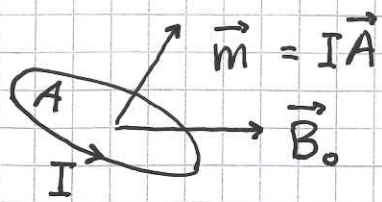
Strømsløyfas magnetiske dipolmoment :

$$\vec{m} = I \vec{A}$$

Enhet:  $[m] = A m^2 = J/T$



Magn. dipol i ytre  $\vec{B}$ -felt :

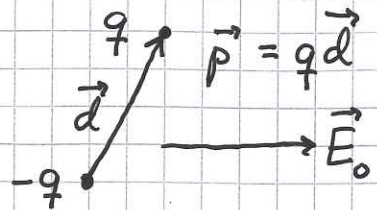


$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_0$$

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}_0$$

(Øving 13)

Elektrisk dipol i ytre  $\vec{E}$ -felt :



$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0 ; U = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

Generelle dipol-definisjoner (ikke pensum) :  
(for  $\vec{m}$ )

$$\vec{p} = \int \vec{r} dq = \int \vec{r} \rho dV$$

$\rho$  = ladning pr volumenhet

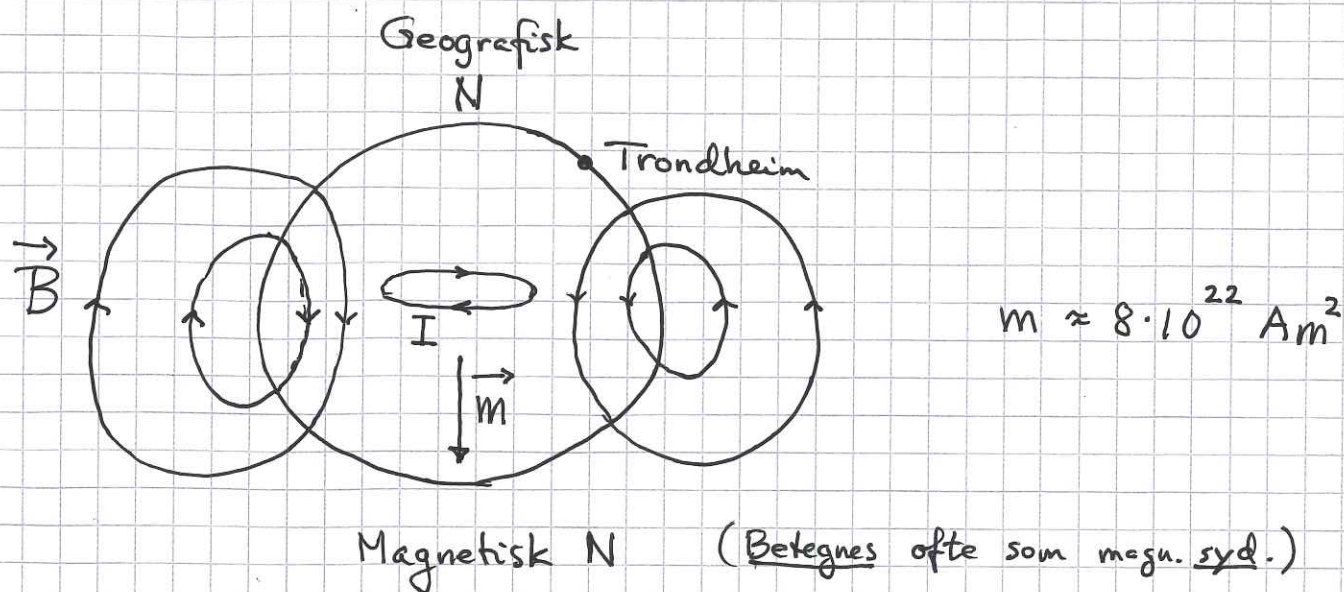
$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int (\vec{r} \times \vec{j}) dV$$

$\vec{j}$  = strøm pr flateenhet

- Eks 1. (a) Bestem  $|\vec{m}|$  for spole med 800 viklinger og tverrsnitt  $4 \text{ cm}^2$  når strømstyrken i spoletråden er  $0.5 \text{ A}$ .  
 (b) Bestem max  $|\vec{\tau}|$  på spolen i ytre felt  $B_0 = 0.3 \text{ T}$ .

Løsning: (a)  $m = NIA = 800 \cdot 0.5 \text{ A} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = \underline{\underline{0.16 \text{ Am}^2}}$   
 (b)  $\tau_{\text{max}} = m \cdot B_0 = 0.16 \cdot 0.3 \text{ Nm} = \underline{\underline{0.048 \text{ Nm}}}$





Magnetiske poler der  $\vec{B}$  er vertikal (dvs  $\perp$  jordkloden)

"World Magnetic Model":

Magn. S :  $86.4^\circ \text{ N}$ ,  $175.3^\circ \text{ Ø}$  (Mellom Alaska og Svalbard)

Magn. N :  $64.1^\circ \text{ S}$ ,  $136.0^\circ \text{ Ø}$  (Ved Antarktis, i retning Sydney)

Trondheim (4/11-2019):

$$|\vec{B}| \approx 52.00 \mu\text{T}$$

$$B_{\perp} \approx 50.19 \mu\text{T}$$

$$B_{\parallel} \approx 13.59 \mu\text{T}$$

$$B_N \approx 13.56 \mu\text{T}$$

$$B_{\varnothing} \approx 0.90 \mu\text{T}$$

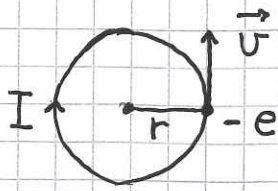
$$\frac{d|\vec{B}|}{dt} \approx 46 \text{ nT pr år}$$



# Magnetisme [OS2 12.7; YF 28.8; LHL 26.1-26.6]

(53)

Atomer er magnetiske dipoler (noen har  $m=0$ ):



$$I = \frac{e}{T}; \quad T = \frac{2\pi r}{v}; \quad A = \pi r^2$$

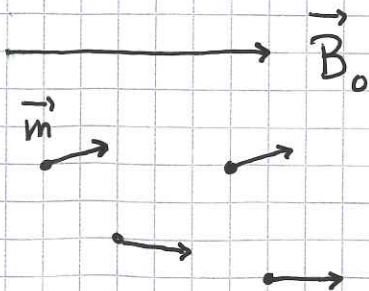
$$\Rightarrow m = IA = \frac{1}{2} e v r \sim 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^6 \text{ m/s} \cdot 10^{-10} \text{ m} \sim 10^{-23} \text{ Am}^2$$

Kvantemekanikk (og eksperimenter) viser at et elektron har en indre dreieimpuls, et spinn  $\vec{S}$ , tilsvarende et magn. dipolmoment

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e} \approx 9.274 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 = 1 \text{ Bohr magneton}$$

$$(h \approx 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = \text{Plancks konstant})$$

Materialer magnetiseres når atomære dipoler rettes inn med  $\vec{m}$  langs et ytre felt  $\vec{B}_0$ :



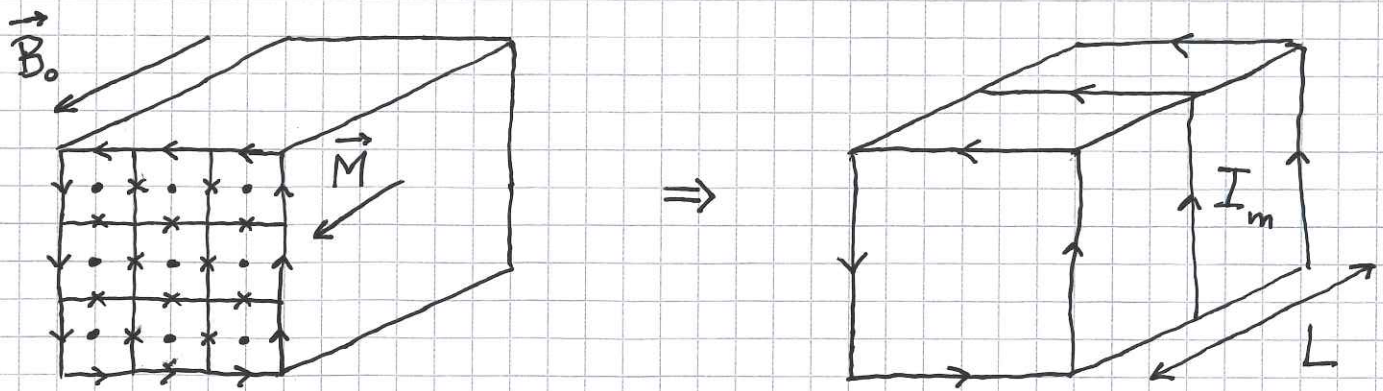
$$\text{Magnetisering: } \vec{M} = \sum_i \vec{m}_i / V \quad (\text{dipolmoment pr volumenet})$$

$$[M] = \text{A/m}$$

$$(\text{Elektrisk polarisering: } \vec{P} = \sum_i \vec{p}_i / V)$$



Nettoeffekten er en overflatestrøm (magnetiseringsstrøm):



- bundet strøm i hvert atom:
- alle indre strømmer kansellerer
- $i_m = I_m / L =$  induert overflatestrøm pr lengdeenhet
- som en spole!
- feltet styrkes inni materialet:  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m$
- lineær respons:  $B_m$  prop. med  $B_0 \Rightarrow B$  prop. med  $B_0$
- materialets relative permeabilitet  $\mu_r$ :

$$B = \mu_r B_0 \quad ; \quad [\mu_r] = 1$$

Jf. dielektrikum:  $E = E_0 / \epsilon_r$  (svekket felt inni)

- materialets permeabilitet:

$$\mu = \mu_r \cdot \mu_0$$

Jf. dielektrikum:  $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$



Paramagnetisme :

svak innretting av  $\vec{m}$  langs  $\vec{B}_0$ . Al:  $\mu_r = 1.00002$

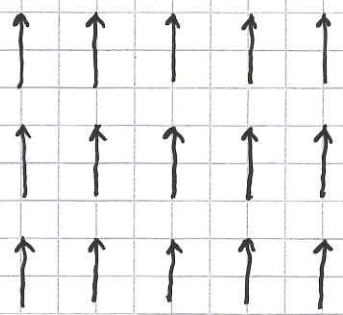
Diamagnetisme :

$\vec{B}_0$  inducerer ~~en~~ motsatt rettet  $\vec{m}$ . Cu:  $\mu_r = 0.999994$

Superledere :  $\mu_r = 0 \Rightarrow \vec{B} = 0$  inni en (normal) superleder

Ferromagnetisme :

Nabospinn vekselvirker  $\Rightarrow$  Parallell  $\vec{m}$  gir lavest energi :



$\vec{M} \neq 0$  selv med null ytre felt

Eks: Fe, Ni, Co,  $Nd_2Fe_{14}B$  (Nd = neodym; metall; Z=60)

$\Rightarrow$  Stor verdi for  $\mu_r$ , opp mot  $10^3$  eller mer.

Curie-temperaturen :

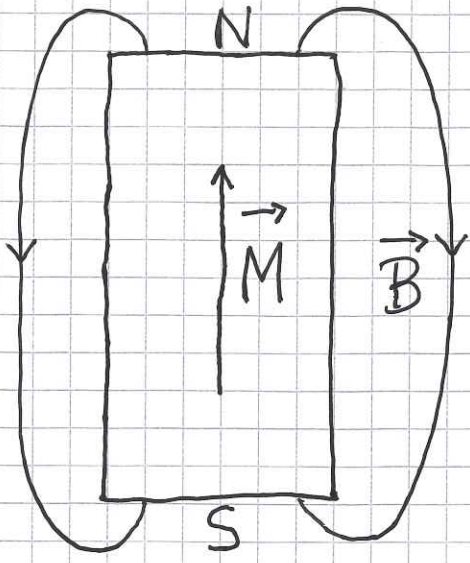
Økende T ødelegger innrettingen av  $\vec{m}$ .

Gir faseovergang, fra ferromagnet til paramagnet, ved en kritisk temperatur  $T_c$ .

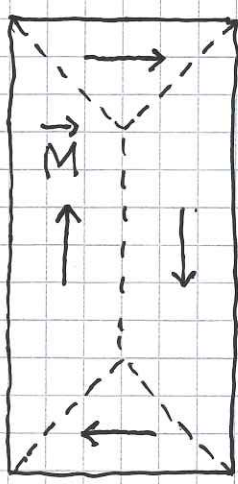
Eks: For rent jern (Fe) er  $T_c = 770^\circ C$



# Permanent-magnet vs unmagnetisk ferromagnet:



- Ganske mye energi i feltet omkring magneten; energi pr volumenhet  $u_B = B^2/2\mu_0$
- Minimal vekselvirkningsenergi mellom atomare  $\vec{m}$
- Eks: Neodymmagnet



$B \approx 0$   
utenfor  
materialet

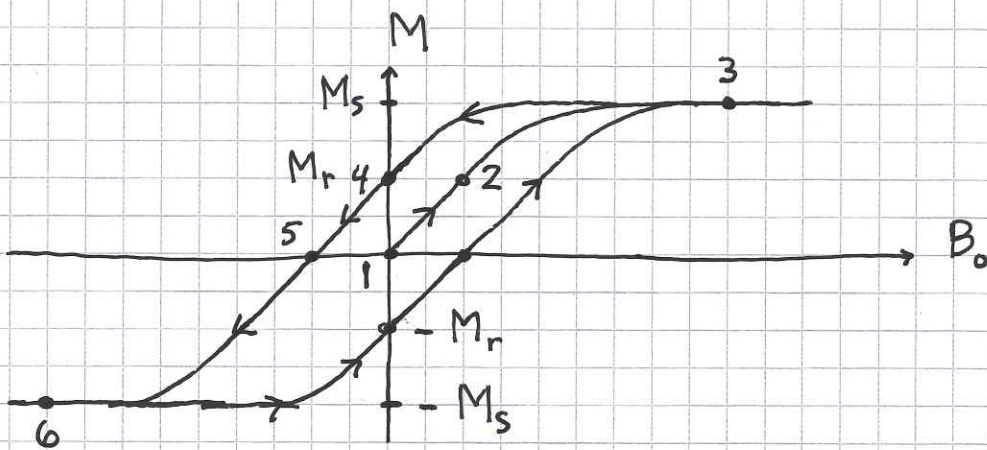
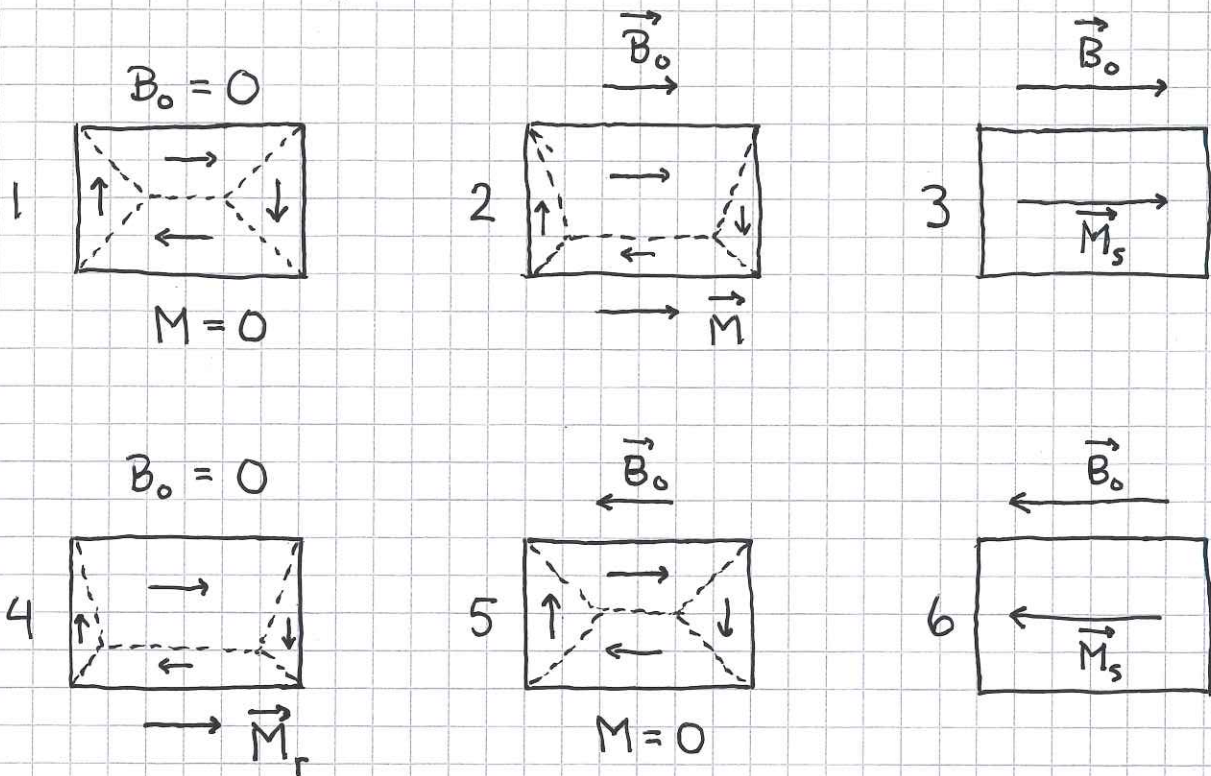
- Liten energi i feltet omkring ( $B \approx 0$ )
- Større v.v. energi nær domeneveggene (-----). Her endres retningen på atomare  $\vec{m}$ :



- Domenestørrelse:  $10^{-4} - 10^{-6}$  m
- Eks: Stål
- Magnetiseres i et ytre felt  $\vec{B}_0$



# Magnetisk hysteresese:

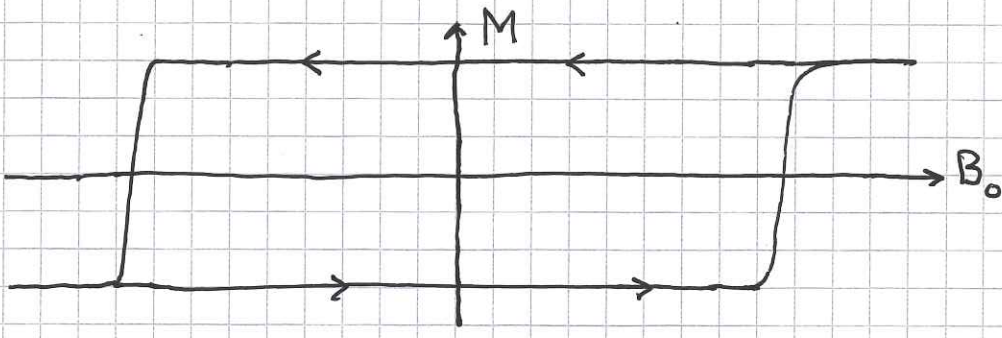


$M_s$  = metningsmagnetisering ; alle  $\vec{m}$  peker i samme retning ("saturation")

$M_r$  = restmagnetisering ("remanent magnetization"); materialet "husker" at  $\vec{M}_s$  pekte i en gitt retning for  $\vec{B}_0$  ble redusert til null ; materialets tilstand avhenger av dets forhistorie

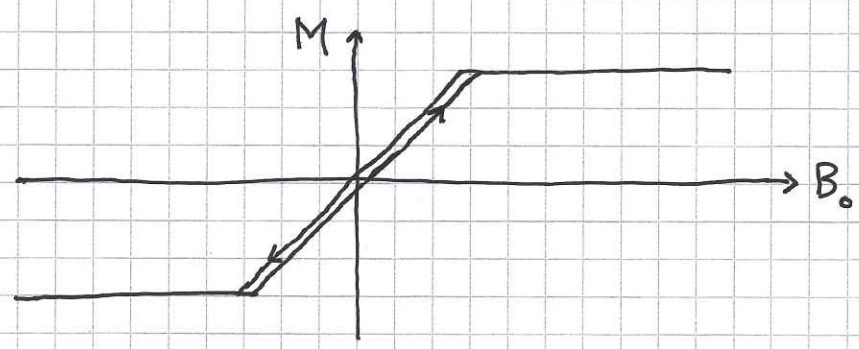


# Permanent magnet ("hard" magnet) :



- Vanskelig å armagnetisere
- Stor M når  $B_0 = 0$  ( $M_r \approx M_s$ )
- Ikke egnet som kjerne i spole i AC-kretser (\*)

# Stål ("bløt" magnet) :



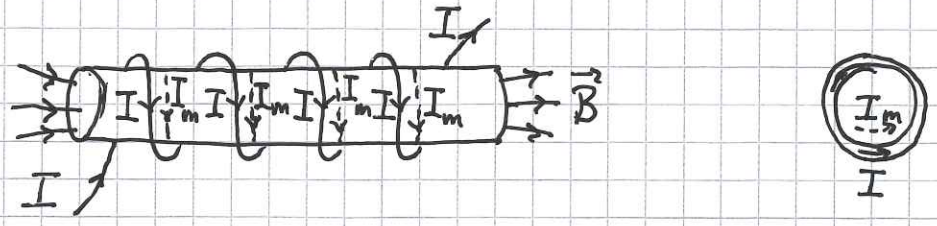
- Lett å magnetisere og armagnetisere
- Liten M når  $B_0 = 0$  ( $M_r \approx 0$ )
- Godt egnet som kjerne i spole i AC-kretser (\*)

---

(\*) Arealet omsluttet av hysteresekurven tilsvarer energi som omdannes til varme pr syklus, dvs for hver hele svingning av  $\vec{B}_0$



Eks 1 : Hva er B inne i en jernkjerne med  $\mu_r = 100$ , i en spole der  $I = 0.3 \text{ A}$  og  $N = 400$  viklinger på lengden  $l = 6 \text{ cm}$  ?



Løsn: Ytre felt inne i spolen, dvs inne i jernkjernen :

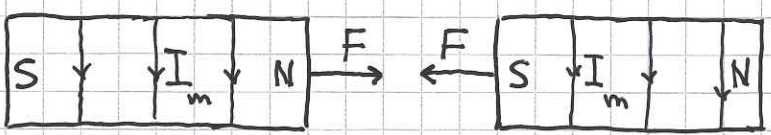
$$B_0 = \mu_0 n I \quad ; \quad n = N/l$$

Jernet magnetiseres, med  $\vec{M}$  langs  $\vec{B}_0$ , og det induseres en overflatestrøm  $I_m$  pr viking.

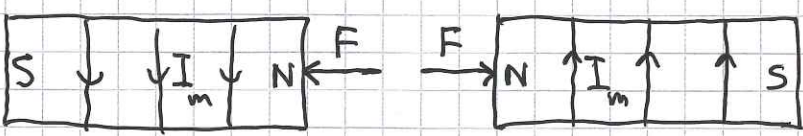
Magnetfeltet styrkes med faktoren  $\mu_r$  inne i spolen :

$$B = \mu_r B_0 = \mu_r \mu_0 n I = \mu n I \quad (\mu = \mu_r \mu_0)$$
$$= 100 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{400}{0.06} \cdot 0.3 \text{ T}$$
$$\approx \underline{\underline{0.25 \text{ T}}}$$

Eks 2: Tiltrekning og frastøtning mellom magneter



Parallelle strømmer  
=> Tiltrekning



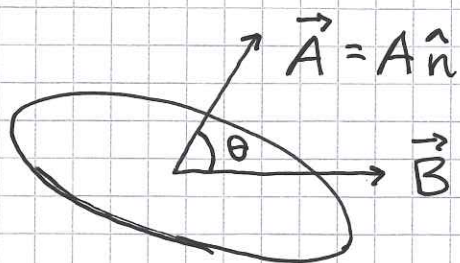
Antiparallele strømmer  
=> Frastøtning



# Elektrodynamikk

[OS2 13-15 ; YF 29-31 ; LHL 24, 25, 27]

## Magnetisk fluks [OS2 13.1 ; YF 27.3 ; LHL 23.7]

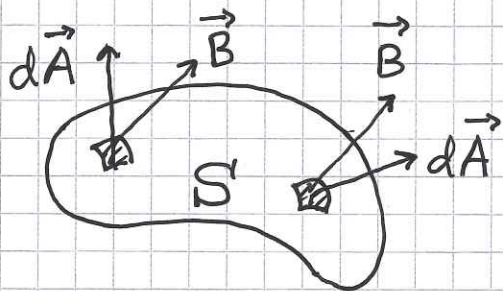


Magn. fluks gjennom flaten A er

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \theta$$

når  $\vec{B}$  er uniformt og flaten er plan.

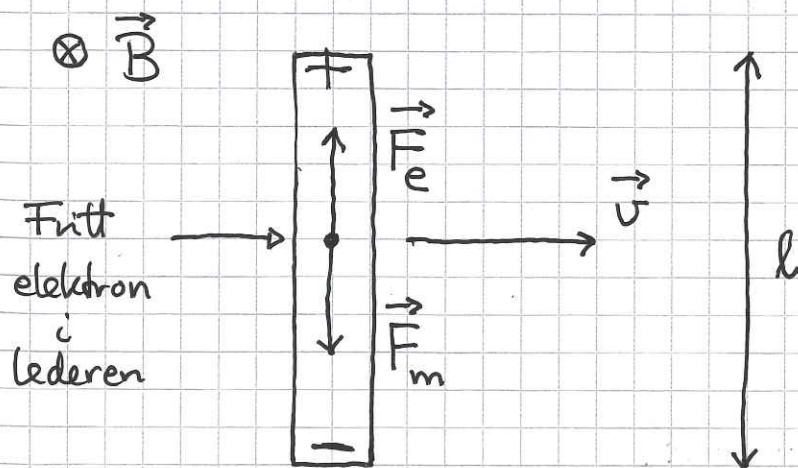
Generelt:



$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

## Faradays induksjonslov [OS2 13.1 ; YF 29.1-4 ; LHL 24.1]

Trekk en leder med lengde  $l$  med fart  $\vec{v}$  gjennom et uniformt magnetfelt  $\vec{B}$  ;  $\vec{v} \perp \vec{B}$  :





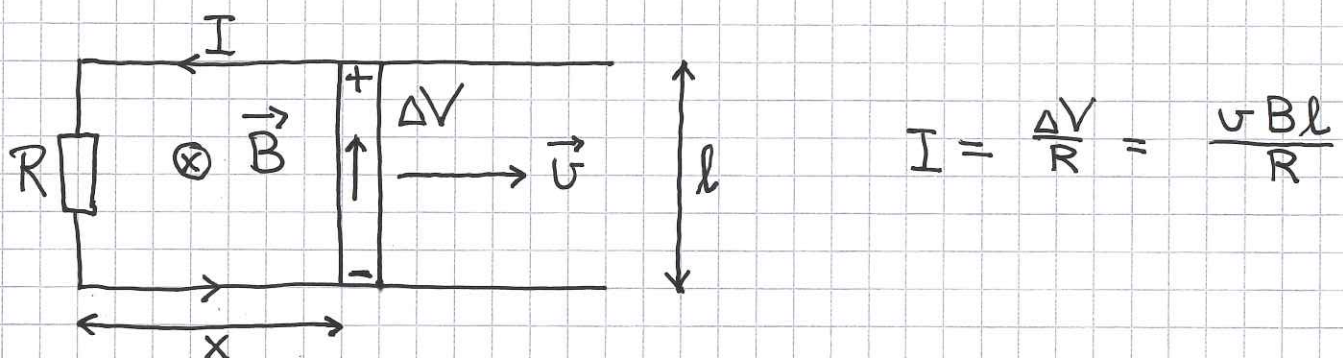
(61)

$\vec{F}_m = -e \vec{v} \times \vec{B}$  gir overskudd av elektroner nederst og underskudd øverst. Gir et indusert elektrisk felt  $\vec{E}$  i ledere, rettet nedover, og dermed en indusert spenning i ledere,  $\Delta V = E \cdot l$

Dynamisk likevekt når  $\vec{F}_m + \vec{F}_e = 0$

$$\Rightarrow eE = evB \Rightarrow E = vB \Rightarrow \Delta V = vBl$$

Kobler ledere til motstand  $R$ :



$$\begin{aligned} \Delta V &= vBl = \frac{dx}{dt} Bl = \frac{d}{dt} (Blx) \\ &= \frac{d}{dt} (B \cdot A) = \frac{d}{dt} (\vec{B} \cdot \vec{A}) \\ &= \underline{\underline{d\Phi/dt}} \end{aligned}$$

som er Faradays induksjonslov:

Indusert spenning i ei sløyfe er lik endringen i omskullet magnetisk flukes pr tidseenhet.

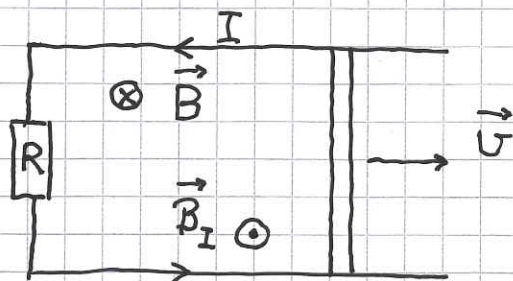
Gjelder generelt, enten det er  $|\vec{A}|$ , retningen på  $\vec{A}$ ,  $|\vec{B}|$  eller retningen på  $\vec{B}$  som varierer med tiden  $t$ .



## Lenz' lov [OS2 13.2; YF 29.3; LHL 24.1] (62)

Indusert strøm  $I$  går den veien som gir tilhørende magnetfelt  $\vec{B}_I$  og fluks  $\Phi_I = \vec{B}_I \cdot \vec{A}$  som motvirker påtvunget fluksendring  $\Delta\Phi$ .

Ekst:



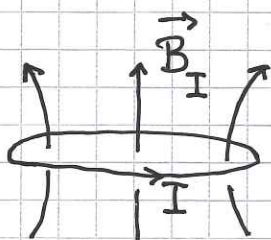
Økt omsluttet fluks inn i planet (pga økt areal)

$\Rightarrow$  indusert  $I$  mot klokka  $\Rightarrow$  indusert omsluttet fluks

$\Phi_I = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$  ut av planet, som motvirker endringen.

## Induktans [OS2 14.1-2; YF 30.2; LHL 25.1] og induksjon

Selvinduktans:



Siden  $\vec{B}_I$  er prop. med  $I$ , er også omsluttet fluks

$$\Phi = \int \vec{B}_I \cdot d\vec{A}$$

prop. med  $I$ :

$$\boxed{\Phi = L \cdot I}$$

$L =$  sløyfas (selv-) induktans

$$[L] = [\Phi/I] = T \cdot m^2/A = H \text{ (henry)}$$



Eks: Bestem  $L$  for <sup>(ideell)</sup> spole med  $N$  viklinger på lengde  $l$ , kjerne med relativ perm.  $\mu_r$ , omsluttet areal  $A$ .

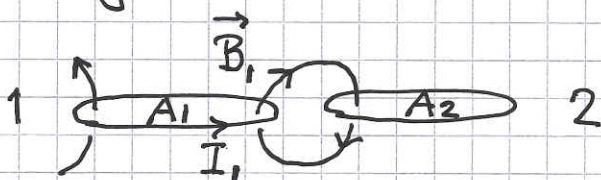
Løsn:  $B = \mu n I = \mu_r \mu_0 \frac{N}{l} I$  overalt inni kjernen, og  $N$  viklinger omslutter arealet  $A$

$$\Rightarrow \Phi = NBA = (N^2 \mu_r \mu_0 A / l) \cdot I \Rightarrow \underline{\underline{L = N^2 \mu_r \mu_0 A / l}}$$

Merk:  $L$  øker med  $N^2$  og med  $\mu_r$

Vi ser at  $[\mu] = H/m$  (Jf.  $[\epsilon] = F/m$ )

Gjensidig induktans:



$I_1$  i sløyfe 1  $\Rightarrow$  fluks  $\Phi_2 = \int_{A_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2$  omsluttet av sløyfe 2

Siden  $B_1$  er prop. med  $I_1$ , er  $\Phi_2$  prop. med  $I_1$ :

$$\Phi_2 = M_{21} \cdot I_1$$

Omvendt:  $I_2$  i sløyfe 2  $\Rightarrow$  fluks  $\Phi_1 = \int_{A_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{A}_1$

omsluttet av sløyfe 1, prop. med  $I_2$ :

$$\Phi_1 = M_{12} \cdot I_2$$

$M_{21} = M_{12} = M =$  sløyfenes gjensidige induktans

$$[M] = H \text{ (henry)}$$

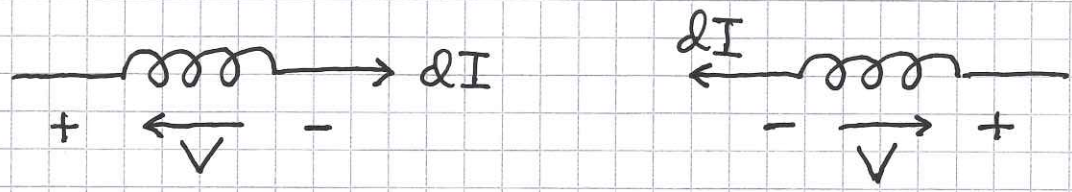


(Selv-) Induksjon: Hvis  $dI/dt \neq 0$  i (f.eks.) en spole, er også  $d\phi/dt \neq 0$ , dvs det enduseres en (mot-)spenning  $V = -d\phi/dt = -L dI/dt$  i spolen, med retning bestemt av Lenz' lov.

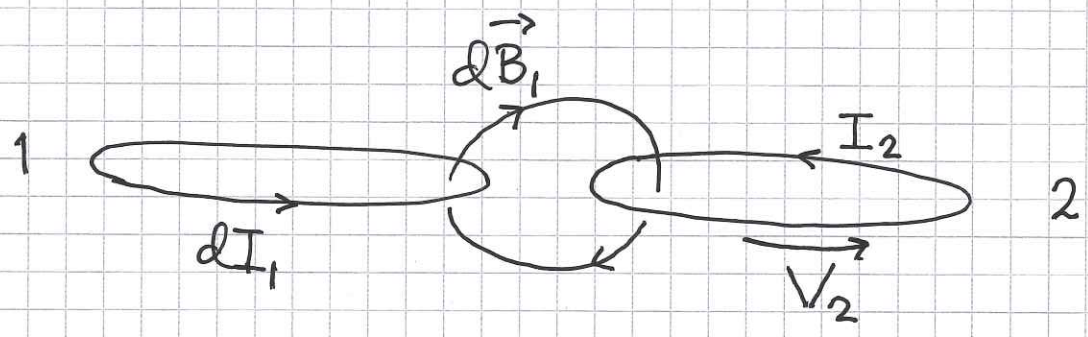
Spole som kretselement:



Retning på  $V$ :



Gjensidig induksjon:



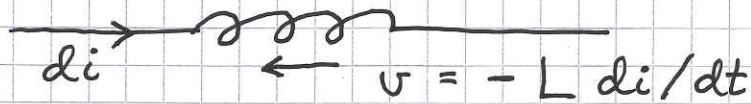
$$\dot{I}_1 \neq 0 \Rightarrow V_2 = -\dot{\phi}_2 = -M \dot{I}_1$$

$$\dot{I}_2 \neq 0 \Rightarrow V_1 = -\dot{\phi}_1 = -M \dot{I}_2$$



## Energi i $\vec{B}$ -feltet [OS2 14.3; YF 30.3; LHL 25.3] (65)

Energi lagret i  $\vec{B}$ -feltet inni en spole ( $B = \mu_0 n I$ ) tilsvarer arbeidet som må gjøres mot den induerte spenningen når strømstyrken økes fra  $i = 0$  til  $i = I$ :



Påkrevd energi for å øke strømmen fra  $i$  til  $i + di$ :

$$dU = P \cdot dt = -v \cdot i \cdot dt = L \frac{di}{dt} \cdot i dt = L \cdot i \cdot di$$

$$\Rightarrow U = \int dU = \int_0^I L i di = \frac{1}{2} L I^2$$

$$B = \mu_0 (N/l) I \Rightarrow I^2 = B^2 l^2 / \mu_0^2 N^2$$

$$L = \Phi / I = NAB / I = \mu_0 N^2 A / l$$

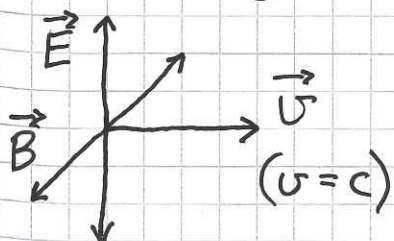
$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} (\mu_0 N^2 A / l) (B^2 l^2 / \mu_0^2 N^2) = \frac{B^2}{2\mu_0} \cdot \underbrace{(A \cdot l)}_{\substack{\text{volumet i spolen,} \\ \text{der } B \neq 0}}$$

$$\Rightarrow u_B = B^2 / 2\mu_0 = \text{energi pr volumenet i magnetfelt}$$

$\Rightarrow$  Energitetthet i et elektromagnetisk (EM) felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

Eks: EM-bølger (lys etc) er forplantning av  $\vec{E}$ - og  $\vec{B}$ -felt; både  $\vec{E}$  og  $\vec{B} \perp$  bølgens forplantningsretning, og  $\vec{E} \perp \vec{B}$ .



$$B = E/c \Rightarrow u_B = \frac{E^2/c^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = u_E$$

(siden  $c^2 = 1/\epsilon_0 \mu_0$ )

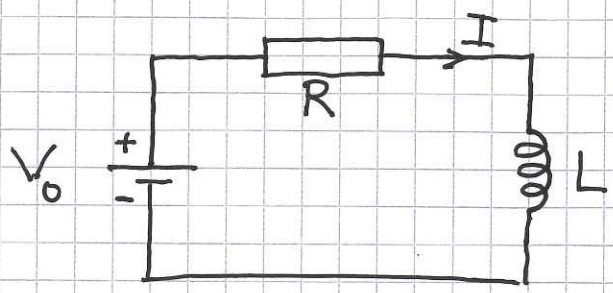
$$\Rightarrow \underline{u} = u_E + u_B = 2u_E = \underline{\epsilon_0 E^2}$$



# Kretser og anvendelser ; DC og AC

[OS2 14, 15 ; YF 30.4-6 ; LHL 25.2, 27.1+2+3+5]  
31.5

## ① RL-krets ; DC



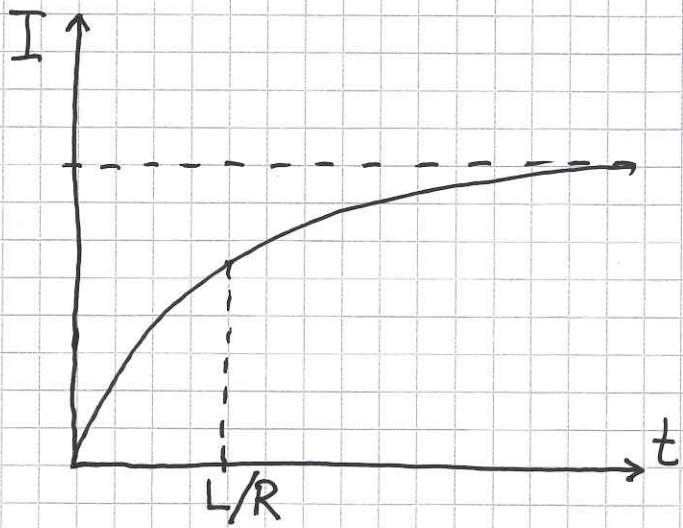
$V_0$  kobles til ved  $t=0$

$$K2: V_0 - RI - L \frac{dI}{dt} = 0$$

det samme ligning for  $I$  som for  $Q$  i RC-kretsen

$$\Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

med tidskonstant  $\tau = L/R$



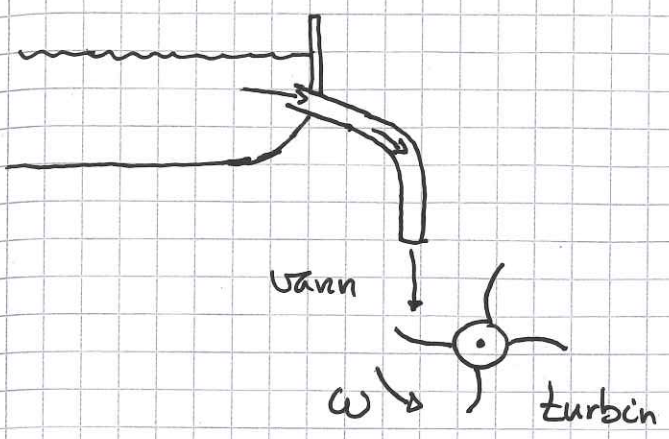
Induktansen  $L$  gir en induert motspenning i kretsen når vi med  $V_0$  prøver å øke strømmen. Da blir  $I$  ikke umiddelbart  $V_0/R$ , det tar litt tid!

Tidsskala gitt ved  $\tau = L/R$ .



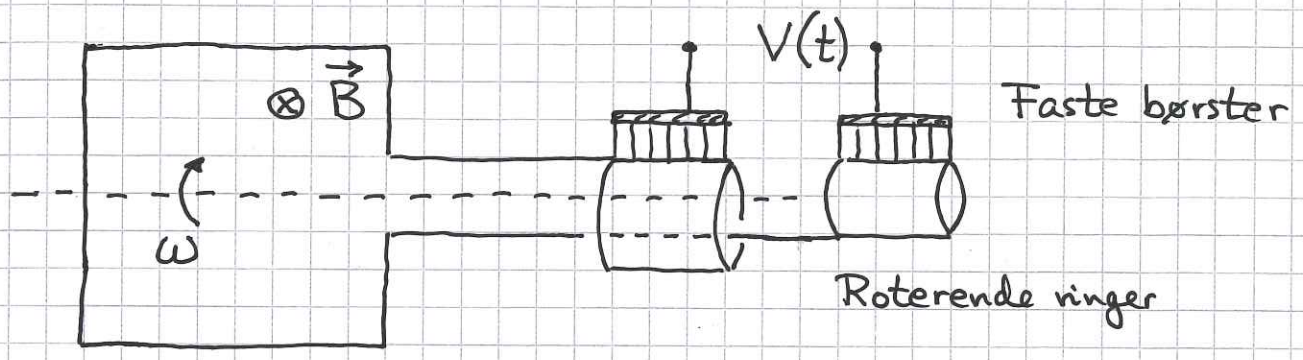
# AC spenningskilde

(AC = alternating current = vekselstrøm)



$$U_{\text{vann}} \rightarrow K_{\text{vann}} \rightarrow K_{\text{rot turbin}}$$

som roterer spole i  $\vec{B}$ -felt  
og gir harmonisk tidsavhengig  
omsluttet fluks  $\phi(t)$

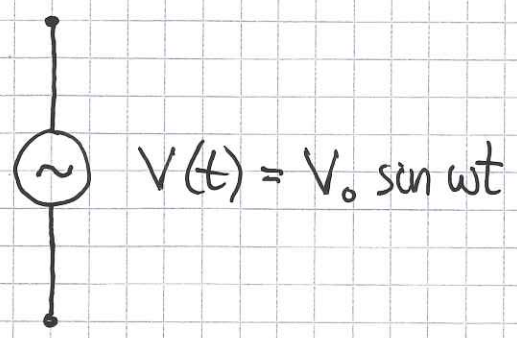


Spole, N viklinger, omsluttet areal A

$$\Rightarrow \phi(t) = NBA \cos \omega t$$

$$\Rightarrow V(t) = V_0 \sin \omega t \quad \text{med} \quad V_0 = NBA\omega$$

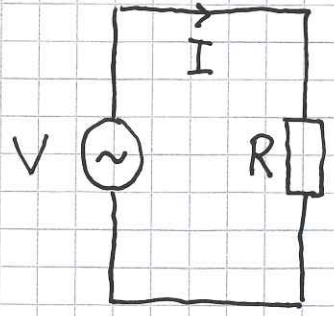
Kretssymbol:



Frekvens:  $f = \frac{\omega}{2\pi}$   
Europa: 50 Hz



2

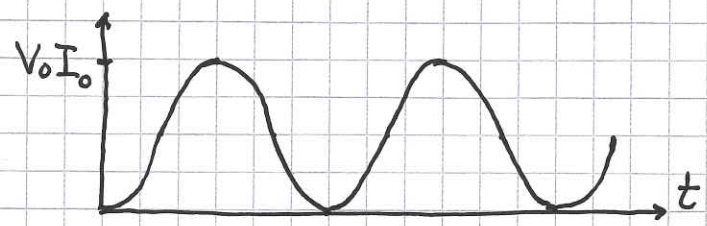


$$K2: V_0 \sin \omega t - RI = 0$$

$$\Rightarrow I(t) = I_0 \sin \omega t ; I_0 = V_0/R$$

$\Rightarrow V$  og  $I$  svinger i fase

Effekttap:  $P(t) = V(t)I(t) = V_0 I_0 \sin^2 \omega t$



Midlere effekttap:  $\langle P \rangle = V_0 I_0 \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0$

Effektivverdier:  $\langle P \rangle = V_{rms} \cdot I_{rms}$   
 med  $V_{rms} = V_0/\sqrt{2}$  ;  $I_{rms} = I_0/\sqrt{2}$

I veggen:  $V_{rms} \approx 230 \text{ V}$  ;  $V_0 \approx 325 \text{ V}$

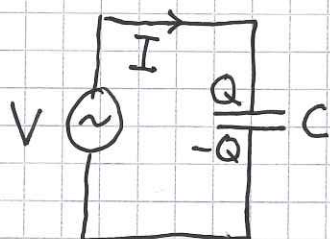
rms = root mean square :

$$V_{rms} = \sqrt{\langle V^2 \rangle}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V(t)^2 dt}$$

$$= V_0/\sqrt{2}$$

③



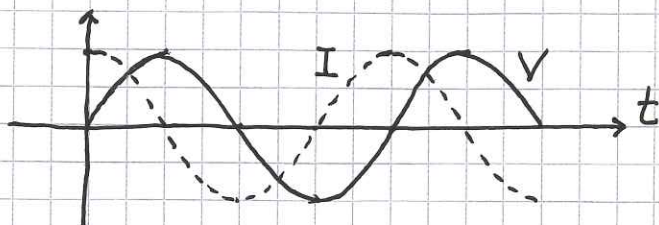
$$K2: V_0 \sin \omega t - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow Q(t) = V_0 C \sin \omega t$$

$$\Rightarrow I(t) = V_0 \omega C \cos \omega t$$

69

Faseforskjell  $\pi/2$  mellom  $V(t)$  og  $I(t)$ :

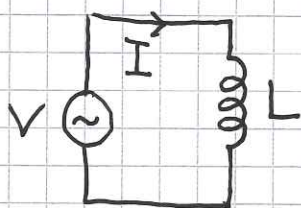


$$\langle P \rangle = V_0 I_0 \langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle = \frac{1}{2} V_0 I_0 \langle \sin 2\omega t \rangle = 0$$

Dvs, kondensatoren er et tapsfritt kretselement.

Strøamplituden  $I_0(\omega) = V_0 \omega C$  øker med frekvensen.

④

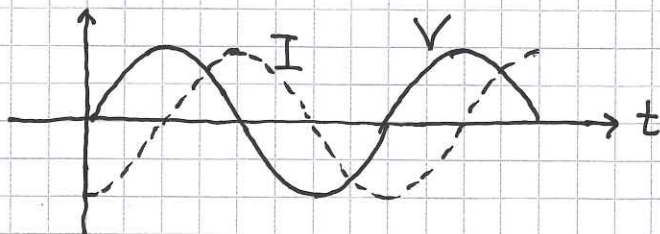


$$K2: V_0 \sin \omega t - L \dot{I} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{I}(t) = \frac{V_0}{L} \sin \omega t$$

$$\Rightarrow I(t) = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t$$

Faseforskjell  $(-)\pi/2$  mellom  $V(t)$  og  $I(t)$ :



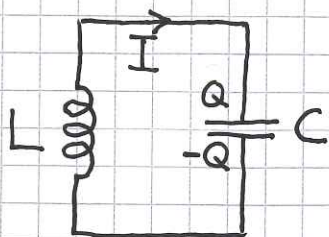
$$\langle P \rangle \sim \langle \sin \omega t \cdot \cos \omega t \rangle = 0$$

Dvs, en induktans er også et tapsfritt kretselement.

Strøamplituden  $I_0(\omega) = V_0 / \omega L$  avtar med frekvensen.



⑤ LC-krets



Anta  $Q(0) = Q_0$

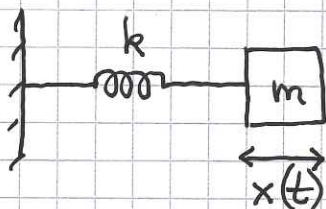
$$K2: -L\dot{I} - Q/C = 0$$

$$I = \dot{Q} \Rightarrow \ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

Dvs: Harmonisk oscillator.

$$\Rightarrow Q(t) = Q_0 \cos \omega_0 t \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Mekanisk analogi:



$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Analoge størrelser:

$$Q \leftrightarrow x, \quad I \leftrightarrow \dot{x}, \quad L \leftrightarrow m, \quad C \leftrightarrow 1/k$$

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} L I^2 = \text{energi i } \vec{B}\text{-felt i spolen}$$

$$U = \frac{1}{2} k x^2 \leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{C} Q^2 = \text{---} \vec{E}\text{-felt i kondensatoren}$$

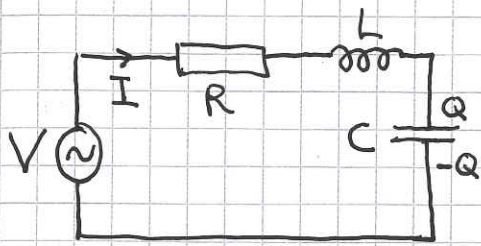
Konservativt system. Ingen dissipasjon av energi når  $R = 0$ :

$$\begin{aligned} Q^2/2C + \frac{1}{2} L I^2 &= \frac{Q_0^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t + \frac{1}{2} L Q_0^2 \underbrace{\omega_0^2}_{=1/LC} \sin^2 \omega_0 t \\ &= \frac{Q_0^2}{2C} = \text{konstant} \end{aligned}$$



# ⑥ RLC resonanskrets

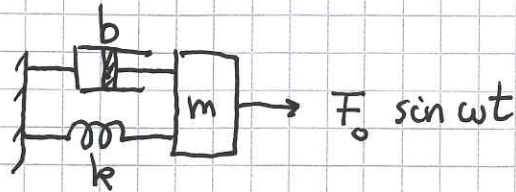
⑦①



$$K2: V_0 \sin \omega t - RI - L\dot{I} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = V_0 \sin \omega t$$

Mekanisk analogi:



$$N2: m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

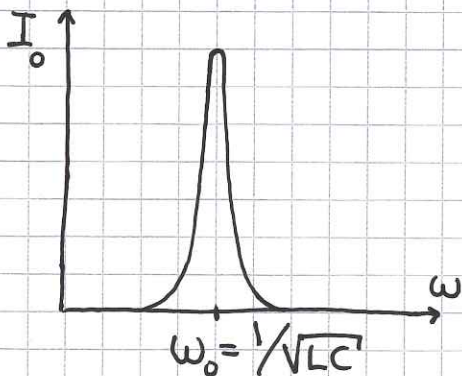
$$\Rightarrow b \leftrightarrow R, \quad F_0 \leftrightarrow V_0$$

$\Rightarrow$  Resonans när  $\omega \approx \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ :

$$Q(t) = Q_0(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$$

$$Q_0(\omega) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}; \quad 2\gamma = R/L$$

$$I(t) = I_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi); \quad I_0(\omega) = \omega Q_0(\omega)$$



Halvverdbredda:  $\Delta\omega = 2\gamma = R/L$

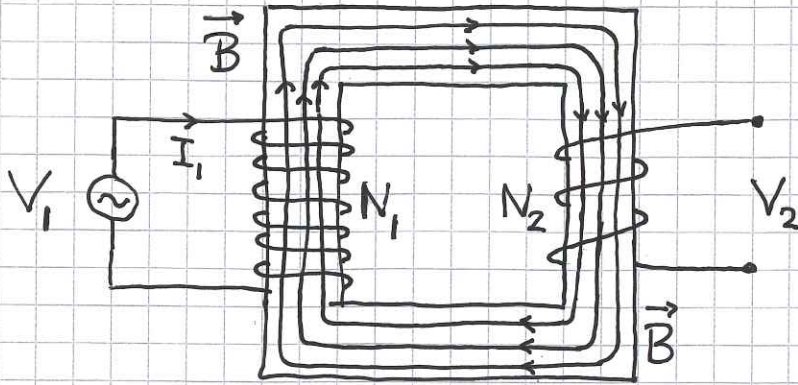
Kvalitetsfaktor:  $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$

Måler  $I_0(\omega)$  og  $Q_0(\omega)$  ved å måle  $V_R = RI$  og  $V_C = Q/C$  over hhv  $R$  og  $C$ .



# ⑦ Transformator

⑦2



Magnetisering av jernkjernen fører til at feltlinjene for  $\vec{B}$  følger jernet; gir samme  $|\vec{B}|$  i begge spoler.

Omskuttet fluks:

$$\Phi_1 = N_1 AB \quad ; \quad \Phi_2 = N_2 AB$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{\dot{\Phi}_1}{\dot{\Phi}_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Dvs: Spenningen inn,  $V_1$ , kan transformeres til spenning ut,  $V_2$ , med redusert eller økt amplitude, med hhv  $N_2 < N_1$  eller  $N_2 > N_1$ :

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} \cdot V_1$$