Størrelser og enheter [OS1-1 ; YF1]

Eks :

Dekadisk forstavelse (μ = mikro = 10^{-6})

Tid t = 20.08 μs

Fysisk størrelse — Symbol — Tallverdi — SI-enhet

Notasjon : $[t] = s$

"SI-enhet for tid er sekund"

Grunnenheter i SI-systemet :

Lengde	$[x] = m$		mekanikk
Masse	$[m] = kg$		mekanikk
Tid	$[t] = s$		mekanikk
Strømstyrke	$[I] = A$		elmag
Temperatur	$[T] = K$		termisk fysikk
Stoffmengde	$[n] = mol$		termisk fysikk
Lysstyrke	$[I] = cd$		

(Fra 20.05.2019 er alle disse definert med utgangspunkt i eksakte tallverdier for ulike naturkonstanter, se SI_base_unit på wikipedia.)

Sammensatte enheter :

Hastighet $[v] = m/s$

Akselerasjon $[a] = m/s^2$ osv.

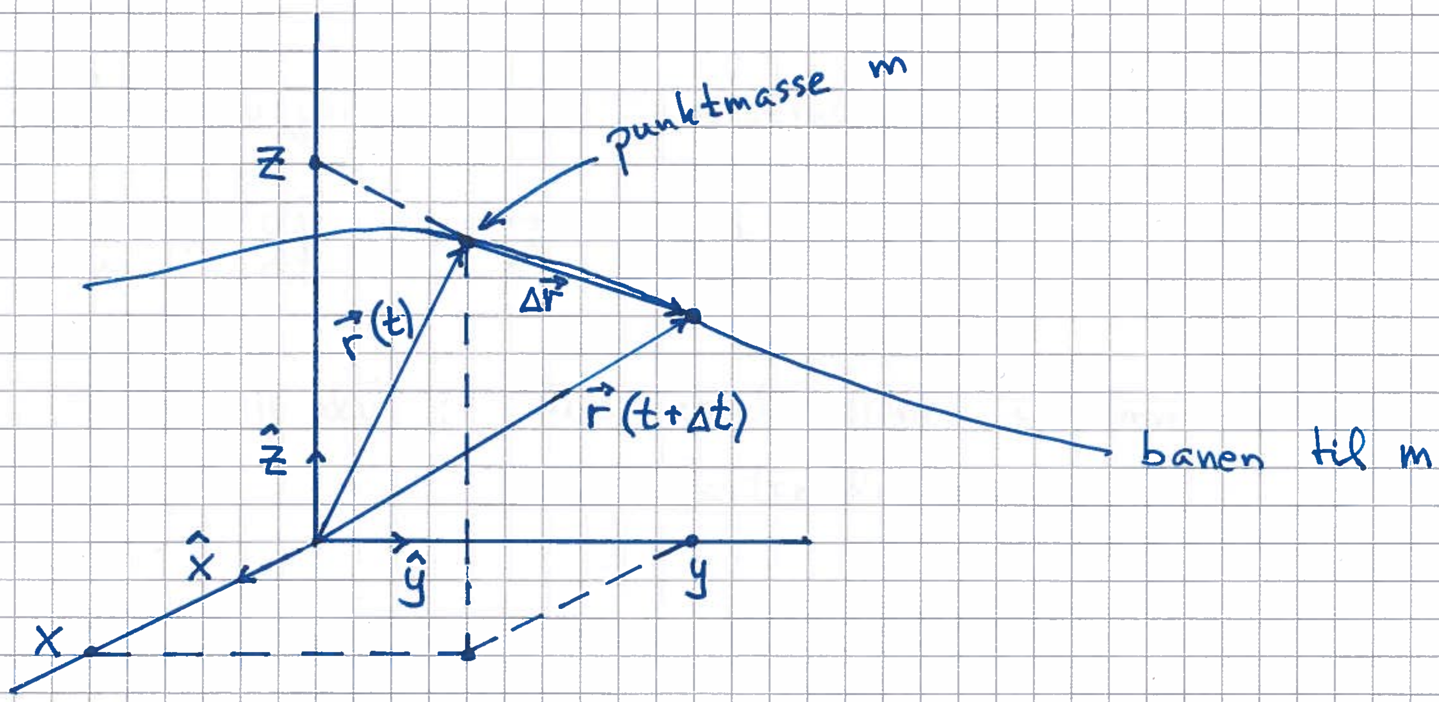
Avledete enheter :

Kraft $[F] = kg \cdot m/s^2 = N$

Energi $[W] = N \cdot m = J$ osv.

MEKANIKK [OS1 1-12, 15 ; YF 1-11, 14 ; LL 1-6, (7) 9]

Kinematikk [OS1 3,4 ; YF 2,3 ; LL 1]



$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{x} + y(t)\,\hat{y} + z(t)\,\hat{z}$$

= posisjonen til m ved tid t

Enhetsvektorer : $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad \text{(dvs dimensjonsløse)}$$

$$\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1 \quad ; \quad \hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{y}\cdot\hat{z} = \ldots = 0$$

Forflytning i løpet av Δt:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

Hastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ forflytning pr tidsenhet

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow$ $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$; dvs $\vec{v}$ er tangent til banen

Akselerasjon $\stackrel{\text{def}}{=}$ hastighetsendring pr tidsenhet

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$\Rightarrow$ $\vec{a} \parallel d\vec{v}$; dvs akselerasjonen i samme retning som fartsendringen

Vektorrelasjoner gjelder komponentvis :

$$\vec{v} = v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y} + v_z\,\hat{z} \quad ; \quad v_x = dx/dt = \dot{x} \quad \text{osv.}$$

$$\vec{a} = a_x\,\hat{x} + a_y\,\hat{y} + a_z\,\hat{z} \quad ; \quad a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad \text{osv.}$$

Integrasjon av $\vec{v}$ gir $\vec{r}$:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v}\, dt$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}(0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_0^t \vec{v}(t)\, dt$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \int_0^t \vec{v}(t)\, dt$$

Integrasjon av $\vec{a}$ gir $\vec{v}$:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a}\, dt$$

$\Rightarrow$ .... som ovenfor ...

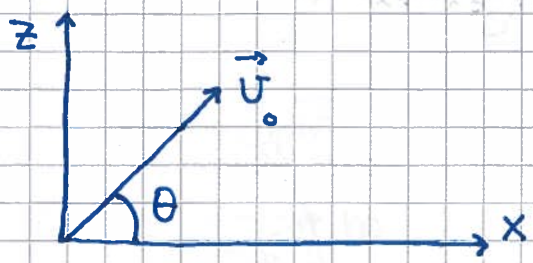
$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(0) + \int_0^t \vec{a}(t)\, dt$$

Hvis $\vec{a}$ er konstant :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\, t \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}\, t^2$$

der $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$

Eks : Skrått kast ; $a = g$ = tyngdens akselerasjon



$$\vec{a} = -g\,\hat{z}$$

$$\vec{r}(0) = 0\,, \qquad \vec{v}(0) = \vec{v}_0$$

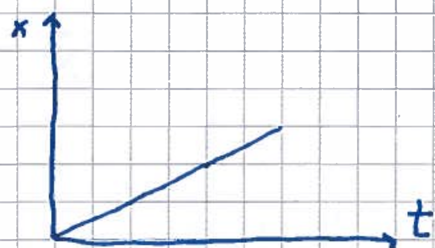
Finn $\vec{r}(t)$ og banen $z(x)$

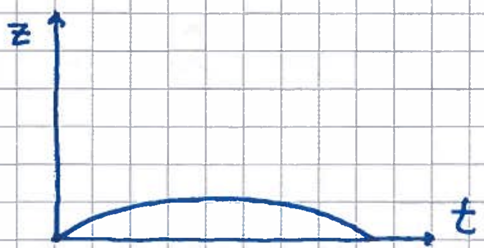
Løsning:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t = \vec{v}_0 - gt\,\hat{z}$$

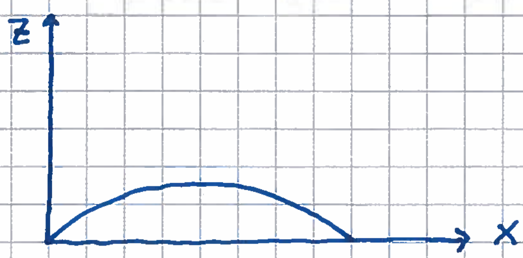
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}\,t^2 = \vec{v}_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = v_0 t \cos\theta\,, \qquad z(t) = v_0 t \sin\theta - \tfrac{1}{2} g t^2$$



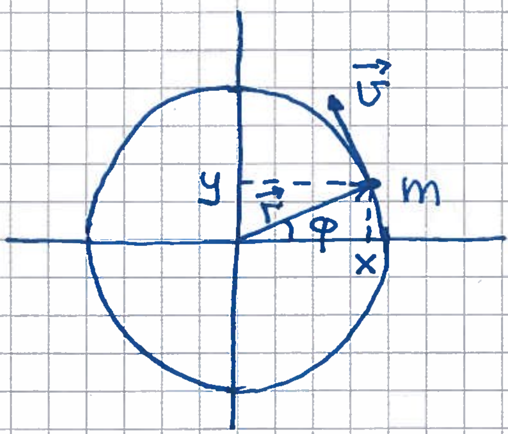


Banen: $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta} \quad \Rightarrow \quad z(x) = x\tan\theta - \dfrac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}$

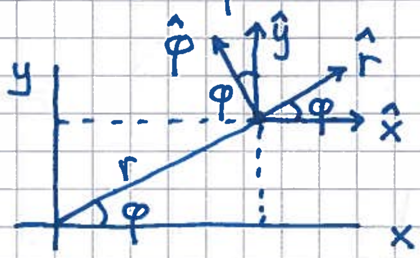


Parabel

Sirkelbevegelse [OS1 4.4; YF 3.4; LL 1.7, 1.8]



$\Rightarrow$ Lurt med polarkoordinater:



r = avstand fra origo

φ = vinkel mellom $\hat{x}$ og $\hat{r}$ (positiv mot klokka)

Ser fra figuren:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x), \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$\vec{r} = \hat{x}\,x + \hat{y}\,y = \hat{x}\,r\cos\varphi + \hat{y}\,r\sin\varphi = r\,\hat{r}$$

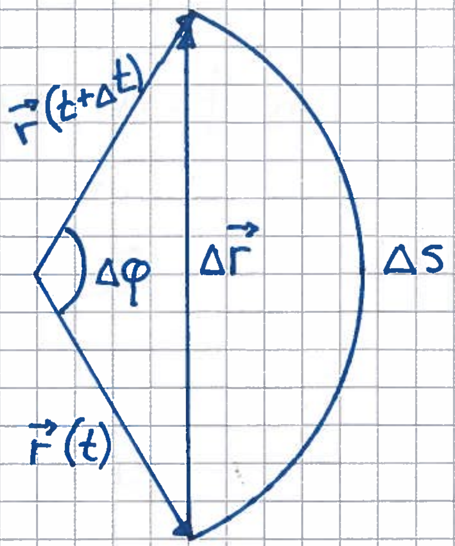
$$\hat{r} = \hat{x}\cos\varphi + \hat{y}\sin\varphi, \quad \hat{\varphi} = -\hat{x}\sin\varphi + \hat{y}\cos\varphi$$

Vinkelhastighet $\stackrel{\text{def}}{=}$ omløpt vinkel pr tidsenhet

$$\omega = d\varphi/dt = \dot{\varphi} \quad ; \quad [\omega] = 1/s$$

Vinkel $\stackrel{\text{def}}{=}$ buelengde / radius

$$\Delta\varphi = \Delta s / r \quad ; \quad [\varphi] = 1 \quad (\text{evt. rad})$$



Når $\Delta t \to 0$, blir $\Delta\varphi$ liten og $\Delta r \approx \Delta s = r\Delta\varphi$

$$\Rightarrow \quad v = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\,\Delta\varphi}{\Delta t} = r\,\frac{d\varphi}{dt} = r\omega$$

Retning: Ser at $\Delta\vec{r} \perp \vec{r}$ når $\Delta\varphi \to 0$

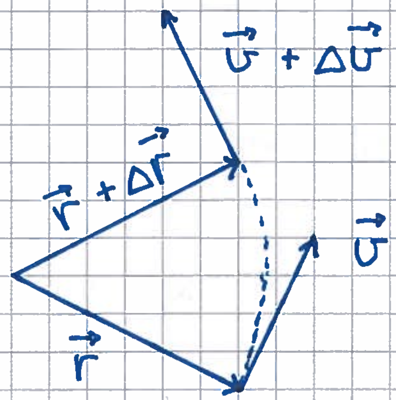
Vet fra før at $\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$

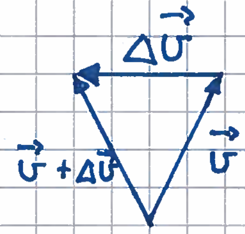
Dermed: $\vec{v} \perp \vec{r}$, dvs $\vec{v} \parallel \hat{\varphi}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v} = v\,\hat{\varphi} = r\omega\,\hat{\varphi}}$$

Akselerasjon:

Vi antar først uniform sirkelbevegelse, dvs konstant ω.





Vi ser at $\Delta\vec{v}$, og dermed $\vec{a}$, har retning inn mot sirkelens sentrum.

Antar $\varphi(0) = 0$ og regner ut $\vec{a}_\perp$:

$$\omega = d\varphi/dt \Rightarrow \int_0^\varphi d\varphi = \omega\int_0^t dt \Rightarrow \varphi(t) = \omega t$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \hat{x}\, r\cos\omega t + \hat{y}\, r\sin\omega t$$

$$\vec{v}(t) = -\hat{x}\,\omega r\sin\omega t + \hat{y}\,\omega r\cos\omega t \qquad (= \omega r\,\hat{\varphi})$$

$$\vec{a}_\perp(t) = -\hat{x}\,\omega^2 r\cos\omega t - \hat{y}\,\omega^2 r\sin\omega t$$

$$= -\omega^2\vec{r}(t)$$

$$= -\omega^2 r\,\hat{r}(t)$$

$$= \underline{\text{sentripetalakselerasjonen}}$$

Hvis v og ω endres, har vi

baneakselerasjon,

$$a_{\parallel} = \dot{v} = r\dot{\omega}$$

og vinkelakselerasjon,

$$\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad ; \quad [\alpha] = 1/s^2$$

Total akselerasjon ved sirkelbevegelse:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\perp} + \vec{a}_{\parallel} = -\omega^2 r\,\hat{r} + \dot{\omega} r\,\hat{\varphi}$$

evt. $\vec{a}_{\perp} = -\dfrac{v^2}{r}\,\hat{r}$ (siden $\omega = v/r$)

Periode = tid pr omløp:

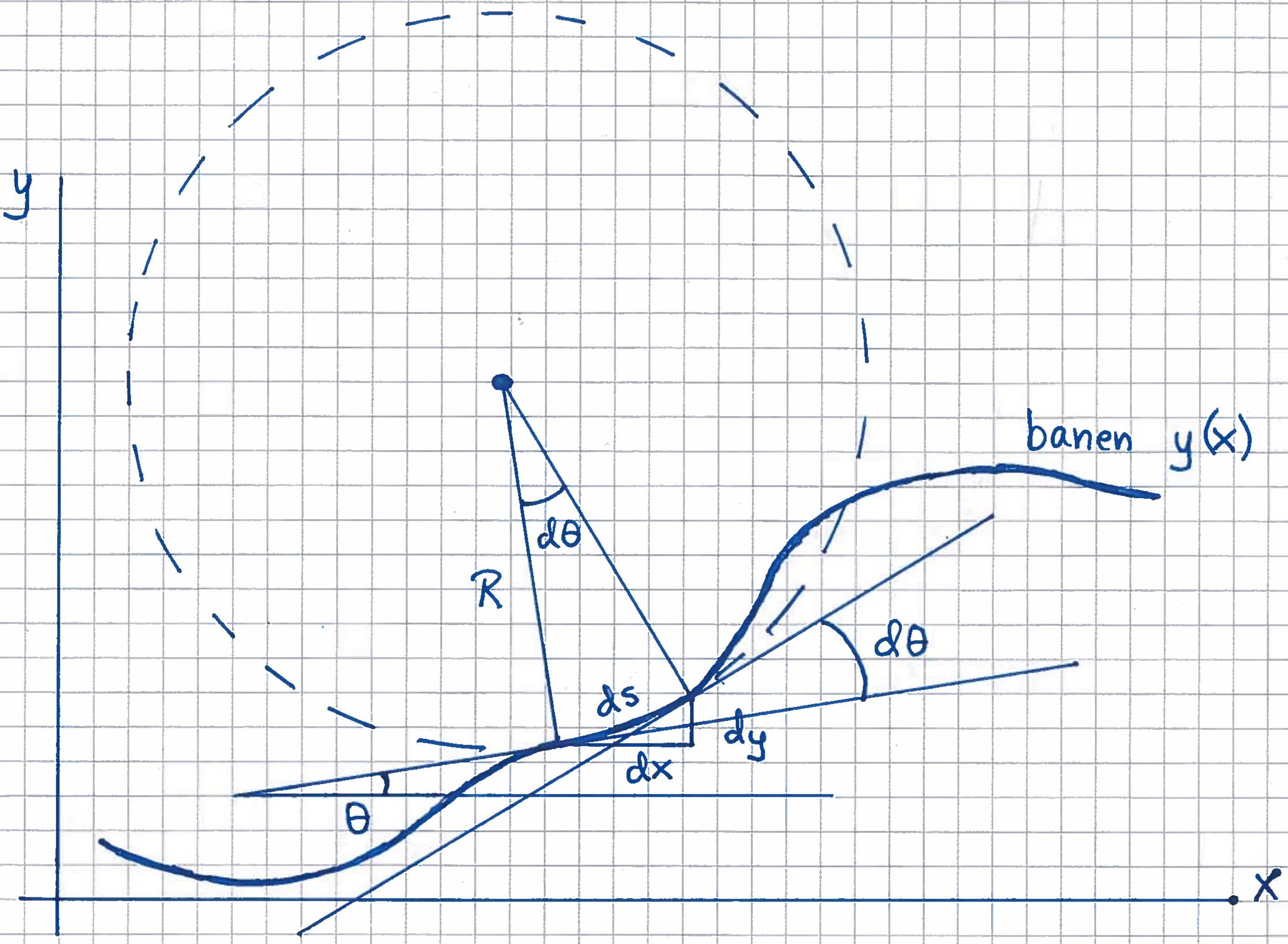
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad [T] = s$$

Frekvens = antall omløp pr tidsenhet:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad ; \quad [f] = \frac{1}{s} = Hz$$

(hertz)

Krumlinjet bevegelse (Lab!)



Langs banen er $a_\perp = v^2/R$, der

krumningsradien R er radien i sirkelen som

best tangerer banen. Vi skal vise at

$$\frac{1}{R} = \frac{|y''|}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}$$

der $y' = dy/dx$ og $y'' = d^2y/dx^2$

Def. av vinkel : $d\theta = \dfrac{ds}{R} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{R} = \dfrac{d\theta}{ds}$

Pythagoras : $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$

$$\Rightarrow \quad ds = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2}$$

Kjerneregel: $\dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{d\theta}{dx} \cdot \dfrac{dx}{ds} = \dfrac{d\theta}{dx} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}}$

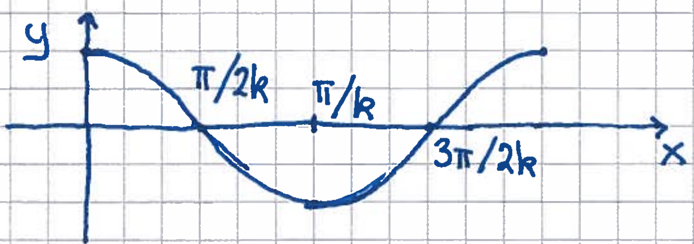
Fra figur: $\tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \quad \theta = \arctan\left(\frac{dy}{dx}\right) = \text{banens helningsvinkel}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{dy'} \cdot \frac{dy'}{dx} = \frac{1}{1 + (y')^2} \cdot y''$$

Dermed: $\underline{\dfrac{1}{R} = \dfrac{|y''|}{\left[1 + (y')^2\right]^{3/2}}}$ (der vi velger R som positiv)

Eks: $y(x) = A \cdot \cos kx$



$y' = -kA\sin kx$

$y'' = -k^2 A \cos kx$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{|k^2 A \cos kx|}{\left[1 + k^2A^2\sin^2 kx\right]^{3/2}}$$

Topp- og bunnpunkter : $\cos kx = \pm 1, \quad \sin kx = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{R} = k^2 A$

Vendepunkter : $\cos kx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = 0 \quad (R \to \infty) \quad \Rightarrow \quad a_\perp = 0$