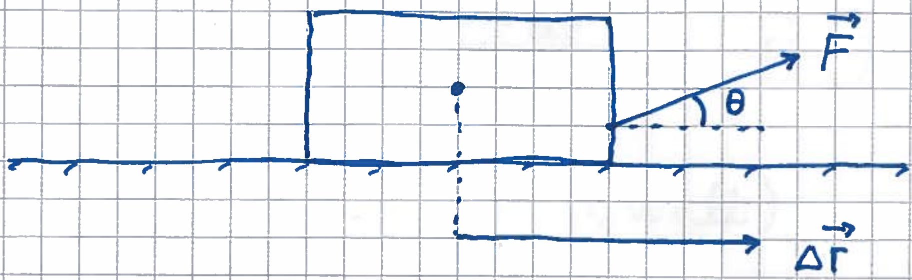
Arbeid og energi [OS1 7, 8 ; YF 6,7 ; LL 4]

Arbeid [OS1 7.1 ; YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]



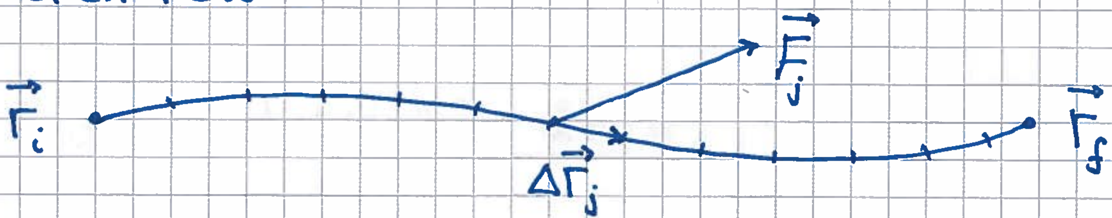
arbeid $\stackrel{def}{=}$ kraft × forflytning

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ på klossen når klossens forflytning er $\Delta\vec{r}$

$$[W] = N \cdot m = J \quad \text{(joule)}$$

Generelt:



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta\vec{r}_j \xrightarrow{\Delta r_j \to 0} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av $\vec{F}$ ved forflytningen fra $\vec{r}_i$ til $\vec{r}_j$

Effekt [OS1 7.4 ; YF 6.4 ; LL 4.1]

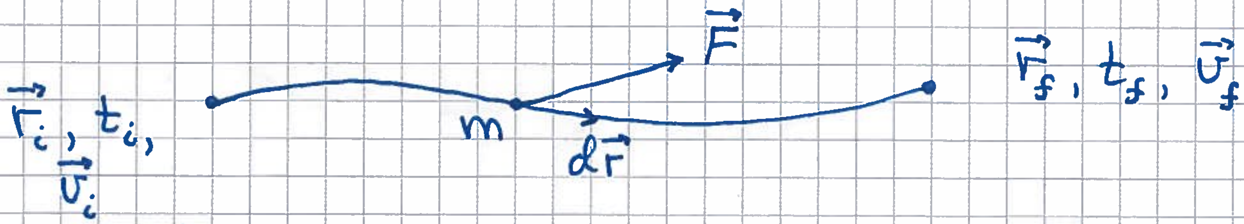
effekt $\overset{\text{def}}{=}$ arbeid (eller energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$[P] = J/s = W \quad (\text{watt})$$

$$1\ \text{kWh} = 1000\ \frac{J}{s}\cdot 3600\ s = 3.6\ MJ$$

Kinetisk energi [OS1 7.2 ; YF 6.2 ; LL 4.2]



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_i^f m\,\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,dt = m\int_i^f \vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$\vec{v}\cdot d\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\vec{v}\cdot d\vec{v} + d\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \frac{1}{2}d\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \frac{1}{2}d\left(v^2\right)$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2}m\int_{v_i^2}^{v_f^2} d\left(v^2\right) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$K = \text{kinetisk energi} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2$$

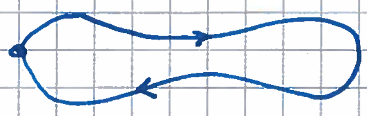
$$\Rightarrow \boxed{W = \Delta K = K_f - K_i}$$

Arbeidet W utført på legemet tilsvarer endringen i legemets kin. energi, ΔK

Konservative krefter [OS1 8.2 ; YF 7.3 ; LL 4]

Anta at $\vec{F}$ virker på legeme som returnerer til startposisjonen:

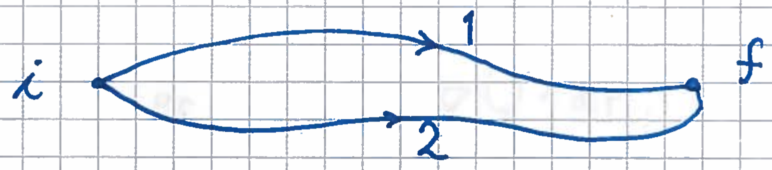
$\vec{r}_f = \vec{r}_i$



Hvis $K_f = K_i$, er $W = \Delta K = 0$, dvs

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

Da er $\vec{F}$ en <u>konservativ</u> kraft, og arbeidet <u>W er uavhengig av veien</u>:



$$0 = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left\{ \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_1 + \left\{ \int_f^i \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}_2$$

$$= W_1 - W_2$$

$$\Rightarrow \underline{W_1 = W_2}$$

Konservative krefter: Tyngdekraft, coulombkraft

Friksjonskrefter er <u>ikke</u> konservative

Potensiell energi

[OS1 8.1–8.4 ; YF 7.1–7.4 ; LL 4.3–4.4]

Hvis $\vec{F}$ er konservativ, defineres den potensielle energien slik:

$$\boxed{U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

Her har vi valgt å sette $U = 0$ i $\vec{r} = \vec{r}_0$

Dvs: Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning

For liten forflytning er altså $dU = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Generelt er $dU = \nabla U \cdot d\vec{r}$, med

$$\nabla U = \hat{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial U}{\partial z} = \text{gradienten til } U$$

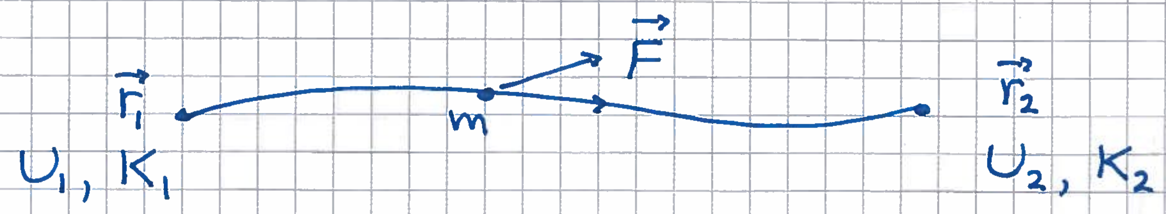
$$d\vec{r} = \hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz$$

Sammenligning gir nå

$$\boxed{\vec{F} = -\nabla U}$$

Bevaring av mekanisk energi

[OS1 8.3 ; YF 7.1-7.3 ; LL 4.5]



$$\Delta K = K_2 - K_1 = W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_0^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} - \left\{ -\int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} \right\}$$

$$= \int_2^0 \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_0^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W$$

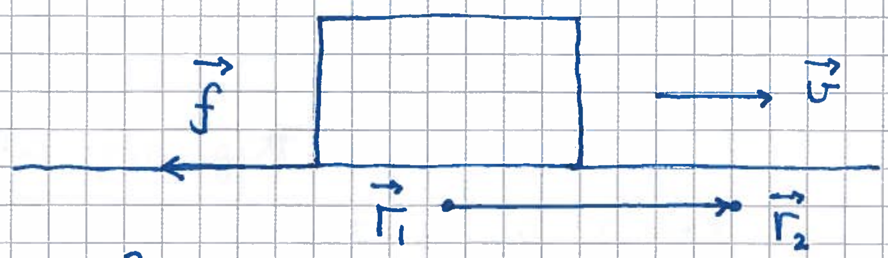
$$\Rightarrow K_2 - K_1 = U_1 - U_2$$

$$\Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Dvs: Total mekanisk energi,

$$E = K + U$$

er <u>bevart</u> i et <u>konservativt</u> system



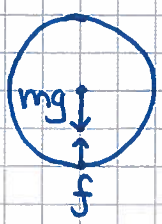
$W_f = \int_1^2 \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ siden $\vec{f}$ alltid har retning mot $d\vec{r}$

Mekanisk energi tapes ; omdannes til varme, lyd etc.

Siden $\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$, er $\vec{f}$ ikke konservativ

Ved ren rulling er kontaktpunktet i ro, dvs statisk friksjon, $d\vec{r} = 0 \Rightarrow W_f = 0$, og mek. energi er bevart.

Eks : Bordtennisball som faller



$m = 2.7\,g$
$r = 20\,mm$
$C_d = 0.5$

- Hva er max fart ?
- Anta max fart og bestem $|W_f|$ når ballen har falt 20 m. ($v_i = 0$)

Løsning :

- Vi antar $f = \frac{1}{2} \rho A C_d v_t^2$ når $v = v_{max} = v_t$ = terminal-hastigheten

N1 $\Rightarrow f = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{2mg/\rho A C_d} \approx \underline{8.4\ m/s}$ ($\rho = 1{,}2\ kg/m^3$; $A = \pi r^2$)

- $E_i = U_i = mgh$; $E_f = \frac{1}{2} m v_t^2$

$|W_f| = E_i - E_f = mgh - m^2 g/\rho A C_d = mg(h - m/\rho A C_d)$

$= \underline{\underline{0.43\ J}}$, som er 82% av opprinnelig mek. energi.

(Fritt fall 20 m $\Rightarrow v_f = \sqrt{2gh} \approx 20\ m/s$)