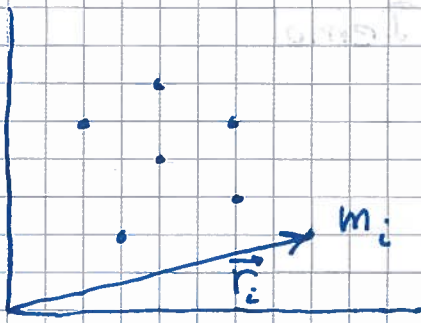


Massesenter [OS1 9.6; YF 8.5 + oppg 8.115, 116;
(Tyngdepunkt) LL 5.6, 5.8, 6.1]

(41)



N punktmasser m_1, m_2, \dots, m_N
i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$

Systemets massesenter: $\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$

Systemets totale masse: $M = \sum_i m_i$

Med kontinuerlig massefordeling:

$$m_i \rightarrow dm; \quad \sum_i \rightarrow \int$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm; \quad M = \int dm$$

Masseelementet dm :

1D: $dm = \lambda dl$; $\lambda =$ masse pr lengde^{enhet}; $dl =$ lengdeelement

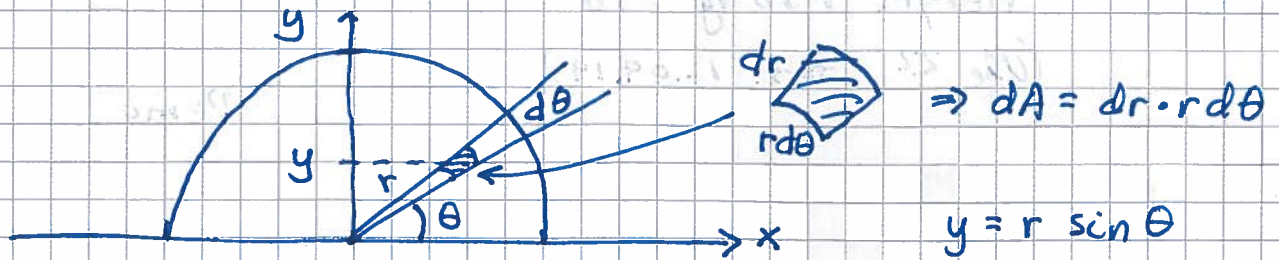
2D: $dm = \sigma dA$; $\sigma =$ " " flateenhet; $dA =$ flateelement

3D: $dm = \rho dV$; $\rho =$ " " volum^{enhet}; $dV =$ volumelement

Uniform massefordeling: $\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V}$ osv

Ekse 1: Halv sirkulær plate, radius R

(42)



$$X = 0 \text{ pga symmetri} \Rightarrow \vec{R}_{cm} = Y \cdot \hat{y}$$

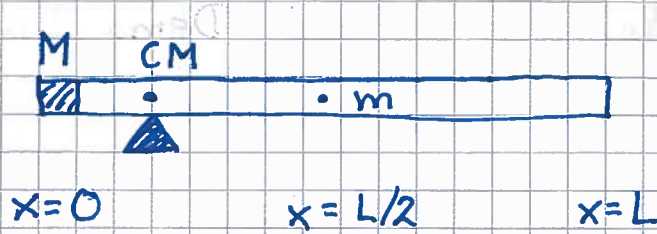
$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA ; A = \frac{1}{2} \pi R^2 \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta dr r d\theta \\ &= \frac{2}{\pi R^2} \left| \frac{r^3}{3} \right|_0^R \cdot \left| (-\cos \theta) \right|_0^\pi = \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{4R}{3\pi} \approx 0.42R}} \end{aligned}$$

Beregn selv disse:

Halv tynn ring: $Y = \frac{2}{\pi} R$

Halv kompakt kule: $Y = \frac{3}{8} R$

Eks 2: Rør med "punktmasse" i enden

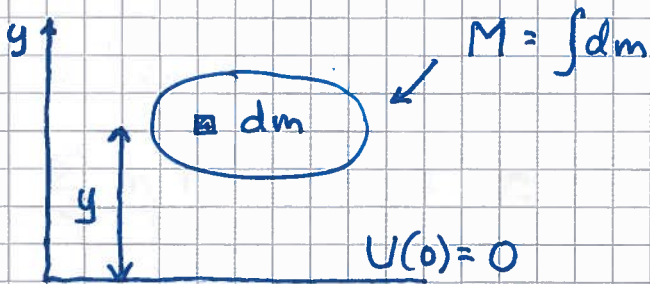


$m = 165 \text{ g}$

$M = 305 \text{ g}$

$$\bar{x}_{CM} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + \int_0^L x \cdot \frac{m dx}{L} \right\} = \frac{mL}{2(m+M)} \approx \underline{0.18L}$$

Eks 3: Potensiell energi i tyngdefeltet



$U = \int dU = \int g y dm = g M Y$, dvs som om hele massen M er plassert i CM's høyde Y

Legemets tyngdepunkt er der det vil balansere (som røret i Eks 2).

Som regel er g like stor for hele systemet. Da er CM og tyngdepunktet samme sted.

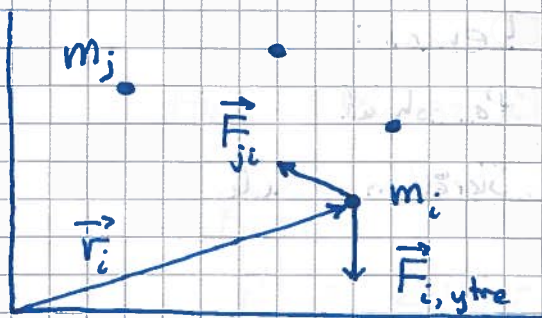
CM's bevegelse

[OS1 9.6 ; YF 8.5 ; LL 5.8]

(44)

Exp. med rør viser / antyder at CM beveger seg som om hele massen er samlet i CM.

Bevis:



$$N2 \text{ for } m_i: m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

Vi tar \sum_i på begge sider.

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \{ M \vec{R}_{cm} \} = M \ddot{\vec{R}}_{cm}$$

$$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{netto ytre kraft på systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \dots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ytre} = M \ddot{\vec{R}}_{cm}}$$

CM's bevegelse er som om hele massen M er samlet i \vec{R}_{cm} og blir påvirket av netto ytre kraft \vec{F}_{ytre} .

Eks: $\vec{F} \rightarrow \boxed{M}$ $\vec{F} \rightarrow \boxed{M}$ $\vec{A}_{cm} = \frac{\vec{F}}{M}$ for begge klasser

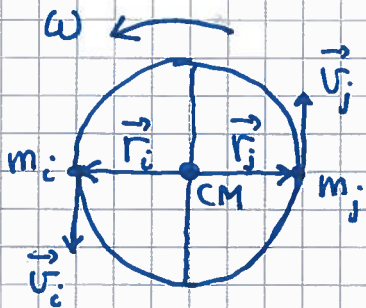
Men klossen til høyre vil også få en rotasjon om CM.

Ikke helt stive legemer kan også få indre vibrasjon.

Rotasjon [OS1 10,11; YF 9,10; LL 5,6]

De neste 2-3 ukene:

- Rotasjon om akse gjennom CM



Hvis CM er i ro (ren rotasjon):

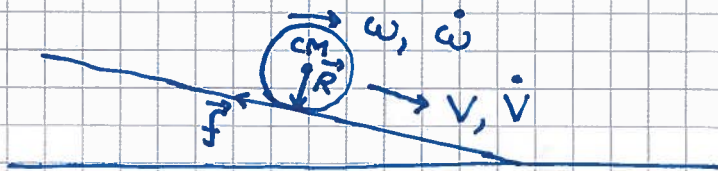
$$K_{CM} = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 = 0$$

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

Men vi har rotasjonsenergi $K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 > 0$

og dreieimpuls (mhp CM) $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \neq 0$

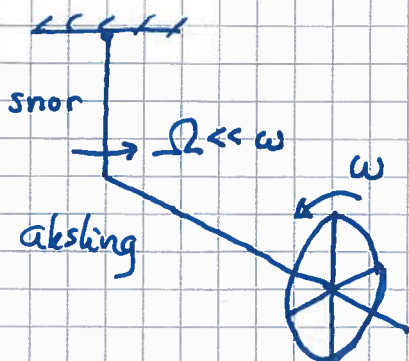
- Rulling: Translasjon av CM + Rotasjon om CM



$\dot{v} > 0$ pga netto ytre kraft $\vec{F} = \vec{G}_{||} - \vec{f}$

$\dot{\omega} > 0$ pga netto ytre dreiemoment (mhp CM) $\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{f}$

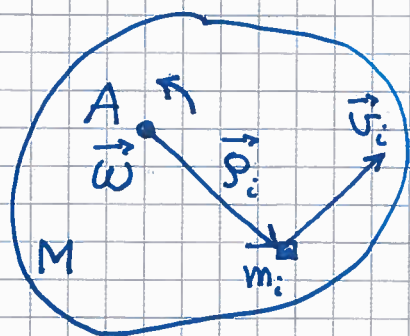
- Kompleks dynamikk



Preesjon
Gyroskop

Rotasjonsenergi. Tregghetsmoment [OS1 10.4; YF 9.4; LL 6.2-6.4] (46)

Ser (stort sett!) på stive legemer, og først ren rotasjon om fast akse (ikke nødvendigvis gjennom CM):



Antar rotasjonsaksen A langs \hat{z} ut av planet.

Lar vinkelfarten være en vektor langs rot.aksen:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

Høyrehåndsregel (HHR) for "fortegnet" på $\vec{\omega}$:

4 fingre på HH følger rot. bevegelsen. (Her: Mot klokke)

Da peker tommelen langs $\vec{\omega}$.

Fra figur:

$$\vec{\rho}_i = \rho_i \hat{\rho} \quad ; \quad \rho_i = \text{avstand fra A til } m_i$$

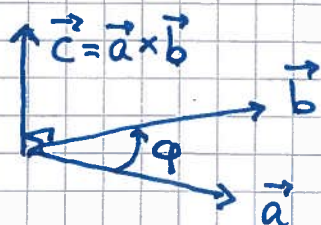
$$\vec{v}_i = v_i \hat{\phi} \quad ; \quad \vec{v}_i = \text{farten til } m_i$$

$$\vec{\rho}_i \perp \vec{v}_i, \quad \vec{\rho}_i \perp \vec{\omega}, \quad \vec{v}_i \perp \vec{\omega}$$

$$\text{Fra før: } v_i = \rho_i \omega$$

$$\text{Dermed: } \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

HHR for kryssprodukt: 4 fingre langs \vec{a} bøyes mot \vec{b} ; da peker tommelen langs $\vec{a} \times \vec{b}$:



$$c = |\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| \\ = a \cdot b \cdot \sin \phi$$

Bruker her syylinderkoordinater = polarkoord. + z

= ρ, φ, z [Reserverer \vec{r} som posisjonsvektor relativt origo!]

Rotasjonsenergi:

$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i \rho_i^2 \right\} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

der I = legemets treghtetsmoment mhp rot.aksen A:

$$I \stackrel{def}{=} \sum_i m_i \rho_i^2$$

Med kontinuerlig massefordeling: $m_i \rightarrow dm$; $\sum_i \rightarrow \int$

$$I = \int \rho^2 dm$$

ρ = avstand fra A til dm

Generell bevegelse for stivt legeme: Translasjon av CM, med fart \vec{V} , og rotasjon om akse gjennom CM, med vinkel fart $\vec{\omega}$.

Total kin. energi blir (ganske enkelt!)

$$K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

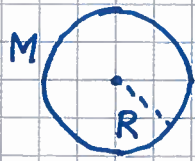
Se utlagt notat for utledning. [og YF 10.3; LL 6.6]

Notasjon: I_0 betyr mhp akse gjennom CM.

Tregghetsmoment, eksempler [OS1 10.5; YF 9.6; LL 6.3]

(48)

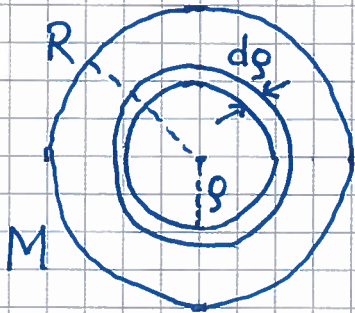
- Ring eller hul sylinder



$$I_0 = \int r^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

[Oppgis ikke til eksamen]

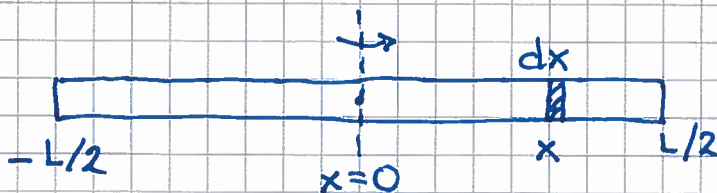
- Skive eller kompakt sylinder = sum av tynne ringer med radius g og tykkelse dg



$$\begin{aligned} dI_0 &= g^2 dm = g^2 \cdot M \cdot dA / \pi R^2 \\ &= g^2 \cdot M \cdot 2\pi g dg / \pi R^2 = 2Mg^3 dg / R^2 \end{aligned}$$

$$I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R g^3 dg = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}} \quad [\text{Oppgis}]$$

- Tynn stang eller tynn plate (f.eks. ei dør)



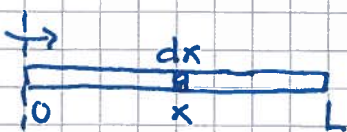
eller



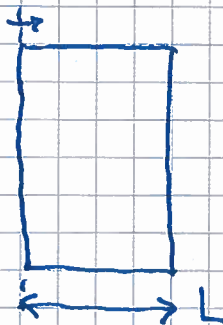
$$g = x, \quad dm = M \cdot dx / L$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}} \quad [\text{Oppgis}]$$

Mhp akse ved enden:



eller

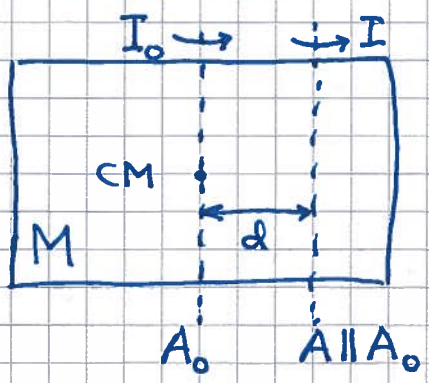


$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

[Oppgis ikke pga Steiners sets, som oppgis]

- Kuleskall : $I_o = \frac{2}{3}MR^2$
 - Kompakt kule: $I_o = \frac{2}{5}MR^2$
- } Oppgis. Se øving/LF for detaljer.

Steiners sats [OS1 10.5; YF 9.5; LL 6.3]

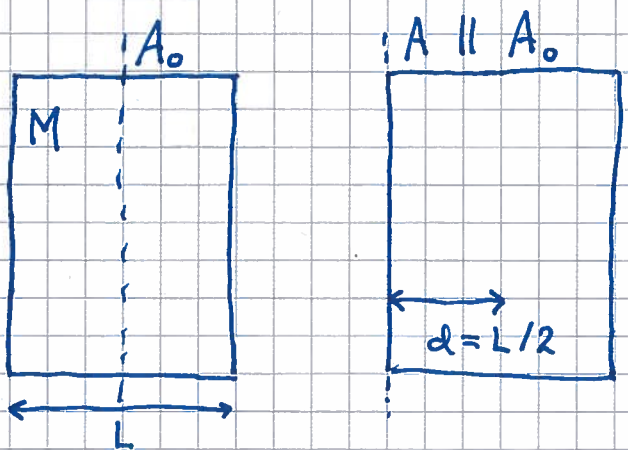


Med A parallell med A_o er

$$I = I_o + Md^2$$

[Se notat for utledning]

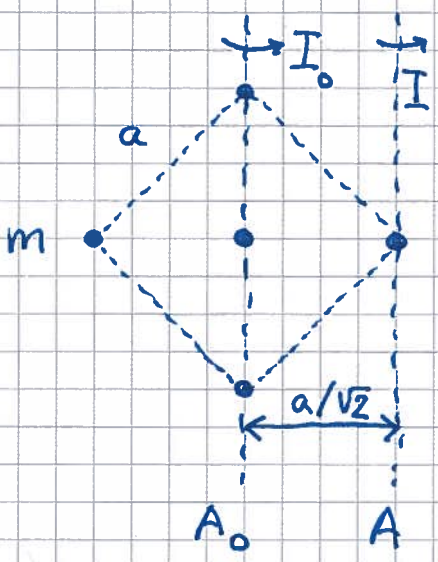
Eks 1: Dør



$$I = I_o + M \cdot (L/2)^2$$

$$= \frac{1}{3} ML^2 \quad (\text{OK!})$$

Eks 2: System med 5 punktmasser



$$I_o = 2 \cdot m \cdot (a/\sqrt{2})^2 = \underline{ma^2}$$

$$\Rightarrow I = I_o + 5m \cdot (a/\sqrt{2})^2 = \underline{\frac{7}{2} ma^2}$$