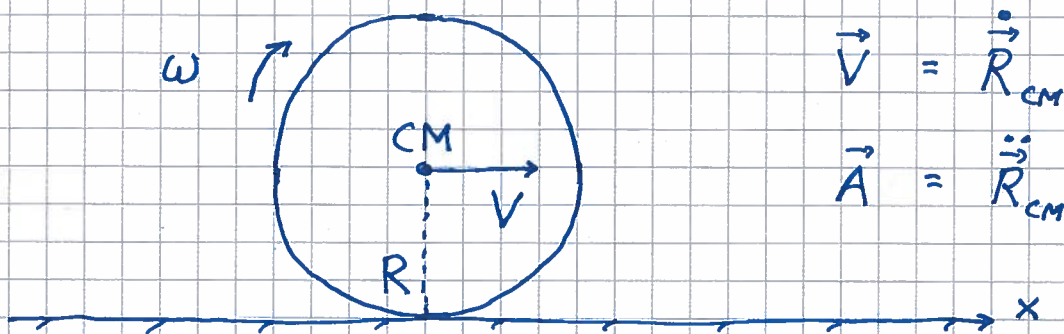


Rulling [OS1 11.1 ; YF 10.3 ; LL 6.7]

50



$$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$$

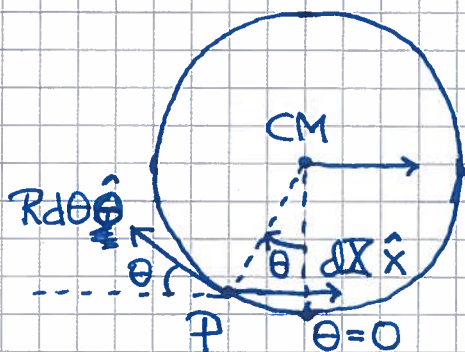
$$\vec{A} = \ddot{\vec{R}}_{CM} = \dot{\vec{V}}$$

Ren rulling : Ved rotasjon en liten vinkel $d\theta = \omega dt$ om CM flyttes CM lengden $dx = R d\theta = R\omega dt$ mot høyre, slik at $dx/dt = R\omega$, dvs

$$\boxed{V = R\omega}$$

Rullebetingelsen ($\Rightarrow A = R\dot{\omega}$)

Punkt P på periferien følger en sykloide :



Forflytning av P ved vinkelendring fra θ til $\theta + d\theta$:

$$d\vec{r} = R d\theta \hat{\theta} + dX \hat{x}$$

Her er

$$\hat{\theta} = -\hat{x} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta \quad \text{og} \quad dX = R d\theta$$

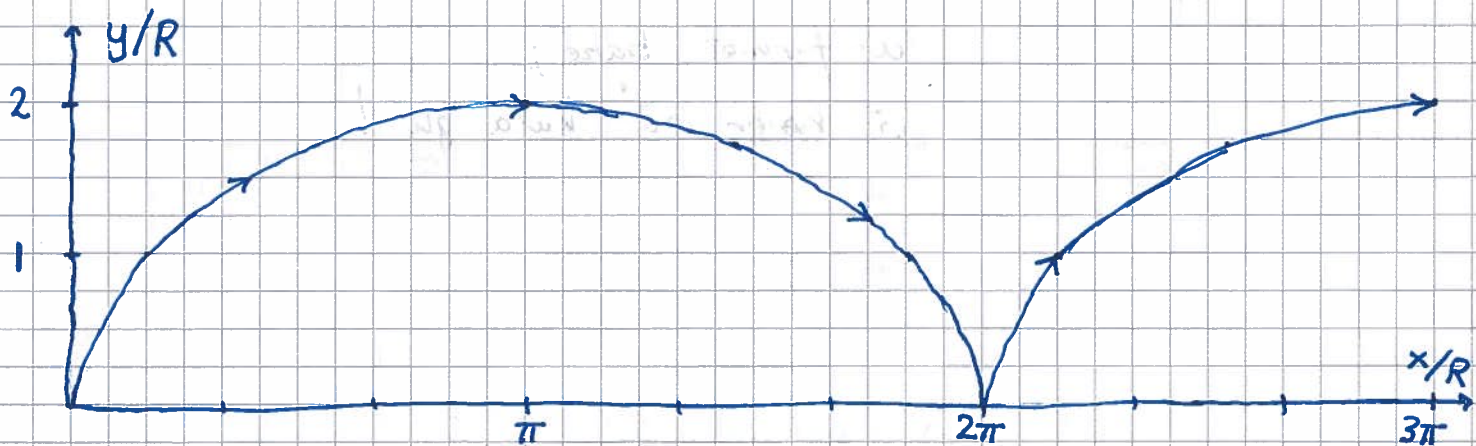
slik at

$$d\vec{r} = \hat{x} R d\theta (1 - \cos \theta) + \hat{y} R d\theta \sin \theta$$

Anta P i origo, $x=y=0$, når $\theta=0$. Da er

$$\vec{r} = \int d\vec{r} = \int_0^\theta \{ \hat{x} R d\theta (1 - \cos\theta) + \hat{y} R d\theta \sin\theta \}$$

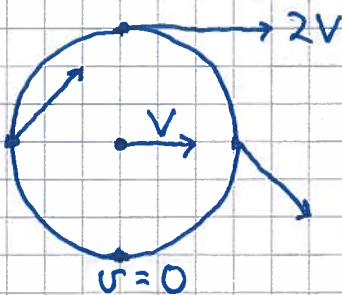
$$= \underline{\hat{x} R (\theta - \sin\theta) + \hat{y} R (1 - \cos\theta)}$$



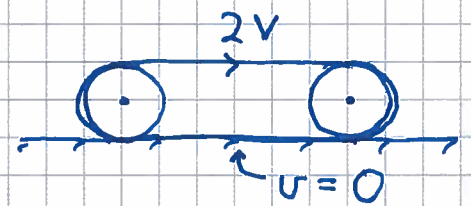
Hastigheten til P:

$$\vec{v} = \hat{x} (R\dot{\theta} - R\dot{\theta} \cos\theta) + \hat{y} R\dot{\theta} \sin\theta$$

$$= \hat{x} V (1 - \cos\theta) + \hat{y} V \sin\theta$$



F.eks. beltevogn:



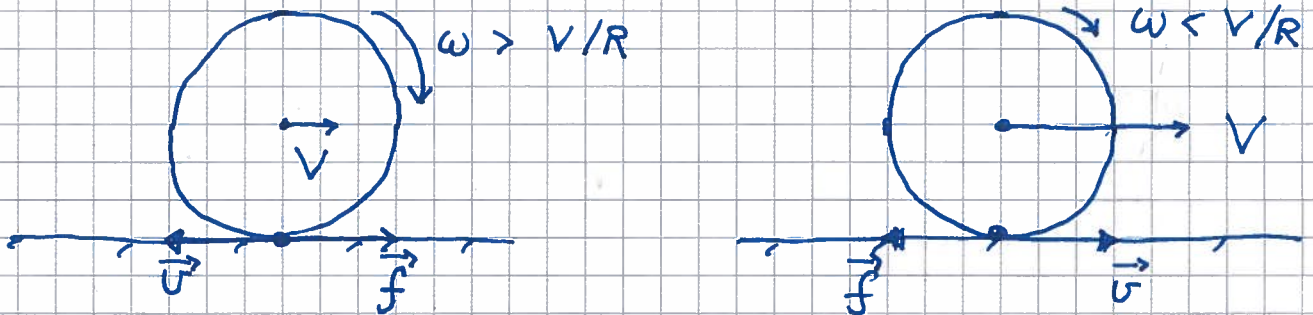
Merk: $v=0$ når P har kontakt med underlaget; da er $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$, dvs null effekttap, selv med $f \neq 0$.

Med ren rulling er $K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} c M R^2 \cdot \frac{V^2}{R^2}$

$$= \underline{(1+c) \cdot \frac{1}{2} M V^2}; \quad c = \frac{2}{5} \text{ for kompakt kule, osv.}$$

Sluring: Ruller og glir. [OS1 11.1 ; LL 6.7] (52)

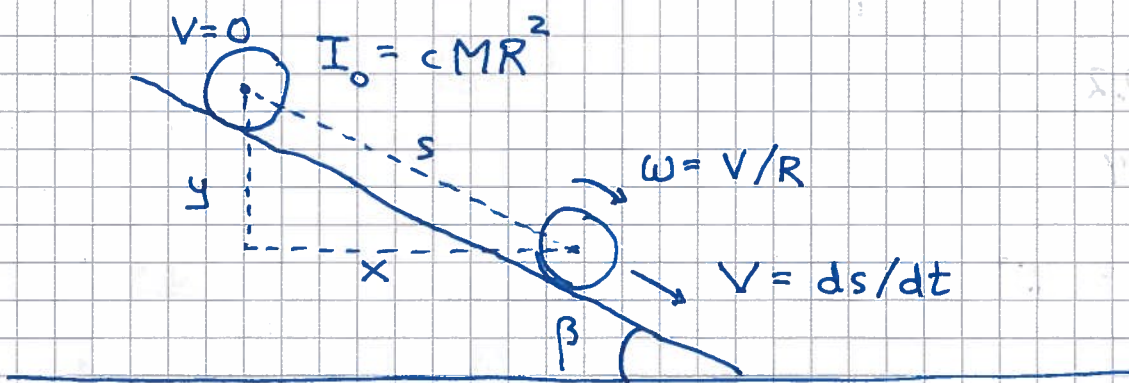
Hvis $\omega \neq V/R$, har legemets kontaktpunkt farten $v = V - \omega R \neq 0$, dvs det glir:



$$f = \mu_k \cdot N \quad ; \quad P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$$

⇒ taper mek. energi pr tidsenhed lik $|P_f|$

Ren rulling på skråplan [OS1 11.1 ; YF 10.3 ; LL 6.8]



Bestem V , A , f og største β som gir ren rulling

Løses enklast med energibevarelse: $|\Delta U| = |\Delta K|$

$$\Rightarrow Mgy = (1+c)\frac{1}{2}MV^2 \quad \Rightarrow \underline{V = \sqrt{2gy/(1+c)}}$$

$$\Rightarrow V(\text{kule}) > V(\text{skive}) > V(\text{kuleskall}) > V(\text{hul sylinder})$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \\
 &= \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot \frac{1}{2} y^{-1/2} \cdot \sin \beta \cdot V \quad (V = \sqrt{\frac{2g}{1+c}} \cdot y^{1/2}) \\
 &= \underline{\underline{\frac{g \sin \beta}{1+c}}}
 \end{aligned}$$

Uten friksjon: $F_{||} = Mg \sin \beta \Rightarrow A (f=0) = g \sin \beta$
 \Rightarrow Vi må ha \vec{f} , rettet oppover skråplanet.

$$\begin{aligned}
 N2: \quad Mg \sin \beta - f &= MA = Mg \sin \beta / (1+c) \\
 \Rightarrow \quad \underline{\underline{f = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta}}
 \end{aligned}$$

Ren rulling bare dersom

$$f \leq f_{max} = \mu_s \cdot N = \mu_s Mg \cos \beta$$

$$\Rightarrow \frac{c}{1+c} \sin \beta \leq \mu_s \cos \beta$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\beta \leq \arctan \left\{ \mu_s \cdot \frac{1+c}{c} \right\}}}$$

Eks: Stålkule på plastbane, med $\beta = 30^\circ$
 $\mu_s \approx 0.2, \quad c = 0.4$

$$\Rightarrow A = 0.36g$$

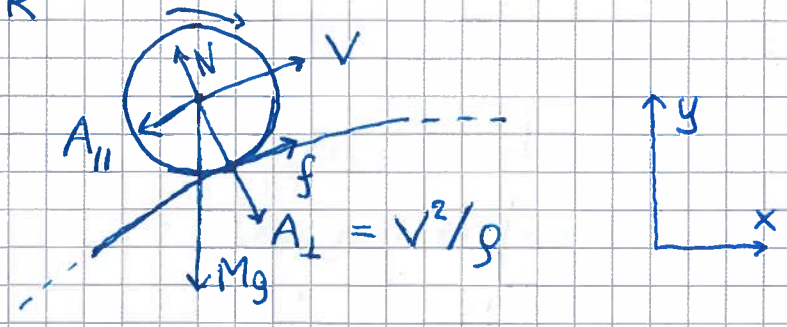
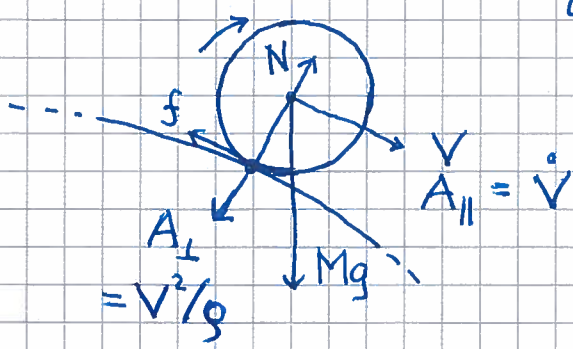
$$f = 0.14 Mg$$

$$\beta_{max} = \arctan(0.7) = 35^\circ$$

Lab: Ren rulling på krum bane

$$\omega = v/R$$

$$I_0 = c = MR^2$$



$$A_{\parallel} = \dot{v} = g \sin \beta / (1+c) \quad ; \quad \tan \beta = dy/dx = y'$$

$$A_{\perp} = v^2/g \quad ; \quad v/g = |y''| / [1 + (y')^2]^{3/2}$$

$N \perp$ banen:

$$MA_{\perp} = Mv^2/g = \begin{cases} Mg \cos \beta - N & \text{(krumning ned)} \\ N - Mg \cos \beta & \text{(--- opp)} \end{cases}$$

Ekperimentelt:

- Film av bevegelsen
 - "Tracking" av CM gir $\{x(t), y(t)\}_{exp}$
 - Måling av $y(x)$ i 8 festepunkter.
- Gir god tilnærming til hele banen $y(x)$ med såkalte kubiske splines (se neste side).

Numerikk:

- Beregn $\{x(t), y(t)\}_{num}$ med utgangspunkt i $dV/dt = g \sin \beta / (1+c)$, startbetingelser $\{x(0), y(0)\}$ og kjent bane $y(x)$, dvs kjent $\beta = \arctan(dy/dx)$

Kubisk spline: Labbanen $y(x)$ tilnærmes med

3. grads - polynomer

$$S_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, 6$$

på hver av de 7 intervallene (x_j, x_{j+1}) , der de 8 festepunktene $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_7, y_7)$ er kjent, og på løben med fast avstand horisontalt, $h = x_{j+1} - x_j = 20.0 \text{ cm}$. Polynomene $S_j(x)$ velges slik at $S_j(x_{j+1}) = S_{j+1}(x_{j+1}) = y_{j+1}$, og dessuten slik at $S'(x)$ og $S''(x)$ er kontinuerlige i festepunktene (og dermed overalt). En velger gjerne $y_0'' = y_7'' = 0$, dvs null krumning i de ytterste festepunktene.

Skrives nå polynomene på formen

$$S_j(x) = \frac{y_j'' - (x_{j+1} - x)^3}{6h} + \frac{y_{j+1}'' (x - x_j)^3}{6h} + \left(\frac{y_{j+1}}{h} - \frac{y_{j+1}'' \cdot h}{6} \right) \cdot (x - x_j) + \left(\frac{y_j}{h} - \frac{y_j'' \cdot h}{6} \right) \cdot (x_{j+1} - x) \quad ; \quad j = 0, 1, \dots, 6$$

blir de ukjente størrelsene $y_1'', y_2'', \dots, y_6''$ løsningen av de 6 lineære ligningene $A \vec{y}'' = \vec{b}$, dvs

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1'' \\ y_2'' \\ y_3'' \\ y_4'' \\ y_5'' \\ y_6'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{bmatrix} \quad \text{med} \quad b_j = \frac{6}{h^2} (y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1})$$

Når alle $S_j(x)$ er beregnet, kan $y'(x)$ og $y''(x)$ beregnes, hvor som helst mellom x_0 og x_7 . Dvs, helningsvinkel β og krumningsradius ρ kan beregnes langs hele banen.

Numenikk: Bruker Euler - metoden her.

(56)

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Rightarrow \Delta V = \frac{g \sin \beta}{1+c} \Delta t$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = V \Rightarrow \Delta S = V \Delta t$$

$$t_0 = 0, t_1 = \Delta t, \dots, t_n = n \Delta t, \dots$$

$$x_0 = 0, y_0 = 0, V_0 = V(t_0), \beta_0 = \arctan \{y'(x_0)\}$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x_0 = V_{0x} \Delta t = V_0 \cos \beta_0 \cdot \Delta t$$

$$y_1 = y(x_1)$$

$$V_1 = V_0 + \Delta V_0 = V_0 + \frac{g \sin \beta_0}{1+c} \Delta t ; \beta_1 = \arctan \{y'(x_1)\}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x_1 = x_1 + V_{1x} \Delta t = x_1 + V_1 \cos \beta_1 \cdot \Delta t$$

$$y_2 = y(x_2)$$

$$V_2 = V_1 + \frac{g \sin \beta_1}{1+c} \Delta t ; \beta_2 = \arctan \{y'(x_2)\}$$

osv.

• Deretter kan exp. og num. beregelse sammenlignes, dvs

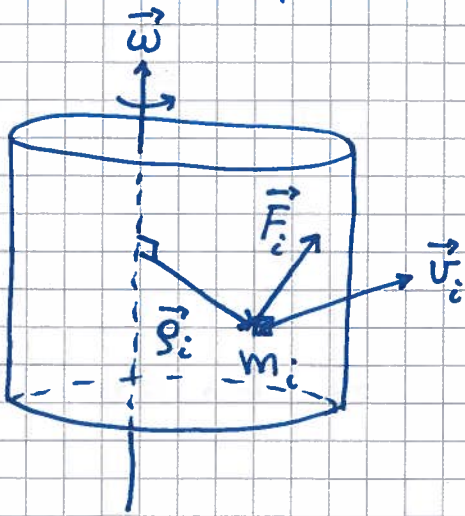
$$\{x(t), y(t)\}_{\text{exp}} \quad \text{vs} \quad \{x(t), y(t)\}_{\text{num}}$$

• Kraftene \vec{N} og \vec{f} fra banen på objektet kan (og skal!) beregnes, og framstilles grafisk på hensiktsmessig vis.

• Dissipative krefter - dvs slike som fører til tap av mekanisk energi - kan modelleres, på "laminær form" som $\vec{f} = -k \cdot \vec{V}$, og/eller på "turbulent form" som $\vec{f} = -D \cdot V^2 \cdot \hat{V}$.

Rotasjonsdynamikk

Akse med fast orientering [OS1 10.6, 10.7; YF 10.1, 10.2; LL 6.2]



Legemet tilføres effekten

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = \sum_i F_{i\parallel} v_i \\
 &= \left\{ \sum_i F_{i\parallel} r_i \right\} \omega \\
 &= \tau \omega
 \end{aligned}$$

Her er $\tau = \sum_i F_{i\parallel} r_i =$ netto ytre dreiemoment på legemet, mhp rot.aksen; $F_{i\parallel}$ er komponenten langs \vec{v}_i av ytre kraft \vec{F}_i på masseelement m_i .

Tilført effekt tilsvarer økning i kin. energi pr tidsenhet:

$$P = \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} I \omega^2 \right\} = \frac{1}{2} I \cdot 2\omega \cdot \frac{d\omega}{dt} = I \omega \dot{\omega}$$

der $I = \sum_i m_i r_i^2$ er legemets treghetsmoment mhp rot.aksen

Sammenligning gir

$$\boxed{\tau = I \dot{\omega}}$$

som er N2 for rotasjon om akse med fast orientering.

Jf. N2 for translasjon: $F = m \dot{v}$

Arbeid utført av τ [OS1 10.8; YF 10.4; LL 6.4]

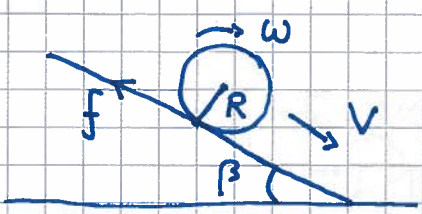
$$P = \tau \omega = \tau \frac{d\phi}{dt} \quad \text{og} \quad P = \frac{dW}{dt}$$

$$\Rightarrow \boxed{dW = \tau d\phi}$$

= arbeid utført av τ ved omloopt vinkel $d\phi$

Jf. arb. utf. ved transl. : $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Eks 1: Ren rulling på skråplan



$$I_o = cMR^2, \quad \omega = v/R, \quad \dot{\omega} = \dot{v}/R$$

$$N2, II: Mg \sin \beta - f = M\dot{v}$$

$$N2 \text{ for rot. om akse gjennom CM: } \tau = I_o \dot{\omega}$$

Her er $\tau = f \cdot R$; både \vec{N} og $M\vec{g}$ har null arm relativt akse gjennom CM.

(Kraftens arm = Avstanden fra akse til kraftens forlengelseslinje)

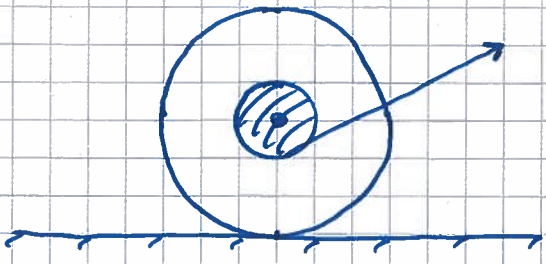
$$\text{Dermed: } f \cdot R = cMR^2 \cdot \frac{\dot{v}}{R} \Rightarrow f = cM\dot{v}$$

$$\text{som innsatt i } N2, II \text{ gir } Mg \sin \beta - cM\dot{v} = M\dot{v},$$

dus

$$\underline{\dot{v} = \frac{g \sin \beta}{1+c}} \quad (\text{som s. 53})$$

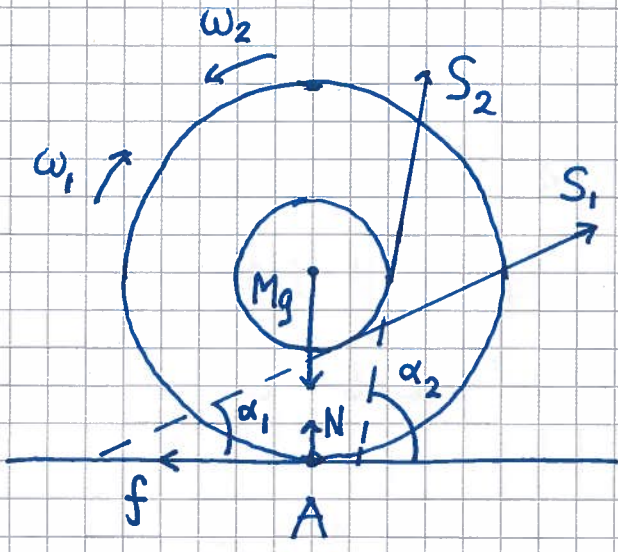
Eks 2: Trådsnelle på flatt underlag



S = snordraget

Når ruller snella mot høyre og mot venstre?

"Triks": Velg "kontaktlinja" som referanseakse A.



Bare S som har en arm, og dermed dreiemoment τ_A mhp aksen A.

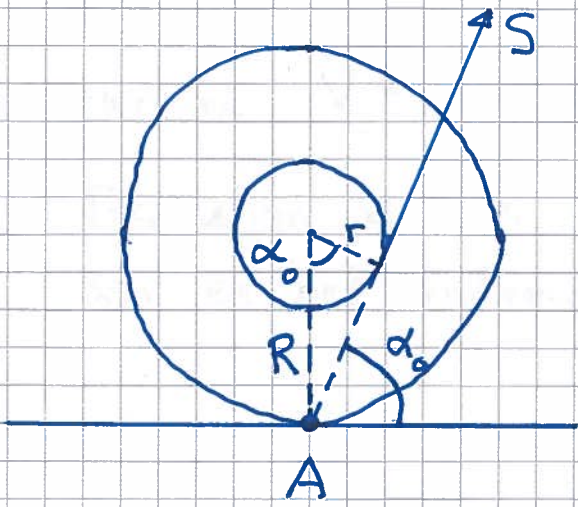
$S_1 \Rightarrow$ (rot.) mot høyre

$S_2 \Rightarrow$ (rot.) mot venstre

Hvis forlengelsen av \vec{S} går gjennom A, må snella bli liggende i ro:

$$\sum \tau_A = 0 \Rightarrow \dot{\omega} = 0$$

$$\Rightarrow \text{ingen rotasjon}$$



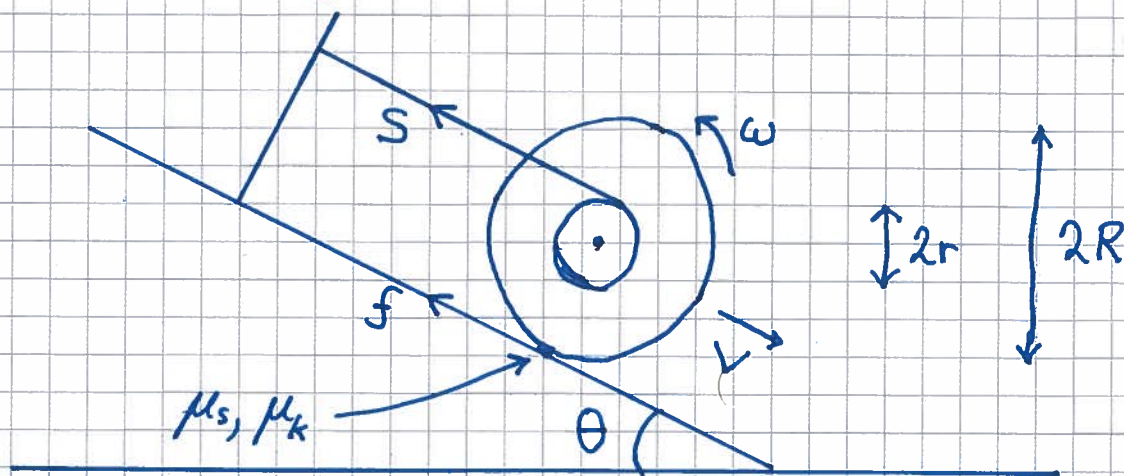
Fra figur i

$$\cos \alpha_0 = \frac{r}{R}$$

(Hvis $S_x > f_{max}$, glir snella mot høyre, uten å rotere)

Eks 3: Baklengssnelle (Øv. 6)

60



- Hvor stor er max vinkel θ_0 uten at snella slurer baklengs nedover skr pplanet?

L s n: $N_1 \parallel$ skr pplanet og N_1 for rot. om CM

$$f = f_{\max} = \mu_s N \quad \text{n r} \quad \theta = \theta_0$$

- Hvis $\theta > \theta_0$, hva blir S og \dot{V} ?

L s n: $N_2 \parallel$ skr pplanet og N_2 for rot. om CM

$$f = \mu_k N$$

Her m  $V = \omega r$ v re oppfylt:

Translasjon av CM en lengde $2\pi r$ tar samme tid som en hel omdreining, dvs omk pt vinkel 2π