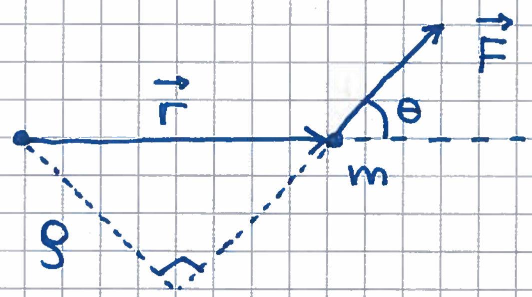
Rotasjonsdynamikk i 3D

Generelt må dreiemoment $\vec{\tau}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ beregnes relativt et fritt valgt referansepunkt $\vec{r}_0$. Posisjonen til en punktmasse m, relativt $\vec{r}_0$, er da $\vec{r}-\vec{r}_0$, dersom $\vec{r}$ er dens pos. relativt origo.
For enkelhets skyld velger vi her $\vec{r}_0 = 0$.

Dreiemoment [OS1 10.6; YF 10.1; LL 5.5, 6.4]



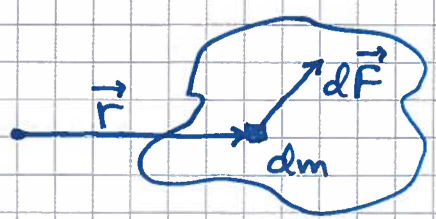
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$ = kraftens dreiemoment på m (rel. origo)

$\Rightarrow \vec{\tau} \perp \vec{r}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ (Her: $\vec{\tau}$ ut av planet)

$$\tau = |\vec{\tau}| = r \cdot F \cdot \sin\theta = \rho \cdot F$$

der ρ = kraftens arm = avstand fra ref.punktet til kraftens forlengelseslinje

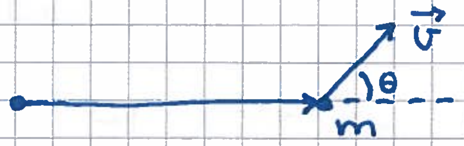
For partikkelsystem:



$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$$

= netto dreiemoment på systemet

Dreieimpuls [OST 11.2; YF 10.5; LL 6.6]

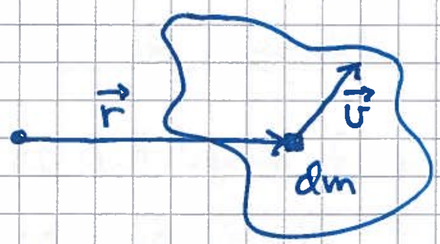


$\vec{p} \approx m\vec{v}$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}} \quad = \text{massens dreieimpuls (rel. origo)}$$

$\vec{L} \perp \vec{r}$; $\vec{L} \perp \vec{p}$ og $L = |\vec{L}| = r \cdot p \cdot \sin\theta$

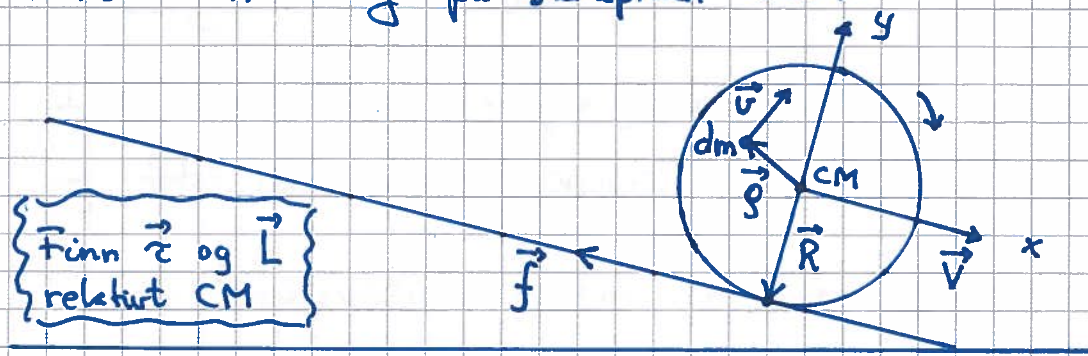
For partikkelsystem:



$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int \vec{r} \times \vec{v}\, dm = \int \vec{r} \times d\vec{p}$$

= systemets totale dreieimpuls

Eks: Rulling på skråplan (☺)



Finn $\vec{\tau}$ og $\vec{L}$ relativt CM

$\vec{V} = V\hat{x}$
$\vec{\omega} = -\omega\hat{z}$
$\vec{R} = -R\hat{y}$
$\vec{f} = -f\hat{x}$
$\vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$
$\vec{v} = -v\hat{\varphi}$

$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{f} = \underline{\underline{-Rf\,\hat{z}}}$$

$$\vec{L} = \int \vec{\rho} \times \vec{v}\, dm = \int \rho \cdot \omega\rho \cdot dm \cdot (-\hat{z}) = \left(\int \rho^2 dm\right) \cdot (-\omega\hat{z}) = \underline{\underline{I_0\vec{\omega}}}$$

Merk at vektoren $d\vec{L}/dt = I_0\dot{\vec{\omega}}$ peker langs $-\hat{z}$ (siden vinkelfarten øker i absoluttverdi), dvs $\dot{\vec{L}}$ og $\vec{\tau}$ peker i samme retning. Vi skal straks vise at $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$.

N2 for rotasjon
("Spinnsatsen")

[OSI 11.2 ; YF 10.5 ; LL 6.6]

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\{\vec{r}\times\vec{p}\} = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 + \vec{r}\times\vec{F} = \vec{\tau}$$

dvs $$\boxed{\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}}$$

(Jf. N2 for translasjon: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$)

der $\vec{\tau}$ = netto ytre dreiemoment på systemet

$\vec{L}$ = systemets totale dreieimpuls

Statisk likevekt

[OSI 12.1, 12.2 ; YF 11.1–11.3 ; LL 7.1]

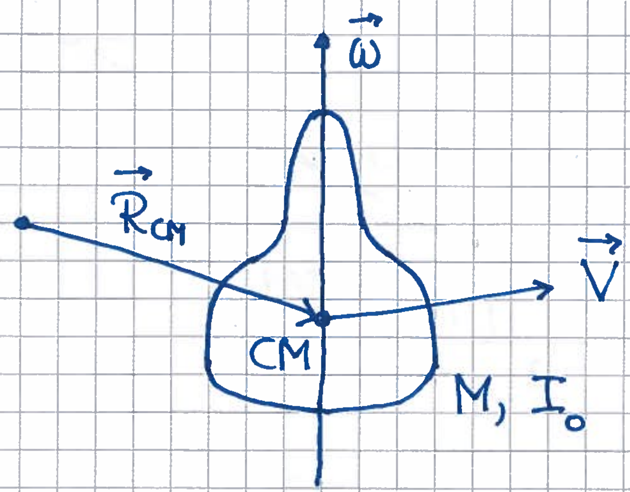
Et stivt legeme forblir i ro, med $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$, bare dersom netto ytre kraft $\vec{F}$ og netto ytre dreiemoment $\vec{\tau}$ begge er null.

Bevaringslover oppsummert

- I et isolert system (ingen ytre krefter) er total energi, total impuls og total dreieimpuls bevart.
- I et konservativt system er total mekanisk energi, $K + U$, bevart.
- Hvis netto ytre kraft $\vec{F}$ på et system er null, er total impuls $\vec{p}$ bevart
- Hvis netto ytre dreiemoment $\vec{\tau}$ på et system er null, er total dreieimpuls $\vec{L}$ bevart

Total dreieimpuls for stivt legeme [OSI .... ; YF 10.5 ; LL 6.6]

Anta at rotasjonsaksen er en 2-tallig rotasjonsakse ; dvs at legemet ser likedan ut etter å ha blitt rotert 180° (= 360°/2).



Legemets banedreieimpuls, pga CMs translasjonsbevegelse:

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V}$$

Legemets indre dreieimpuls ("spinn"), pga rotasjon om CM:

$$\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$$

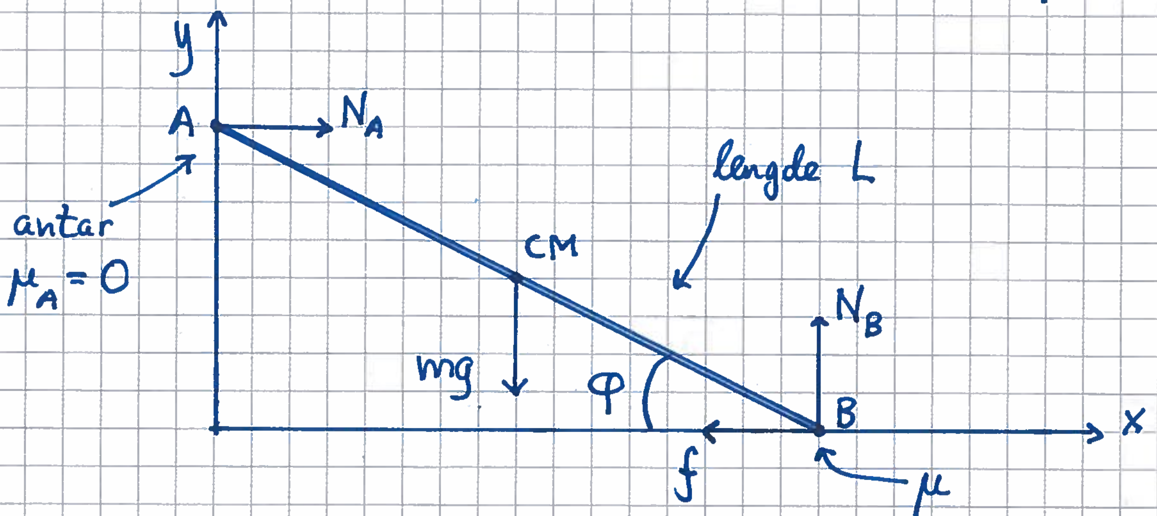
Legemets totale dreieimpuls :

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s$$

(Se notat for detaljert utledning.)

Eksempler

Eks 1: Glir stigen? Finn minste φ uten at den glir.



Stigen i ro når $\sum F_x = \sum F_y = \sum \tau = 0$.

$\sum F_x = 0 \Rightarrow f = N_A$; $\sum F_y = 0 \Rightarrow N_B = mg$

Beregner τ relativt B : $\sum \tau_B = 0$

$$\Rightarrow mg \cdot \frac{L}{2} \cdot \cos\varphi - N_A \cdot L \cdot \sin\varphi = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} mg \cos\varphi = f \sin\varphi = \mu N_B \sin\varphi = \mu mg \sin\varphi$$

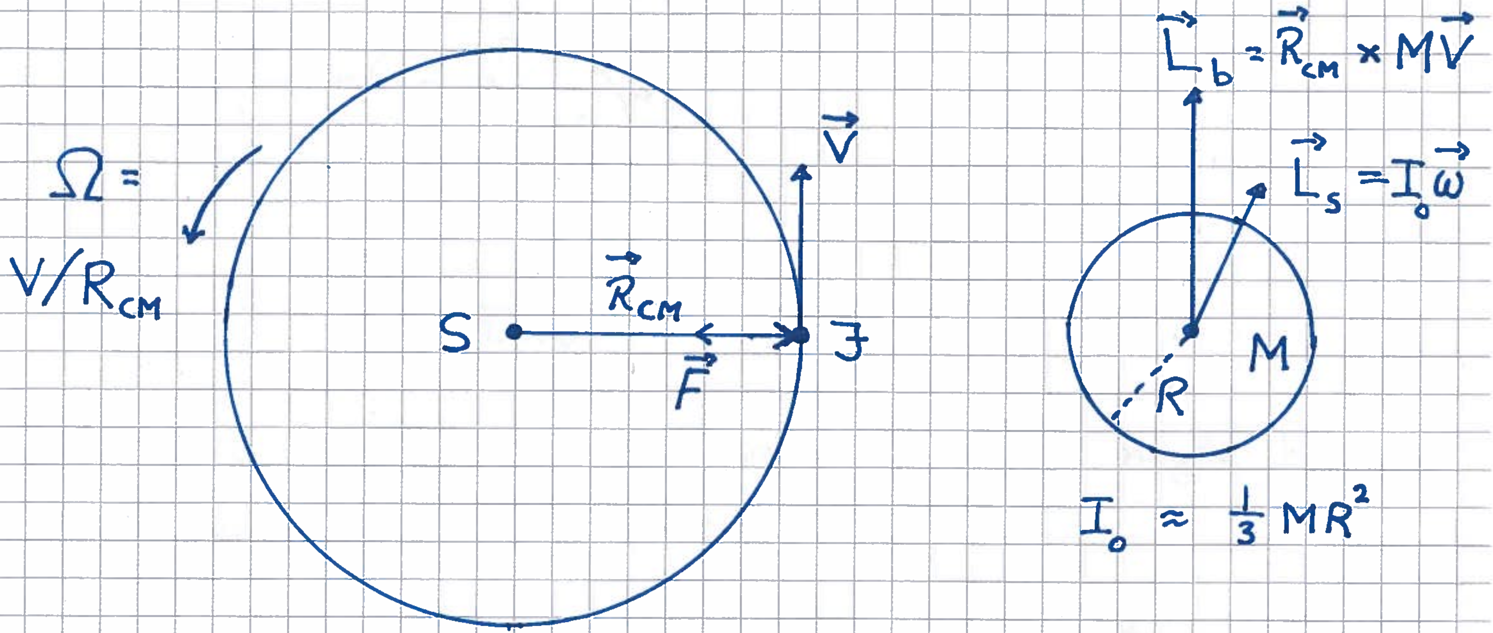
(siden φ_{min} må tilsvare $f = f_{max} = \mu N_B$)

$$\Rightarrow \tan\varphi_{min} = 1/2\mu \Rightarrow \varphi_{min} = \arctan(1/2\mu)$$

[Kommentar: Hva hvis $\mu_A > 0$? Har da 4 ukjente krefter, men bare 3 ligninger. Systemet er "statisk ubestemt". En fjerde ligning oppnås f.eks. ved å ta hensyn til at stigen i virkeligheten ikke er helt stiv, men at den bøyes litt ned på midten.]

Eks 2: Hva er jordas dreieimpuls relativt sola ?

Anta sirkelbane, stivt legeme og fast sol i origo.



$$\vec{\tau} = \vec{R}_{CM} \times \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \text{konstant}$$

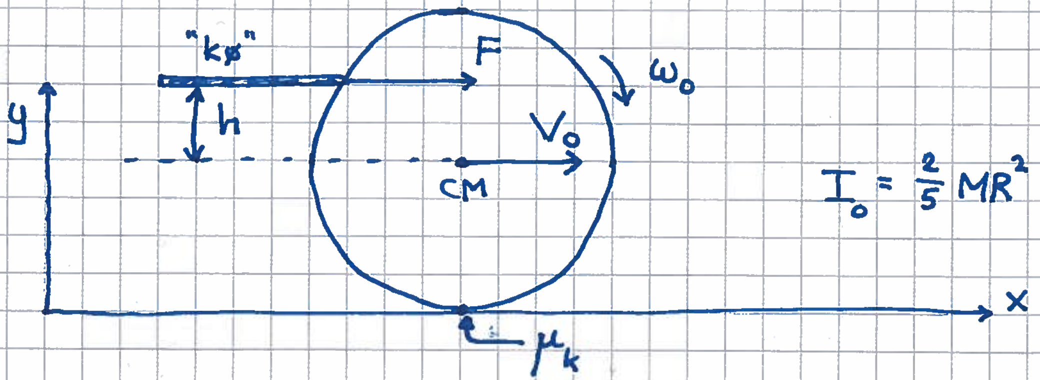
(Ikke <u>helt</u> riktig, av diverse grunner. F.eks. er J ikke helt et stivt legeme.)

$$L_b = R_{CM} MV = R_{CM}^2 M\Omega \approx (1.5 \cdot 10^{11}\,\text{m})^2 \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \cdot \frac{2\pi}{1\text{ år}}$$
$$\approx 3 \cdot 10^{40}\ \text{Js}$$

$$L_s = I_0\,\omega \approx \frac{1}{3} MR^2 \omega \approx \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 10^{24}\,\text{kg} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\,\text{m})^2 \cdot \frac{2\pi}{1\text{ døgn}}$$
$$\approx 6 \cdot 10^{33}\ \text{Js} \ll L_b$$

dvs $L \approx L_b$

Eks 3 : Snooker [LL 6.7 ; øving 6]



Kortvarig kraft F, med varighet Δt, i høyde h over (evt. under; $h < 0$) senterlinja.

Kan neglisjere friksjonskraften f i selve støtet ($f \ll F$)

N2, transl.: $F = \Delta p / \Delta t \Rightarrow F \cdot \Delta t = MV_0$

N2, rot. om CM: $\tau = \Delta L / \Delta t \Rightarrow F \cdot h \cdot \Delta t = I_0 \omega_0$

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Hvis } \omega_0 > V_0/R & : & \text{"Toppspinn"} \\ \text{Hvis } \omega_0 < V_0/R & : & \text{"Underskru"} \end{array}\right\} \text{Sluring}$$

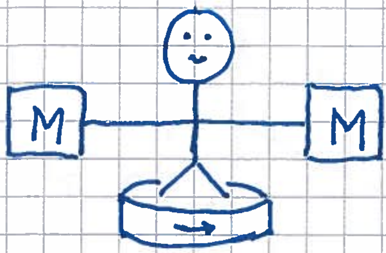
Ren rulling fra start ($\omega_0 = V_0/R$) for en bestemt h-verdi.

Hvis sluring fra start: Ren rulling etter hvert. Kinetisk friksjon medfører at ~~[illegible]~~ ω nærmer seg V/R.

Eks 4: Piruett [OSI 11.3; YF 10.6; LL 6.5]

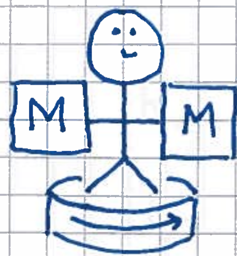
$\tau = 0 \Rightarrow L = I\omega = \text{konstant}$

$\Rightarrow \omega$ øker hvis I reduseres !



$\omega_1 = L/I_1$

$\xrightarrow[\Delta L = 0]{\tau = 0}$



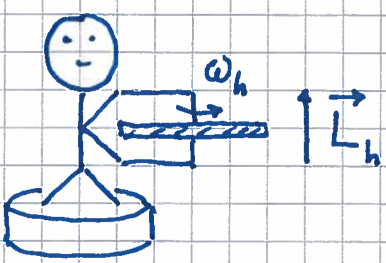
$I_2 < I_1$

$\omega_2 = L/I_2 > \omega_1$

Arbeid gjøres på de to massene og gir økt rotasjonsenergi:

$K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} L \omega_1 \;;\; K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} L \omega_2 > K_1$

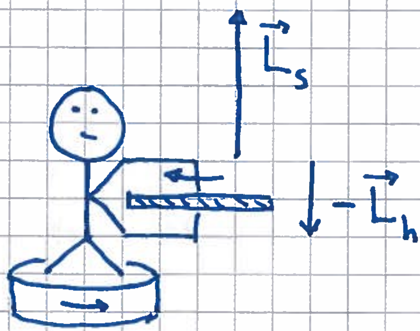
Eks 5: Student og sykkelhjul



$\omega_s = 0$

Hjulet snus

$\xrightarrow[\Delta \vec{L} = 0]{\vec{\tau}_{ytre} = 0}$



$\omega_s \neq 0$

Før:

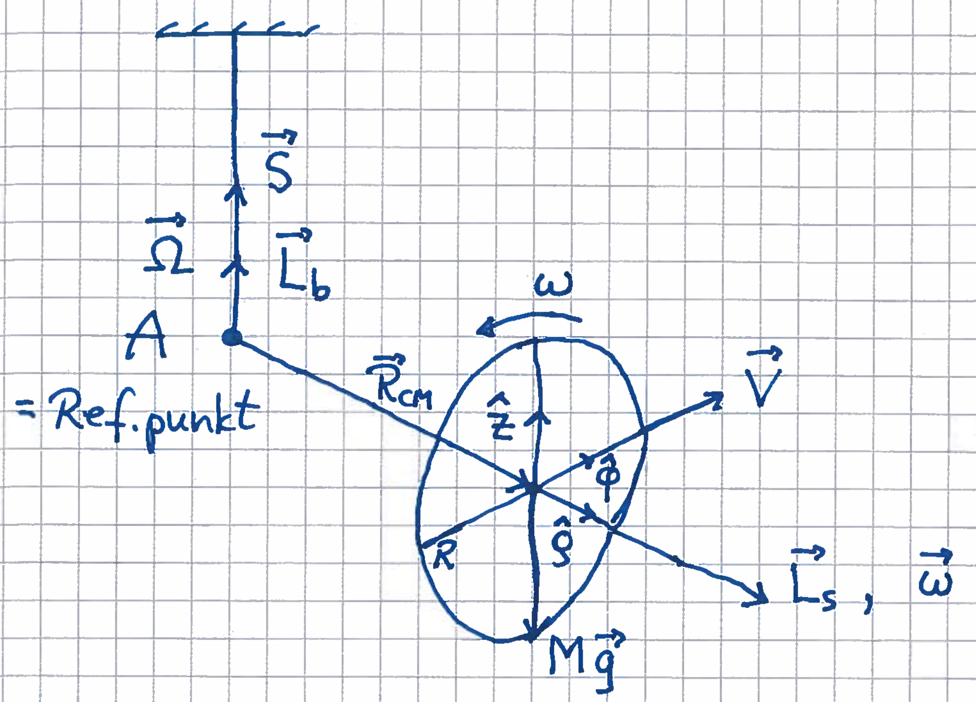
$\vec{L} = \vec{L}_h$

Etter:

$\vec{L} = \vec{L}_s - \vec{L}_h$

$\Rightarrow \vec{L}_s = 2\vec{L}_h$

$\omega_s \neq 0$



$I_0 \approx MR^2$

$M \approx 5\ kg$

$R \approx 0.3\ m$

$R_{CM} \approx 0.2\ m$

$T_\Omega = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 5\ s$

$\boxed{\text{Finn } \omega\,!}$

Løsning:

N2 for rotasjon om A :

$\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A/dt \quad ; \quad \vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s$, der

$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = R_{CM}\,\hat{\varrho} \times MV\hat{\varphi} = R_{CM}MV\hat{z} = R_{CM}^2 M\Omega\,\hat{z}$$

$$\vec{L}_s = I_0\vec{\omega} = MR^2\omega\,\hat{\varrho}$$

Siden $\omega \gg \Omega$, dvs $L_s \gg L_b$, er $\vec{L}_A \approx \vec{L}_s = MR^2\omega\,\hat{\varrho}$

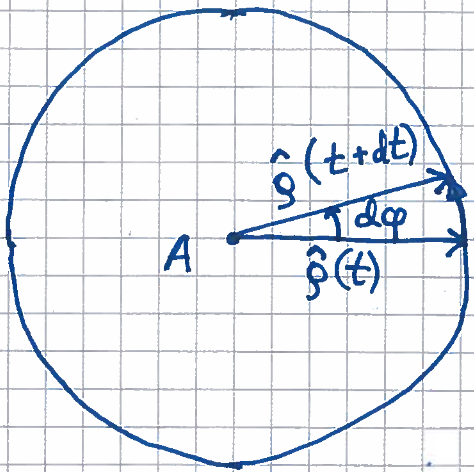
Ytre dreiemoment :

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM}\,\hat{\varrho} \times (-Mg\,\hat{z}) = R_{CM}Mg\,\hat{\varphi}$$

Dermed :

$$\underbrace{R_{CM}Mg\,\hat{\varphi}}_{\vec{\tau}_A} = \underbrace{MR^2\omega\,\frac{d\hat{\varrho}}{dt}}_{\dot{\vec{L}}_A}$$

Vektoren $\hat{\rho}$ roterer om z-aksen med vinkelfart Ω:



$$d\hat{\rho} = \overbrace{\underbrace{|\hat{\rho}|}_{=1} \cdot d\varphi}^{\text{buelengden}} \cdot \hat{\varphi} = d\varphi \cdot \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \hat{\varphi} = \Omega \, \hat{\varphi}$$

Dermed:

$$R_{CM} M g \, \hat{\varphi} = M R^2 \omega \, \Omega \, \hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\omega = \frac{R_{CM} \, g}{R^2 \, \Omega}}}$$

Hjulets (raske!) omløpstid:

$$T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R^2 \cdot 2\pi / T_\Omega}{R_{CM} \, g} = \frac{(2\pi R)^2}{R_{CM} \, g \, T_\Omega}$$

Tallverdier:

$$T_\omega \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 5} \, s \approx \frac{2^2}{10} \, s = \underline{0.4 s}$$

$$f_\omega = 1/T_\omega \approx 2.5 \text{ omdreininger pr sekund} \quad (Hz)$$