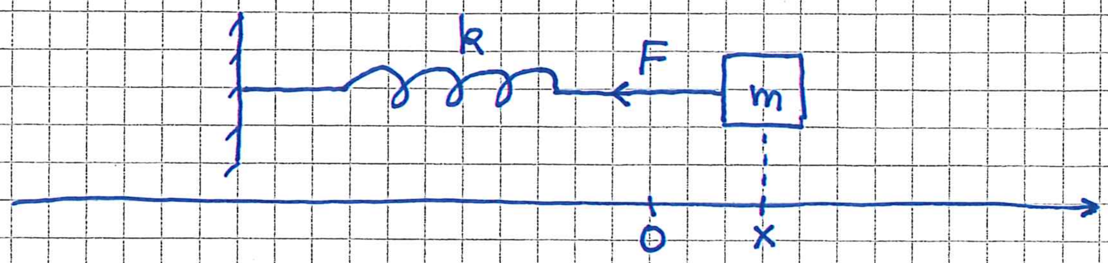
Svingninger [OS1 15 ; YF 14 ; LL 9]

Periodisk oppførsel omkring en likevekt.
En kraft trekker hele tiden systemet tilbake mot likevekt.
Eksempler:
Masse og fjær. Pendler. Atomer i molekyler og krystaller.

Harmonisk oscillator [OS1 15.1 ; YF 14.2 ; LL 9.1–9.3]



Likevekt, $F = 0$, når m er i posisjon $x = 0$

x = posisjonen til m = fjæras forlengelse ($x > 0$)
eller forkortelse ($x < 0$)

$F(x)$ = kraft fra fjæra på m, retning mot likevekt

Ideell fjær oppfyller Hookes lov:

$\boxed{F = -kx}$; k = fjærkonstanten ; $[k] = \mathrm{N/m}$

N2 : $-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Vi innfører $\omega_0 = \sqrt{k/m}$:

$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ Bevegelsesligning for harmonisk oscillator i 1D.

Generell løsning:

$$x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$$

eller

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Eks: Bestem A og φ når $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$

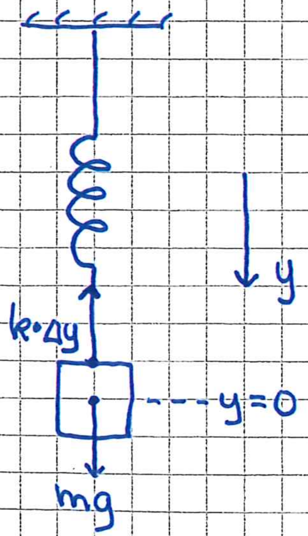
Løsn: $x_0 = A\cos\varphi$, $\quad v_0 = -\omega_0 A\sin\varphi$

$$\Rightarrow \tan\varphi = -\frac{v_0}{x_0\omega_0}$$

$$x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2 = A^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = A^2$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_0)^2}$$

Eks: Harmonisk oscillator i tyngdefeltet



N1 gir fjæras forlengelse i likevekt:

$$k\,\Delta y = mg \quad \Rightarrow \quad \Delta y = mg/k$$

Velg $y = 0$ i "strukket likevekt".

N2 for m i posisjon y:

$$m\ddot{y} = mg - k(\Delta y + y) = -ky$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{med} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dvs: Harmonisk svingning omkring strukket likevekt.

Harmoniske svingninger "ligner" på uniform sirkelbevegelse:

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ = utsving fra likevekt

A = amplitude = max utsving ; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkelfrekvens = faseendring pr tidsenhet ; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hel svingning ; $[T] = s$

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet ; $[f] = Hz$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

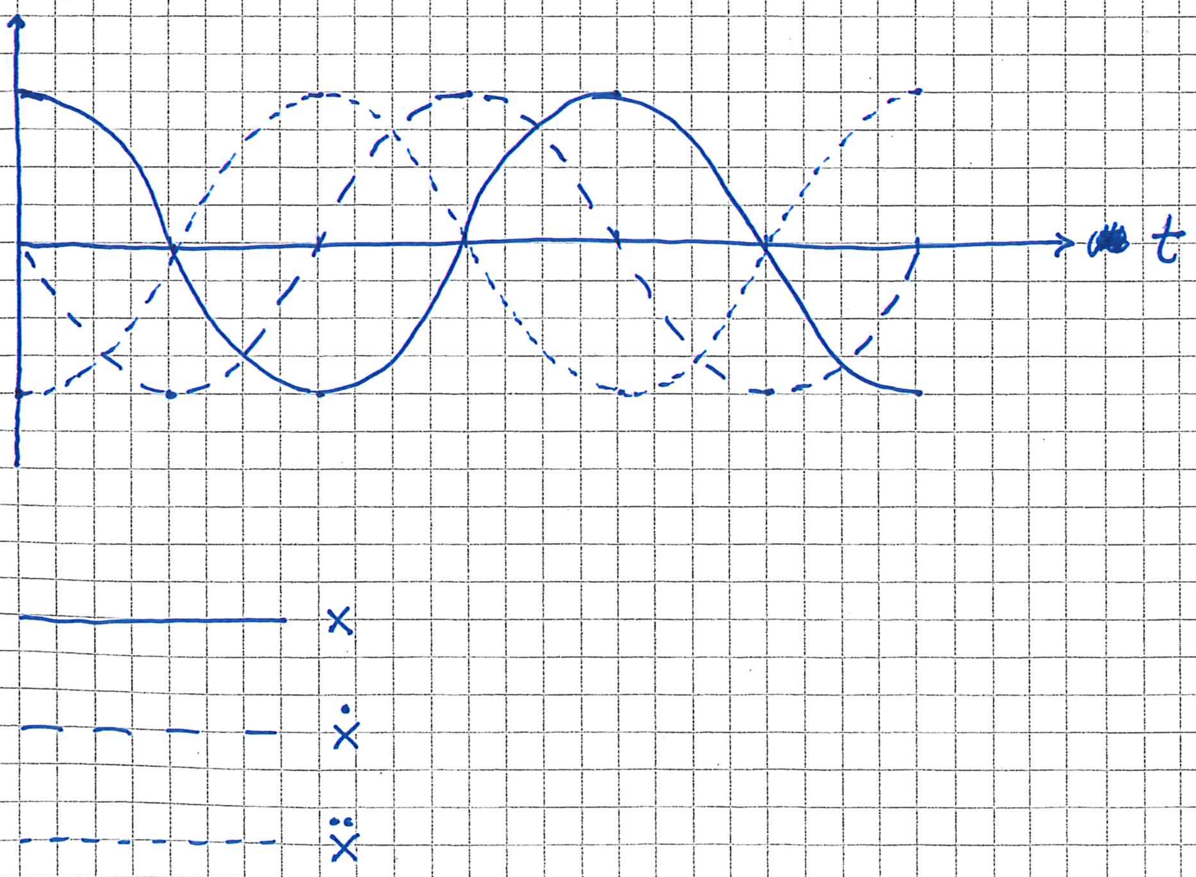
φ = fasekonstant ; $[\varphi] = 1$

Anta $\varphi = 0$:

$$x(t) = A\cos\omega_0 t$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A\sin\omega_0 t = \omega_0 A\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A\cos\omega_0 t = \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \pi)$$



Energi i harmonisk oscillator [OSI 15.2 ; YF 14.3 ; LL 9.4]

Potensiell energi (Konservativ kraft) :

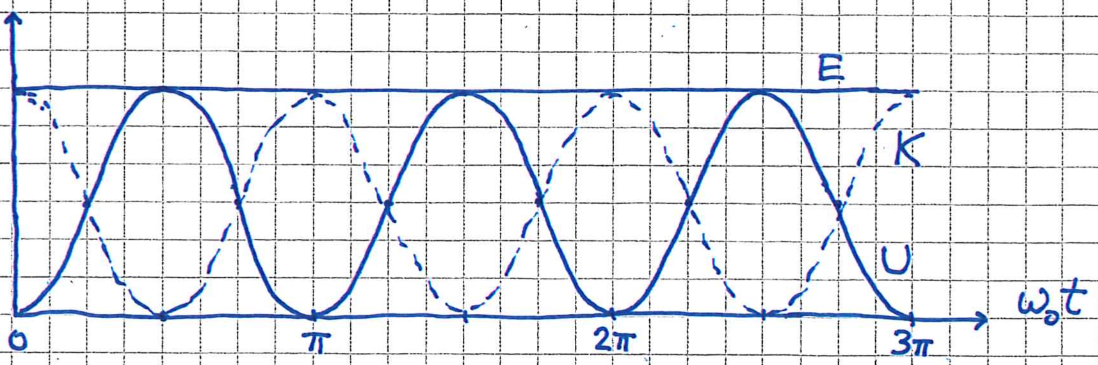
$$U = -\int_0^x (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega_0 t$$

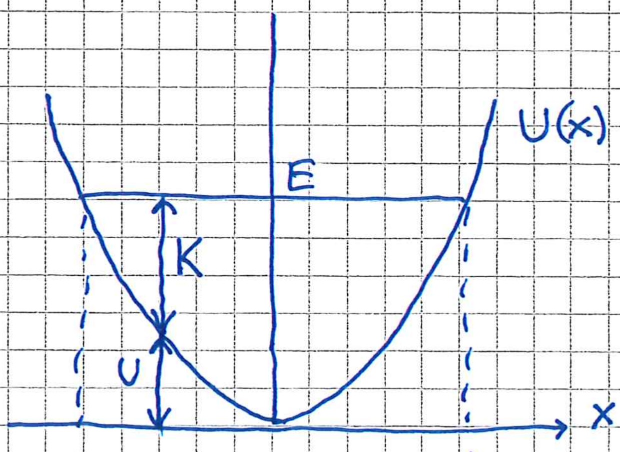
Kinetisk energi :

$$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2\sin^2\omega_0 t = \frac{1}{2}kA^2\sin^2\omega_0 t$$

Total mekanisk energi :

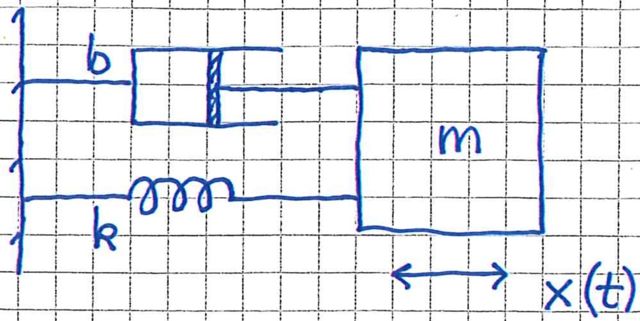
$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 \quad ; \quad \text{uavhengig av } t$$





Dempet fri svingning [OS1 15.5 ; YF 14.7 ; LL 9.7]

Anta friksjonskraft $-b\dot{x}$ (dvs, som for langsom bevegelse i fluid)



N2: $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

med $\gamma = b/2m$, $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $[\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$

Erfaring viser:

Svak demping gir svingninger med avtagende amplitude.

Sterk demping gir bevegelse mot likevekt, uten svingninger.

Vi "gjetter" $x(t)$ på formen $\exp(-\alpha t)$ og setter inn:

$$\left[\alpha^2 - 2\gamma\alpha + \omega_0^2\right] e^{-\alpha t} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\left\{2\gamma \pm \sqrt{4\gamma^2 - 4\omega_0^2}\right\} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

<u>Overkritisk</u> demping : $\gamma > \omega_0$

Generell løsn : $x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$

$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, $\alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Hvis $\gamma \gg \omega_0$ (meget sterk demping) :

$$\alpha_2 = \gamma - \gamma\left(1 - \omega_0^2/\gamma^2\right)^{1/2} \approx \gamma - \gamma\left(1 - \omega_0^2/2\gamma^2\right) = \frac{\omega_0^2}{2\gamma} = \frac{k}{b}$$

$$\alpha_1 \approx 2\gamma = b/m \gg \alpha_2$$

$$\Rightarrow x(t) \overset{t \gg 1/\alpha_1}{\approx} B e^{-\alpha_2 t} = B e^{-kt/b}$$

Dvs, $x(t)$ går <u>langsomt</u> mot null, uavhengig av massen m.

<u>Kritisk</u> demping : $\gamma = \omega_0$

Da er $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$, og generell løsn. er

$$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\gamma t}$$

Svakeste demping som ikke gir svingninger.

Bra i f.eks. støtdempere.

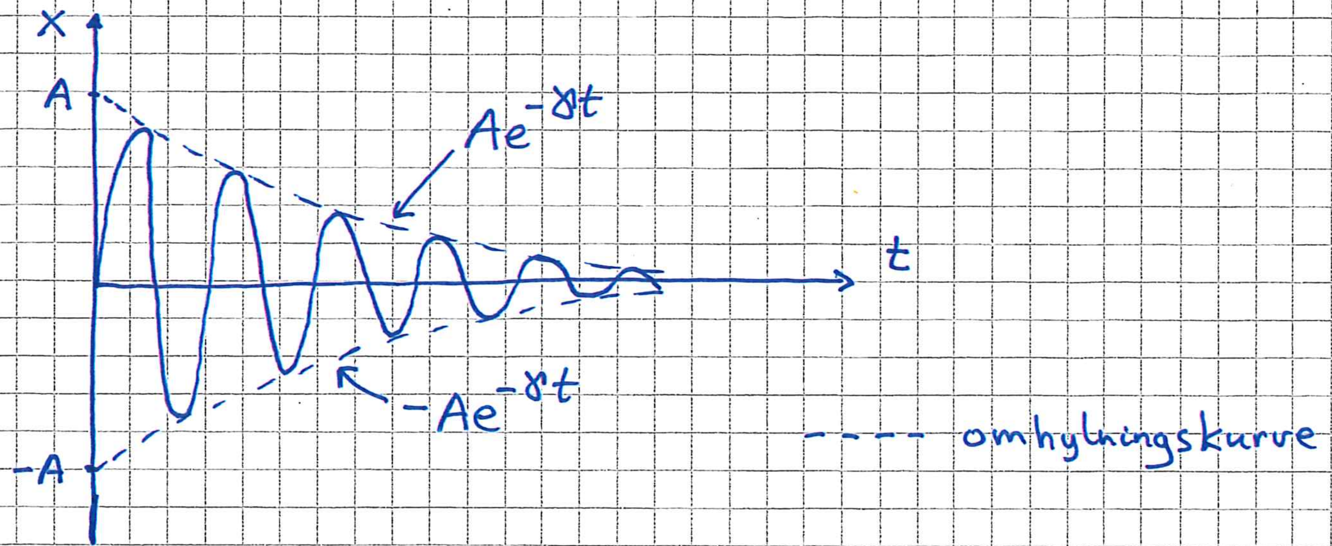
Underkritisk demping : $\gamma < \omega_0$

$$\alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \gamma \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

$$\Rightarrow \exp(-\alpha t) = \exp(-\gamma t) \cdot [\cos \omega t \pm i \sin \omega t] \; ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

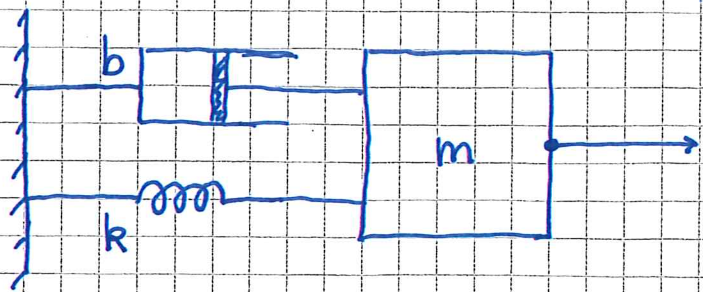
$\Rightarrow$ Generell løsn: $x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \; ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

Dvs: Harmonisk svingning med eksponentielt avtagende amplitude, $A \exp(-\gamma t)$. "Tidskonstanten" $\tau = 1/\gamma$ avgjør hvor raskt amplituden avtar.



Med svak demping, dvs $\gamma \ll \omega_0$, er $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Tvungen svingning og resonans [OSI 15.6; YF 14.8; LL 9.9]



Antar harmonisk ytre kraft:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

N2: $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad ; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Generell løsning er en sum av en homogen løsning $x_h(t)$ og en partikulærløsning $x_p(t)$, der $x_h(t)$ oppfyller

$$\ddot{x}_h + 2\gamma \dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

Dvs, $x_h(t) \sim \exp(-\gamma t)$ og "dør ut", etter et innsvingningsforløp med varighet ca $3\tau = 3/\gamma$.
Etter dette:

$$x(t) \approx x_p(t)$$

En naturlig gjetning er: $x(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$
Innsetting gir 2 ligninger for bestemmelse av A og φ.
Løsning:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\right]^{1/2}} \quad ; \quad \tan \varphi(\omega) = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}$$

Resonans: Amplituden A blir stor hvis

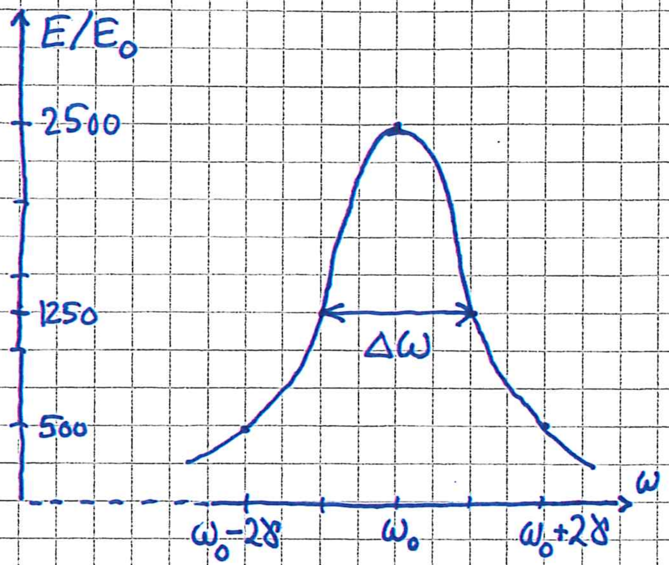
$$\gamma \ll \omega_0 \quad \text{og} \quad \omega \approx \omega_0$$

Oscillatorens energi:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \quad ; \quad E_0 = F_0^2/2k$$

Anta $\gamma \ll \omega_0$, f.eks. $\omega_0 = 100\,\gamma$:

$E(\omega_0) = 2500\,E_0$; $E(\omega_0 \pm \gamma) = 1250\,E_0$; $E(\omega_0 \pm 2\gamma) = 500\,E_0$



Resonanskurvens <u>halvverdibredde</u> : $\Delta\omega \approx 2\gamma$

(Full Width Half Maximum; FWHM)

Oscillatorens Q-faktor : $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}$

Smal resonanskurve gir stor Q-faktor.

Exp: Mekanisk oscillator

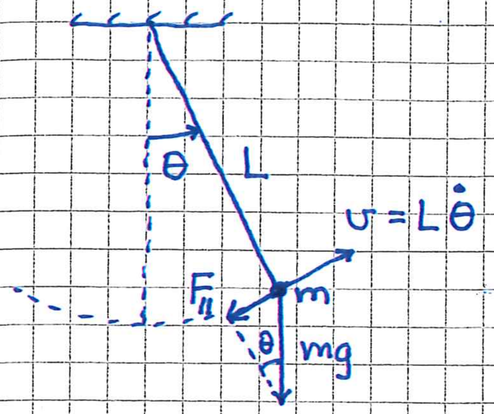
<u>Frie</u> svingninger gir $T_0 \approx 0.65\,s$, dvs $f_0 \approx 1.5\,Hz$

<u>Tvungne</u> svingninger gir stor amplitude når ytre kraft har frekvens ca 1.5 Hz.

Pendler

Matematisk pendel [OS1 15.4 ; YF 14.5 ; LL 9.6]

Punktmasse m i masseløs snor med lengde L



N2 : $F_{\parallel} = m a_{\parallel}$

der $F_{\parallel} = -mg \sin\theta$; $a_{\parallel} = L\ddot{\theta}$

$\Rightarrow \quad -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$

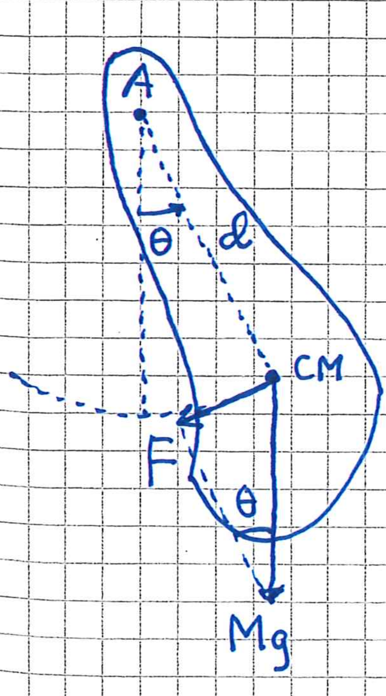
Anta små utsving, $|\theta| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{g/L}}$$

Eks: Foucaultpendelen i Realfagbygget : $L = 25\,\text{m} \Rightarrow T \approx 10\,\text{s}$.

Fysisk pendel [OS1 15.4 ; YF 14.6 ; LL 9.6]

Stivt legeme, masse M, treghetsmoment I mhp A



N2 for rot. om fast akse A : $\tau = I\ddot{\theta}$

der $\tau = -F \cdot d = -Mgd\sin\theta$

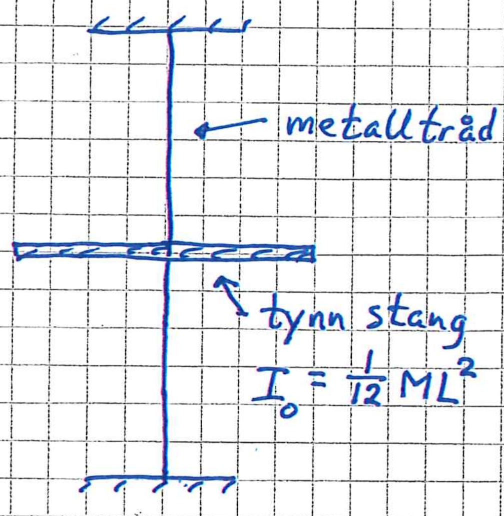
($\tau > 0$ mot klokka ; $\theta > 0$ mot klokka)

$\Rightarrow \quad -Mgd\sin\theta = I\ddot{\theta}$

Anta $|\theta| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \sin\theta \simeq \theta$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{Mgd/I}}$$

Torsjonspendel [OS1 15.4 ; YF 14.4 ; LL 9.6]

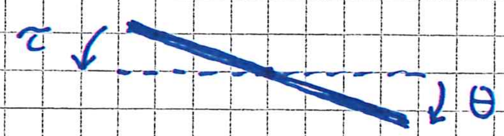


Hookes lov : Vridning av metalltråden en vinkel θ gir dreiemoment

$$\tau = -\kappa\,\theta$$

på stanga ; κ er her metalltrådens torsjonsstivhet

Sett langs metalltråden :



N2 for rot. om trådaksen :

$$\tau = I_0 \ddot{\theta} \qquad \text{med} \quad \tau = -\kappa\,\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \; ; \quad \omega_0 = \sqrt{\kappa / I_0}}$$

Exp: $M = 50\,\mathrm{g}$, $L = 11\,\mathrm{cm}$, $T = 0.8\,\mathrm{s}$

$$\Rightarrow \kappa = I_0\,\omega_0^2 = \frac{1}{12} M L^2 \cdot (2\pi/T)^2 \approx \underline{0.003\ \mathrm{Nm}}$$