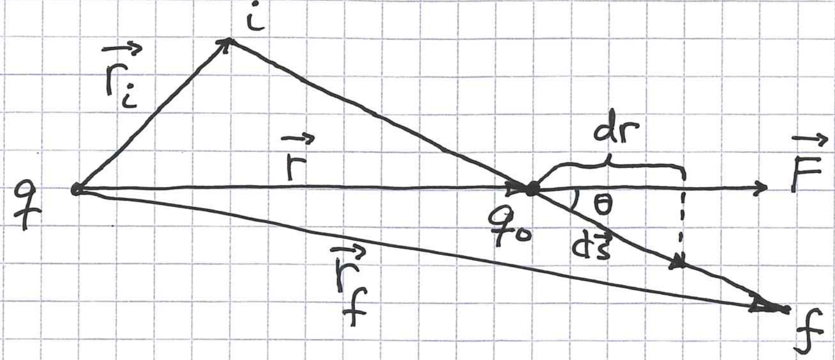
Potensiell energi. Elektrisk potensial

[OS2 7.1-2 ; YF 23.1-2 ; LHL 19.9, 20.3]

Pot. energi U for ladningspar q og q_0 :



$$\vec{F}\cdot d\vec{s} = F\cdot ds\cdot\cos\theta = F\cdot dr$$

$$\Delta U = U_f - U_i \stackrel{\text{def}}{=} -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\int_{r_i}^{r_f} \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dr$$

$$= \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_f} - \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

Her er det da naturlig å velge $U = 0$ for $r \to \infty$ slik at

$$\boxed{U(r) = \frac{q q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

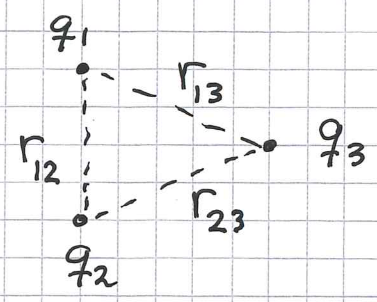
er pot. energi for ladningsparet q, q_0 i innbyrdes avstand r.

Jf. gravitasjon og massepar M og m, der M (f.eks) er jordmassen. Da var det naturlig å velge $U=0$ for avstand $r = R =$ jordradien mellom m og (sentrum av) M, slik at

$$U(r=R+h) = \frac{GMm}{R} - \frac{GMm}{R+h} \stackrel{h\ll R}{\approx} m\cdot\frac{GM}{R^2}\cdot h = mgh$$

I et system med flere ladninger vil alle q_i og q_j vekselvirke <u>parvis</u> og bidra med

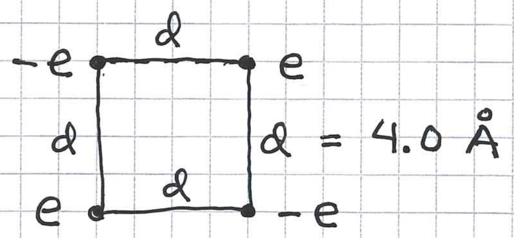
$$U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$



til total pot. energi U, dvs

$$U = U_{12} + U_{13} + \ldots + U_{1n}$$
$$+ U_{23} + \ldots + U_{2n} + \ldots + U_{n-1,n}$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{n} U_{ij} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i<j} U_{ij}$$
$$= \underline{\sum_{i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}}$$

Eks: Bestem U og dipolmomentet p for systemet



Løsn:
$$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 d}\left\{4\cdot(-1) + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$
$$= \left[9\cdot 10^9 \cdot (1.6\cdot 10^{-19})^2 / 4.0\cdot 10^{-10}\right]\cdot(-2.59)\ \mathrm{J}$$
$$= \underline{-1.5\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J}}$$

$\underline{p = 0}$ (sum av $\longrightarrow$ og $\longleftarrow$, hver med abs.verdi $e\cdot d = 4.0$ eÅ)

Elektrisk potensial $\overset{\text{def}}{=}$ pot. energi pr ladningsenhet

$$\Rightarrow \boxed{V = \frac{U}{q_0} \quad ; \quad [V] = \frac{J}{C} = V \text{ (volt)}}$$

For ladn. par q, q_0 i innbyrdes avstand r:

$U = qq_0/4\pi\varepsilon_0 r$. Punktladn. q omgir seg dermed med potensialet

$$\boxed{V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$ Coulombpotensialet

Potensialforskjell mellom to posisjoner f og i:

$$\Delta V = \Delta U/q_0 = -\int_i^f (\vec{F}/q_0)\cdot d\vec{s} = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_f - V_i = -\int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{s}}$$

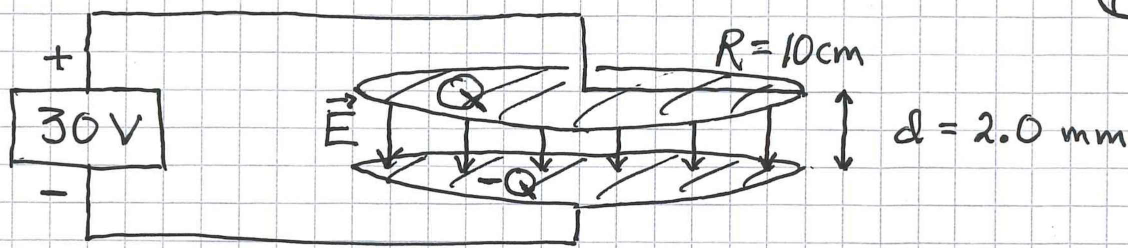
- Ser at $[E] = V/m$ (mer brukt enn N/C)

- Energienheten eV (elektronvolt) = elementærladningen e multiplisert med potensialforskjellen 1 V

$$\Rightarrow \underline{1\text{ eV}} = 1.6\cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 1\,\text{J/C} = \underline{1.6\cdot 10^{-19}\,\text{J}}$$

Hensiktsmessig energienhet på atomært nivå!

Eks :



Bestem ladningen $\pm Q$ på metallplatene.

Løsn: Fra s. 10 er $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/A\varepsilon_0$ mellom platene og $E = 0$ utenfor. Da blir

$$\Delta V = V_+ - V_- = -\int_-^+ \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\cdot d = \frac{Q\cdot d}{A\cdot\varepsilon_0}$$

slik at

$$Q = \frac{\Delta V A \varepsilon_0}{d} = \frac{30V\cdot\pi\cdot(0.10m)^2\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2}{2.0\cdot 10^{-3}\ m}$$

$$= 4.2\cdot 10^{-9}\ C = \underline{\underline{4.2\ nC}}$$

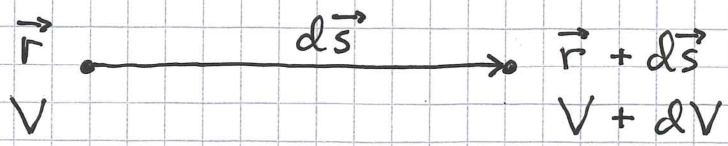
Siden $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s}$, peker $\vec{E}$ i retning lavere potensial.

Vi vet fra før at $\vec{E}$ har retning fra pos. ladn. mot neg. ladn.

Dermed må det være høyere potensial ved pos. ladn. enn ved neg. ladn. i et system.

I eks. ovenfor: 30 V høyere pot. på pos. ladd plate enn på neg. ladd plate.

Beregning av $\vec{E}$ fra V [OS2 7.4; YF 23.5; LHL 19.9]



$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz$$

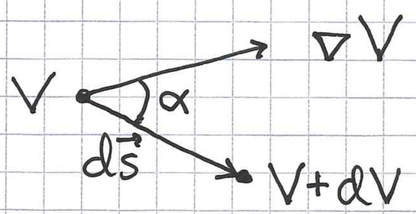
$$= \left\{\hat{x}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial V}{\partial z}\right\} \cdot \left\{\hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz\right\}$$

$$= \underbrace{\nabla V}_{=\text{ gradienten til } V} \cdot d\vec{s}$$

Dessuten er $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{s}$

Da må vi ha sammenhengen $\boxed{\vec{E} = -\nabla V}$

Tolkning av vektoren ∇V:



$$dV = \nabla V \cdot d\vec{s}$$
$$= |\nabla V| \cdot |d\vec{s}| \cdot \cos\alpha$$

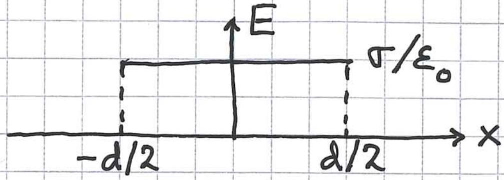
⇒ Får max. potensialendring dV når forflytningen $d\vec{s}$ foretas i samme retning som ∇V.

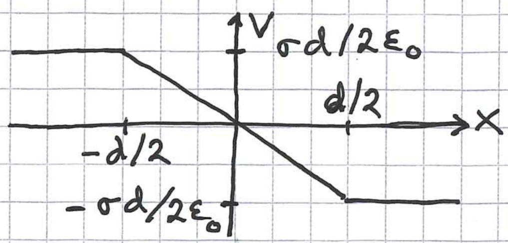
Dvs: ∇V er vektor som peker i den retningen som V øker raskest, og da er $|\nabla V|$ endringen i V pr lengdeenhet. Samtidig er $|\vec{E}| = |\nabla V|$.

Eks: Bestem $\vec{E}(x)$ og $V(x)$ mellom to store plater i $x = \pm d/2$ med ladning hhv $\mp\sigma$ pr flateenhet. Velg $V=0$ i $x=0$.

Løsn: For $|x| < d/2$ er $\vec{E} = \hat{x}\,\sigma/\varepsilon_0$, og dermed $dV/dx = -\sigma/\varepsilon_0$, dvs $V(x) = -\sigma x/\varepsilon_0$.

Utenfor platene, $|x| > d/2$, er $E = 0$, og dermed $V = \text{konstant}$.



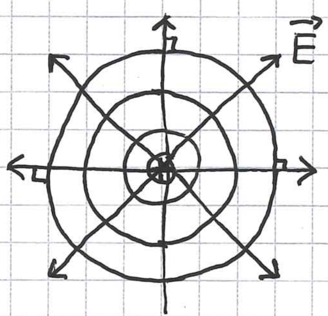


<u>Ekvipotensialflater</u> [OS2 7.5 ; YF 23.4 ; LHL 19.11]

er flater med $V = \text{konst.}$ Hvis $d\vec{s}$ er en forflytning på en ekvipotensialflate, er $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$, dvs $\vec{E} \perp d\vec{s}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} \perp \text{ekvipotensialflatene}}$

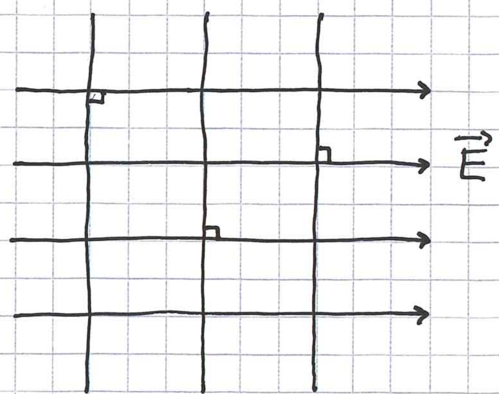
Eks 1: Punktladning



$\vec{E}$ radielt

$\Rightarrow$ ekvipot. flatene er <u>kuleskall</u>

Eks 2: Uniformt $\vec{E}$-felt



$\ldots\ldots V_0 \quad V_0 - \Delta V \quad V_0 - 2\Delta V \ldots\ldots$

ekvipot. flatene er <u>plan</u> normalt på $\vec{E}$

Materialers elektriske egenskaper

Ledere. Metaller [OS2 7.5 ; YF 22.5 ; LHL 19.8]

Har fri<u>e</u> ladninger (typisk 1 eller 2 frie elektroner pr atom i et metall) som vil settes i bevegelse hvis de utsettes for en nettokraft.

Dermed, i elektrostatisk likevekt :

- $\vec{E} = 0$ inni et metall.

  $\vec{E} \neq 0$ ville gi kraft $\vec{F} = -e\vec{E}$ på de frie elektronene, og dermed ikke likevekt.

- All netto ladning ligger på overflaten av et metall.

  Ikke uten videre opplagt ! Skyldes at $F(r) \sim 1/r^2$.
  Se evt. Gauss' lov (ikke pensum).

- På overflaten til et metall (med nettoladning) står $\vec{E}$ normalt på overflaten.

  $E_{\parallel} \neq 0$ ville gi kraft $F_{\parallel} = -eE_{\parallel}$ på de frie elektronene.

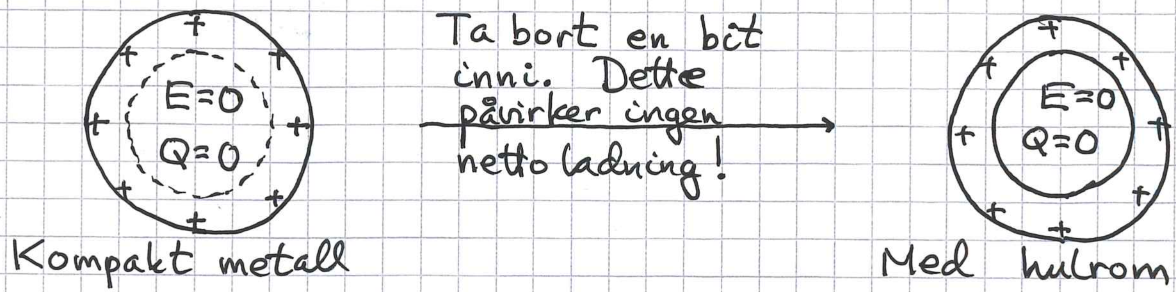
  $E_{\perp} = \sigma/\varepsilon_0$; σ = overflatens ladn. pr flateenhet.

- Et stykke metall i likevekt er et ekvipotensial.

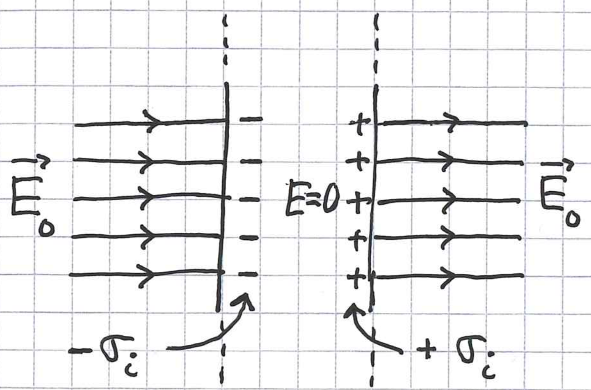
  $dV = -\vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$; inni er $\vec{E} = 0$ og på overflaten er $\vec{E} \perp d\vec{s}$.

- Metall med <u>hulrom</u> har $E=0$ i hulrommet og all nettoladning på ytre overflate.

Bevis:

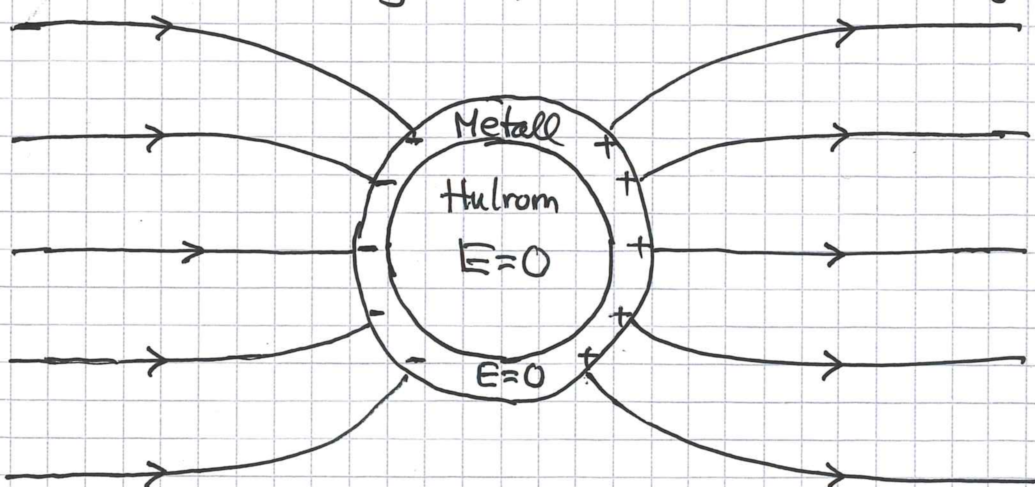


Eks 1: Metallskive i uniformt ytre felt $\vec{E}_0$



Ytre felt $\vec{E}_0$ trekker frie elektroner til venstre overflate. Likevekt når indusert overflateladning er $\pm\sigma_i$ med $\sigma_i = \varepsilon_0 E_0$. Tilhørende indusert felt er da $\vec{E}_i = -\vec{E}_0$, og totalt felt inni er $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i = 0$.

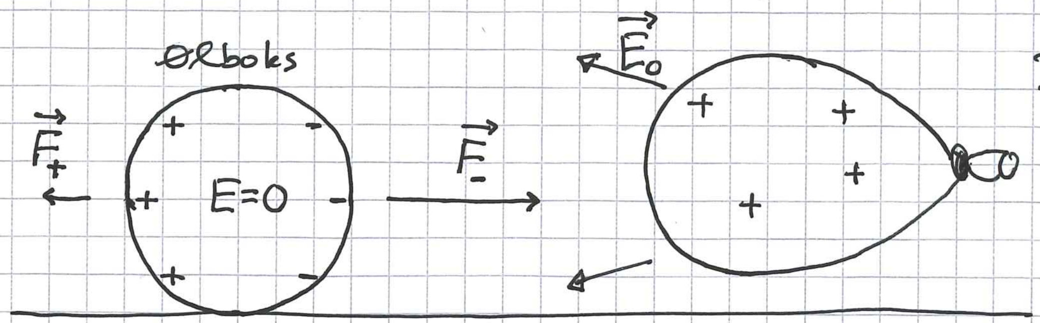
Eks 2: Faradaybur; elektrostatisk skjerming



Ytre felt $\vec{E}_0$
(Totalt felt $\vec{E}$ blir forskjellig fra $\vec{E}_0$ nær metallboksen.)

Med <u>uniformt</u> ytre felt $\vec{E}_0$ blir det null nettokraft på metallboksen.

Eks 3: Metallboks i inhomogent felt

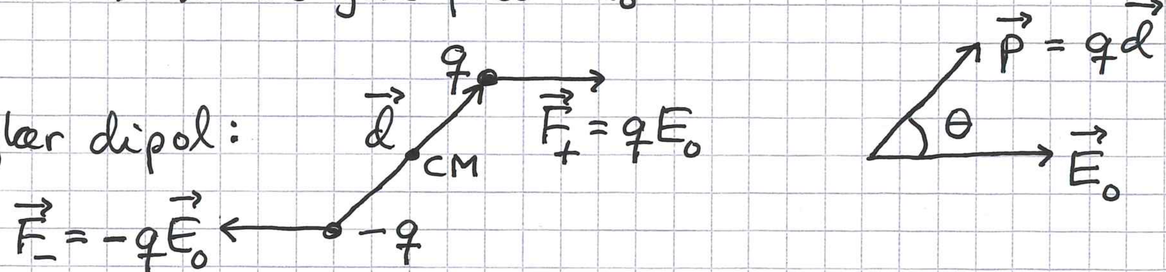


Pga kortere avstand til ølboksens negative ladning blir $F_- > F_+$, og dermed en netto tiltrekkende kraft.

Dielektrikum. Isolator [OS2 8.5; YF 24.4–5; LHL 20.5]

Har ikke frie elektroner, men <u>bundet</u> ladning som polariseres i et ytre felt $\vec{E}_0$:

Molekylær dipol:



Dreiemoment på dipolen:

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = \text{... øving 9...} = \vec{p} \times \vec{E}_0$$

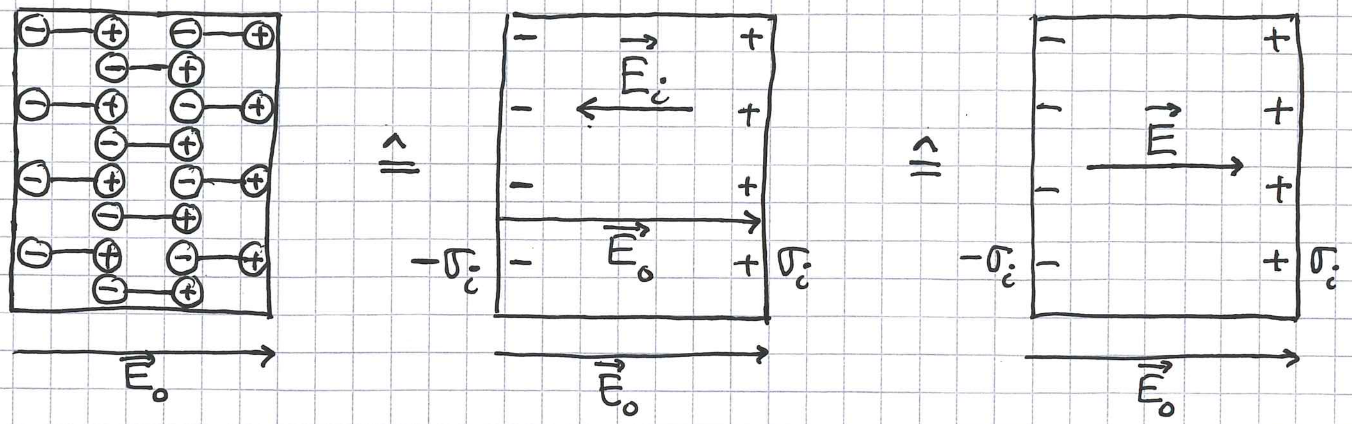
Pot. energi:

$$U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int \tau \, d\theta = \ldots = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

(der vi valgte $U = 0$ for $\theta = \pm\pi/2$, dvs $\vec{p} \perp \vec{E}_0$)

Dermed: En tendens til innretting av molekylære dipolmoment i samme retning som det ytre feltet $\vec{E}_0$.

Makroskopisk effekt:



- Får indusert ladning $\pm \sigma_i$ pr flateenhet på overflaten
- Null nettoladning inni isolatoren
- Det induserte feltet inni isolatoren, $E_i = \sigma_i / \varepsilon_0$, gir et <u>svekket</u> totalt felt inni: $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_i$; $E = E_0 - E_i$
- Antar <u>lineær respons</u> : E_i prop. med E_0, og dermed E prop. med E_0
- Definerer isolatorens <u>relative permittivitet</u> :

$$\varepsilon_r = E_0 / E \quad ; \quad \text{dvs} \quad E = E_0 / \varepsilon_r \quad (\varepsilon_r \geq 1)$$

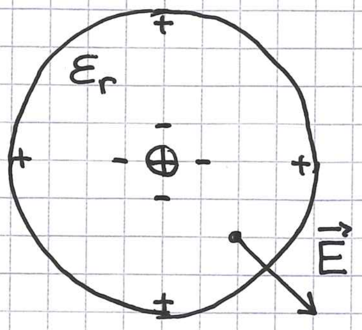
Tallverdier :

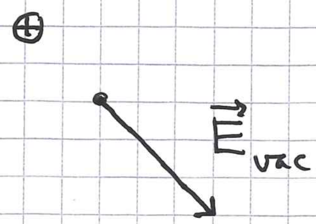
Stoff	Vakuum	Tørr luft	Plast	Rent vann	Perfekt metall
ε_r	1	1.00054	2–6	80	∞

- Definerer isolatorens <u>permittivitet</u> :

$$\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$$

- Ladning q omgitt av isolator gir <u>svekket</u> felt <u>inni</u> isolatoren pga indusert ladning og indusert motsatt rettet felt:



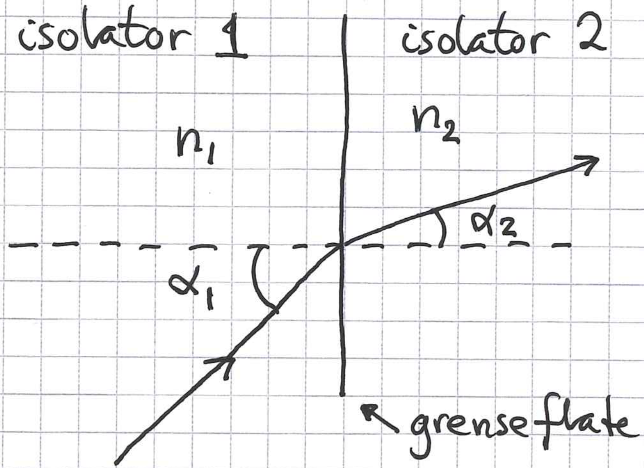


$$E(r) = q/4\pi\varepsilon_r\varepsilon_0 r^2$$
$$= q/4\pi\varepsilon r^2$$

$$E_{vac}(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r^2$$

- Lysfarten i isolator: $v = c/\sqrt{\varepsilon_r} < c$
  ($c = 299\,792\,458$ m/s = lysfarten i vakuum)

- Lysbrytning i grenseflate mellom to isolatorer:



$n = \sqrt{\varepsilon_r}$ = brytningsindeks

Snells lov:

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$$

* Grunnlag for mikroskop, teleskop etc ($n \approx 1.5$ i glass, for synlig lys).

* I vann er $n = 1.33$ for rødt lys og $n = 1.35$ for blått lys. Gir regnbue!