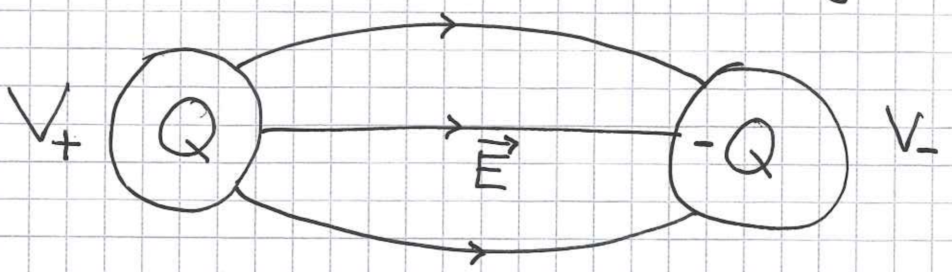
Kondensator og kapasitans [OS2 8 ; YF 24 ; LHL 20]
(capacitor) (capacitance)

En kondensator består av to ledere adskilt av en isolator ; anta at lederne er tilført en nettoladning $\pm Q$:



Potensialforskjellen, evt. spenningen, mellom lederne :

$$V = V_+ - V_- = -\int_{(-)}^{(+)} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

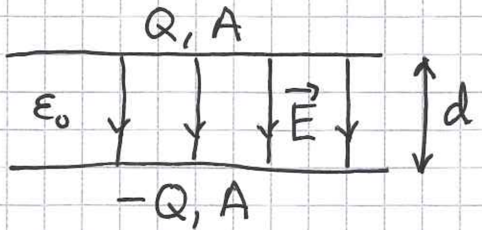
Siden $\vec{E}$ er prop. med Q (Coulombs lov), er også V prop. med Q :

$$\boxed{C \overset{\text{def}}{=} \frac{Q}{V}} = \text{kondensatorens kapasitans}$$

- Enhet : $[C] = C/V = F$ (farad)
- Kretssymbol :

- Kan lagre ladning og energi
- C avhenger av utforming (geometri) og type isolator mellom lederne. C avhenger ikke av Q eller V.
- Beregner C ved å anta ladning $\pm Q$ og regne ut V (evt. via $\vec{E}$) ; da er $C = Q/V$.

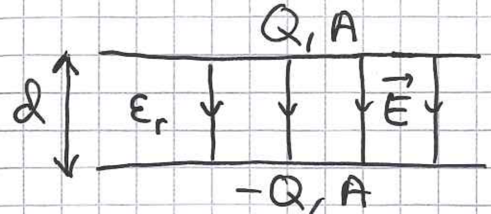
Eks 1 : Luftfylt platekondensator



$$E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/A\varepsilon_0$$
$$V = Ed = Qd/A\varepsilon_0$$
$$\Rightarrow \underline{C = \varepsilon_0 A/d}$$

Med $d = 2.0$ mm og $A = \pi \cdot (0.10\,\text{m})^2$ er $\underline{C \simeq 0.14\,\text{nF}}$

Eks 2 : Platekondensator fylt med dielektrikum



$$E = \sigma/\varepsilon = Q/A\varepsilon_r\varepsilon_0$$
$$V = Ed = Qd/A\varepsilon_r\varepsilon_0$$

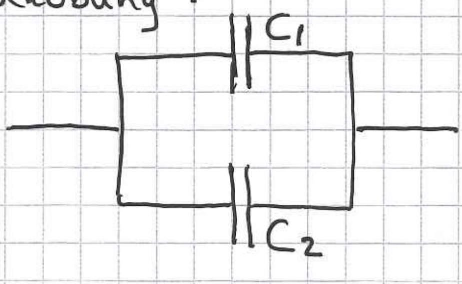
$\Rightarrow C = \varepsilon_r \varepsilon_0 A/d$; dvs C økes med faktoren ε_r

Vi ser nå at $[\varepsilon] = \text{F/m}$; dvs $\varepsilon_0 \simeq 8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m

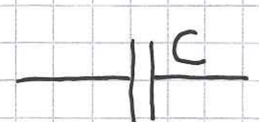
Kobling av flere kapasitanser [OS2 8.2 ; YF 24.2 ; LHL 20.2]

Parallellkobling :

Hvis

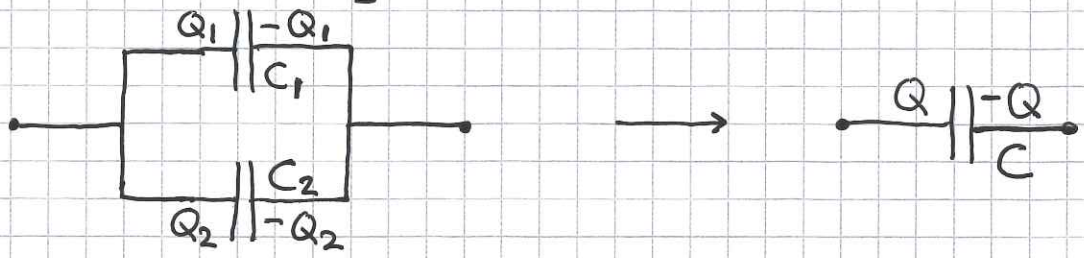


skal erstattes av



og oppføre seg likt, hva må da C være ?

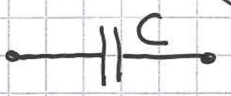
Vi har lik spenning, $V_1 = V_2 = V$, over C_1 og C_2:



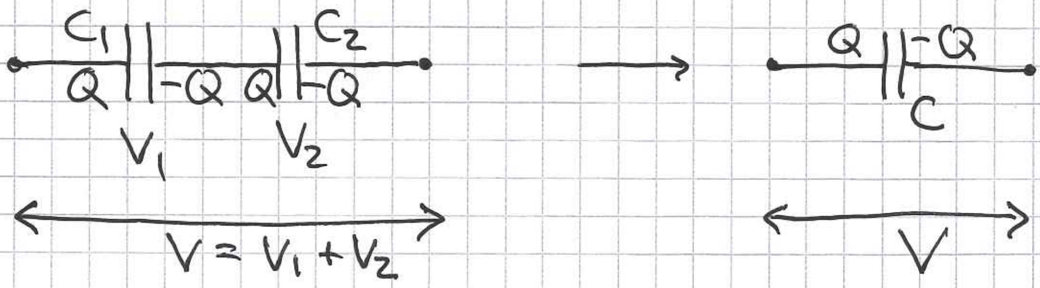
Dvs: $V = Q_1/C_1 = Q_2/C_2 = Q/C$ og $Q_1 + Q_2 = Q$

$\Rightarrow \quad C_1V + C_2V = CV \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = C_1 + C_2}$

Med N stk. koblet i parallell: $\boxed{C = \sum_{j=1}^{N} C_j}$

Seriekobling: Hvis  skal erstattes av , hva må da C være?

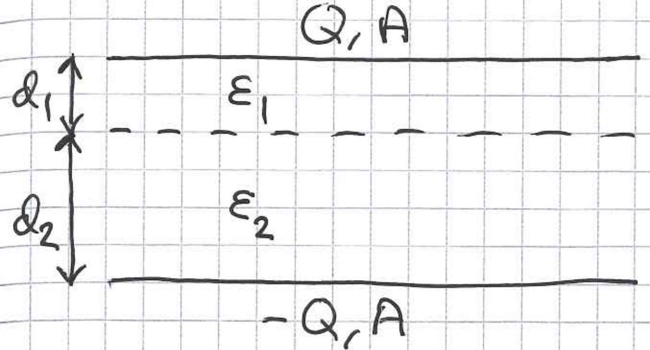
Vi har nå lik ladning $\pm Q$ på C_1 og C_2:



$$\Rightarrow \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

Med N stk koblet i serie: $\boxed{C^{-1} = \sum_{j=1}^{N} C_j^{-1}}$

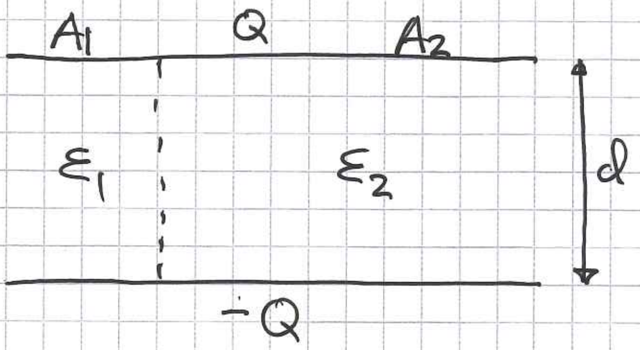
En kondensator fylt med <u>ulike dielektrika</u> blir som en parallell- eller seriekobling:



$$C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$$

med

$$C_j = \varepsilon_j A/d_j \quad ; \quad j=1,2$$



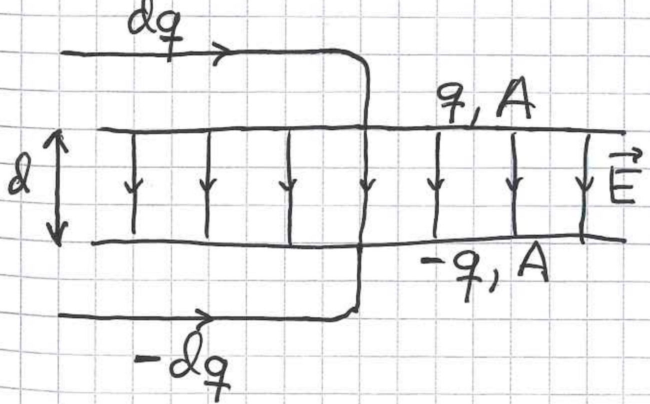
$$C = C_1 + C_2$$

med

$$C_j = \varepsilon_j A_j / d \quad ; \quad j=1,2$$

<u>Energi lagret i $\vec{E}$-felt</u> [OS2 8.3; YF 24.3; LHL 20.4]

Opplading av kondensator fordrer et arbeid W, som tilsvarer pot. energi U lagret i $\vec{E}$-feltet mellom platene.



En økning av ladningen, fra $\pm q$ til $\pm(q+dq)$, gir en økning i lagret potensiell energi:

$$dU = v(q)\,dq = \frac{q}{C}\,dq$$

Opplading fra $q=0$ til $q=Q$ gir pot. energi

$$U = \int dU = \int_0^Q \frac{q}{C}\,dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2$$

Med $C = \varepsilon_0 A/d$ og $V = Ed$ gir dette

$$U = \frac{1}{2}(\varepsilon_0 A/d)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot (Ad)$$

der $A \cdot d$ = volumet mellom platene, dvs der $E \neq 0$.

Tolkning:

Energien pr volumenhet i det elektriske feltet er

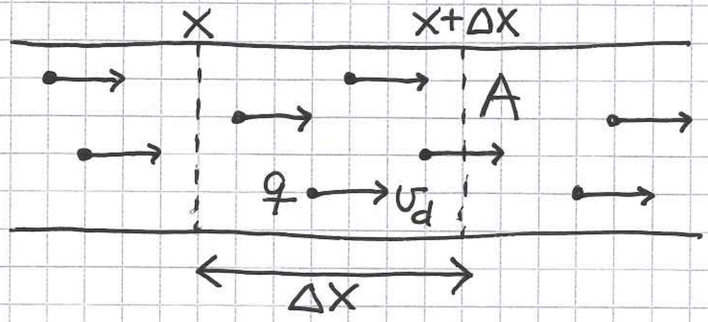
$$\boxed{u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

Et resultat som gjelder <u>generelt</u>.

ELEKRISK STRØM [OS2 9,10 ; YF 25,26 ; LHL 21,22]

Strøm og strømtetthet [OS2 9.1-2 ; YF 25.1 ; LHL 21.1]

Ser på leder med n frie ladninger pr volumenhet, med midlere driftshastighet v_d langs lederen :



(Merk: Lederen er typisk elektrisk nøytral.)

strøm $\stackrel{\text{def}}{=}$ mengde ladning som passerer tverrsnitt av lederen pr tidsenhet

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{dQ}{dt}$$

Enhet: $[I] = C/s = A$ (ampere)

All fri ladning $\Delta Q = q \cdot \Delta N = q \cdot n \cdot \Delta V$ i volumet $\Delta V = A \cdot \Delta x$ passerer tverrsnittet ved $x + \Delta x$ i løpet av tida $\Delta t = \Delta x / v_d$

$$\Rightarrow I = qnA\Delta x / (\Delta x / v_d) = nqv_d A$$

strømtetthet $\stackrel{\text{def}}{=}$ strøm pr flateenhet

$$j = I/A = nqv_d \quad \text{med enhet } [j] = A/m^2$$

dvs $\boxed{\vec{j} = nq\vec{v}_d}$

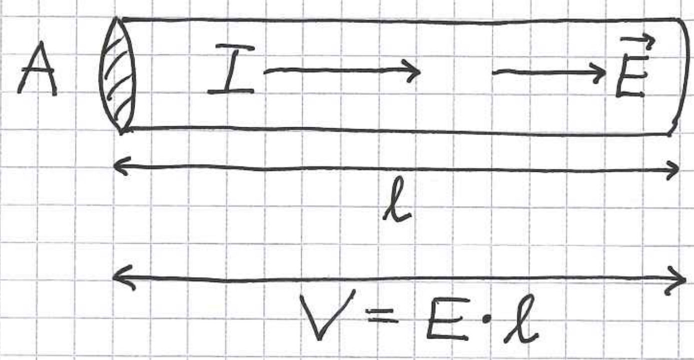
I <u>metaller</u> er $q = -e$: $\vec{j} = -ne\vec{v}_d$

$\longrightarrow$ elektrisk strøm

$\longleftarrow$ partikkelstrøm (massestrøm)

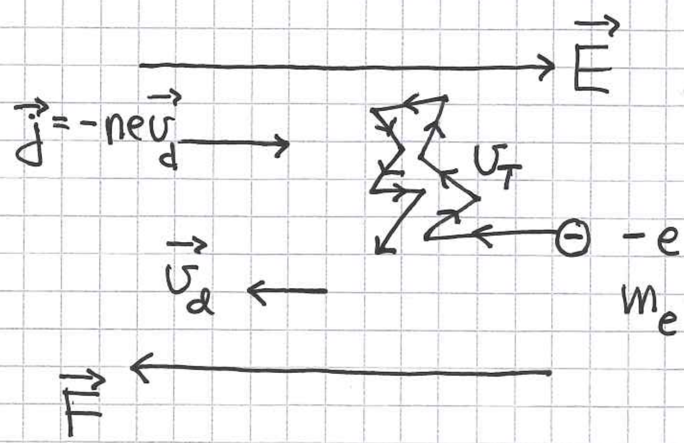
Ohms lov [OS2 9.2-4; YF 25.2, 25.6; LHL 21.2, 21.4]

En spenning V over en leder med lengde ℓ og tverrsnitt A gir et felt $\vec{E}$ i lederen, og dermed en kraft $\vec{F} = -e\vec{E}$ på frie elektroner i lederen, og dermed en strøm I i lederen:



$j = I/A$

De frie elektronene akselereres pga $\vec{F}$, men pga kollisjoner oppnår de bare en viss midlere driftshastighet $\vec{v}_d$ langs lederen:



d = midlere avstand mellom kollisjoner

$\tau = d/v_T$ = midlere tid mellom kollisjoner

v_T = midlere elektronfart ved temperatur T

$\vec{v}_d \approx \vec{a} \cdot \tau \overset{N2}{=} -\frac{e\vec{E}}{m_e} \cdot \tau$ = midlere driftshastighet

Dermed: $\boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E}}$

med

$\sigma = ne^2\tau/m_e$ = materialets konduktivitet (elektrisk ledningsevne)

Dette er Ohms lov, på mikroskopisk form, i henhold til Drude-modellen (Paul Drude, ca 1900)

Med $j = I/A$ og $E = V/\ell$ fås

$\boxed{V = RI}$ Ohms lov

med motstand (resistans) $R = \ell/\sigma A$

Konduktans G: $I = G \cdot V \Rightarrow G = \sigma A/\ell = R^{-1}$

Resistivitet ρ: $\rho = \sigma^{-1}$

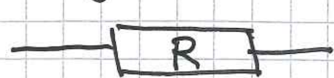
Enheter: $[R] = V/A = \Omega$ (ohm)

$[G] = \Omega^{-1} = S$ (siemens)

$[\rho] = \Omega m$; $[\sigma] = \Omega^{-1} m^{-1} = S/m$

Merk at σ og ρ er materialegenskaper.

G og R avhenger også av størrelse / utforming.

Kretssymbol: 

eller 

RMS-hastighet vs driftshastighet

Ved absolutt temperatur T bidrar hvert kvadratiske ledd i energifunksjonen med $\frac{1}{2}k_B T$ pr partikkel. (Ekvipartisjons-prinsippet.) Her er $k_B \simeq 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K ; Boltzmanns konstant. For elektroner:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m_e \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3 \cdot \frac{1}{2} k_B T$$

$$\Rightarrow v_T = v_{RMS} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3 k_B T / m_e} \sim 10^5 \text{ m/s ved } 300\text{K}$$

Driftshastigheten v_d er typisk <u>mye mindre</u> enn v_T ; la oss gjøre et estimat med en kobberledning med tverrsnitt 1.5 mm^2 og strømstyrke 1 A. Cu har molar masse 63 g og massetetthet ca 9 g/cm^3. Med 1 fritt elektron pr Cu-atom blir det da ca 10^{29} frie elektroner pr m^3,

$$\frac{9 \cdot 10^6 \text{ g/m}^3}{63 \text{ g/mol}} = \frac{10^6}{7} \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ el./m}^3 \approx 10^{29} \text{ el/m}^3$$

Dermed:

$$v_d = j/n \cdot e = I/A \cdot n \cdot e = \left(1/1.5 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{29} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\right) \text{ m/s}$$

$$\approx 10^{-4} \text{ m/s}$$

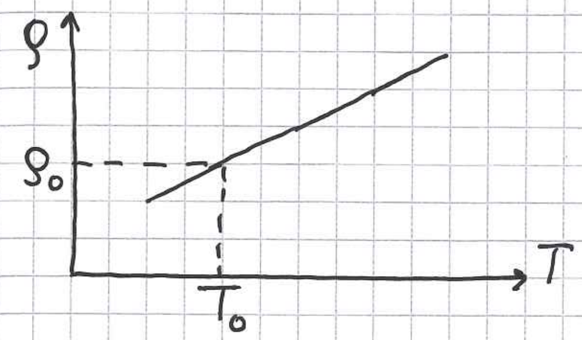
Dvs: $\quad v_d / v_T \lesssim 10^{-9}$!!

Resistivitet og temperatur [OS2 9.3; YF 25.2; LHL 21.2+5]

Drudemodellen : $\rho = \frac{m_e}{e^2 n \tau} \sim \frac{1}{n\tau}$

Metaller : Cu, Al, Ag, Fe, ...

Stor n som avhenger lite av T. Hyppigere kollisjoner når T øker, dvs mindre τ og større ρ. Exp. gir lineær $\rho(T)$:

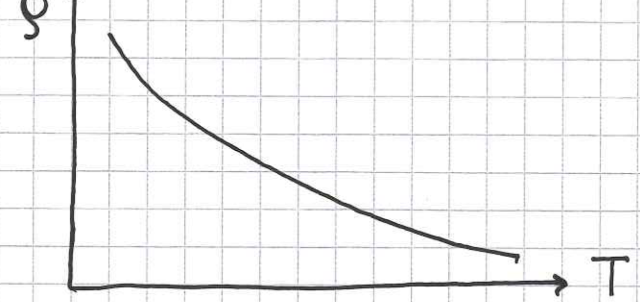


$$\rho(T) = \rho_0 \{ 1 + \alpha \cdot (T - T_0) \}$$

$\alpha \approx 0.004\ K^{-1}$ for Cu, Al, Ag

Halvledere : Si, Ge, GaAs, GaN, ...

Isolator med $n \approx 0$ ved $T \approx 0$. Økt T gjør at elektroner løsrives og n øker sterkt; dermed avtar ρ med økende T. (Også forurensningsatomer – doping – øker n og reduserer ρ.)



Viktige anvendelser:

Solceller: Fotoner med energi hf ($h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js = Plancks konstant; f = lysets frekvens) absorberes av elektroner i halvlederen; disse blir frie elektroner som gir elektrisk strøm.

Lysemitterende dioder (LED): Frie elektroner i halvlederen fanges i tilstander med lavere energi ("hull"); frigjort energi sendes ut som fotoner.

Eks:

$(Al_x Ga_{1-x})As$ $\quad \lambda = 560-870$ nm (gult - rødt)

$(In_x Ga_{1-x})$ ~~As~~ $\quad \lambda = 360-620$ nm (blått - gult)

$\Rightarrow$ Kan kombineres og gi hvitt lys med LED-pærer.

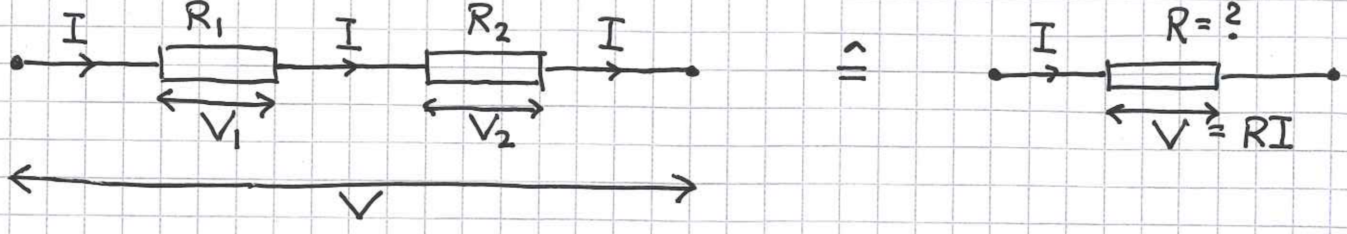
(Nobelpris fysikk 2014)

($\lambda = c/f$ = lysets bølgelengde; $c \simeq 3 \cdot 10^8$ m/s)

Kobling av flere motstander

[OS2 10.2 ; YF 26.1 ; LHL 21.3]

Seriekobling:

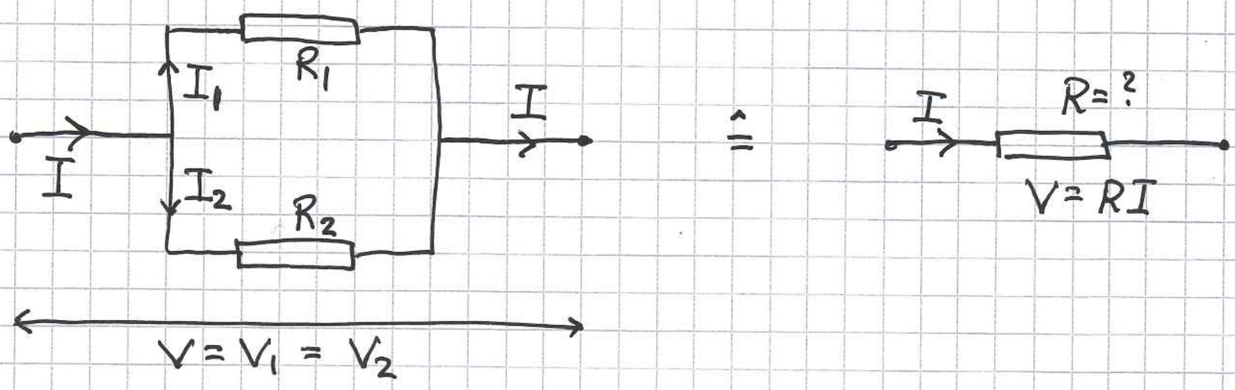


Lik strøm I gjennom R_1 og R_2, og $V = V_1 + V_2$ gir

$V = R_1 I + R_2 I = RI$, dvs $\boxed{R = R_1 + R_2}$

Med N stk i serie: $\boxed{R = \sum_{j=1}^{N} R_j}$

Parallellkobling:



Lik spenning over R_1 og R_2, og $I = I_1 + I_2$ gir

$\frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$, dvs $\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$

Med N stk i parallell: $\boxed{R^{-1} = \sum_{j=1}^{N} R_j^{-1}}$