TFY4106 Fysikk Løsningsforslag til Eksamen 9. juni 2016

I snooker brukes kompakte kuler med diameter 52.5 mm og masse 130 g. Oppgavene 1 – 6 dreier seg om slike kuler.

1) Hva er omtrent massetettheten, i enheten gram pr kubikkcentimeter, til plastmaterialet som benyttes i snookerkuler?

$$\rho = m/(4\pi R^3/3) = 3 \cdot 0.130/4\pi \cdot 26.25^3 \cdot 10^{-9} = 1716,$$

i SI-enheten kg/m^3, som omregnet til g/cm^3 via divisjon med 1000 gir

D) 1.7

2) En forsøksserie, der snookerkuler slippes i tyngdefeltet, viser at luftmotstanden beskrives bra med en hastighetsavhengig friksjonskraft $f(v) = Dv^2$, med koeffisient $D = 0.656$ g/m. Hva er da snookerkulas maksimale hastighet (terminalhastighet)?

Kula har oppnådd terminalhastighet når friksjonskraften akkurat balanserer tyngdekraften: $Dv^2 = mg$. Dermed:

$$v = \sqrt{mg/D} = \sqrt{0.130 \cdot 9.81/0.000656} = 44\,\text{m/s}.$$

D) 44 m/s

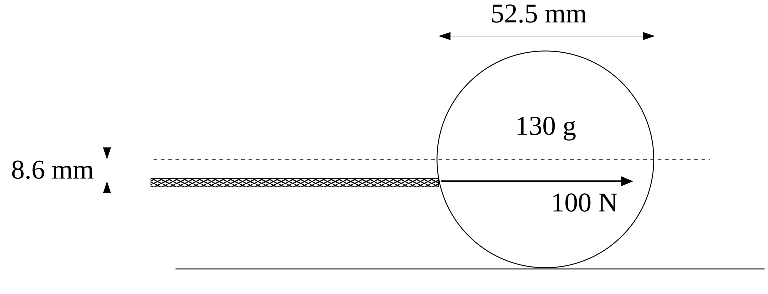
3) Ei snookerkule slippes (med null startfart) fra 3. etasje i Realfagbygget. Hva er omtrent kulas hastighet når den treffer gulvet i 1. etasje, etter å ha falt ca 7 m?

Med en sterk mistanke om at den beskjedne luftmotstanden ikke påvirker svaret i særlig grad satser vi på en tilnærmet løsning gitt ved å anta bevegelse med konstant akselerasjon $a = g$ og null startfart. Eller, ekvivalent, ved å anta at mekanisk energi er bevart:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gy} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 7} \simeq 11.7\,\text{m/s}.$$

Med *litt* luftmotstand blir nok hastigheten litt mindre enn dette, så vi satser på 11 m/s. (Med $v = 11$ m/s er luftmotstanden bare ca 6% av tyngdekraften.)

A) 11 m/s



4) Ei snookerkule ligger i ro på et snookerbord. Den gis et horisontalt støt 8.6 mm under senterlinjen, med en kraft 100 N som kan regnes konstant gjennom støtets varighet på 0.01 s. (Senterlinjen er den horisontale linjen som går gjennom kulas massesenter.) Friksjonskrefter kan neglisjeres i selve støtet. Når støtet

er fullført, må vi ta hensyn til friksjon mellom kule og bord, som karakteriseres ved statisk og kinetisk friksjonskoeffisient hhv $\mu_s = 0.60$ og $\mu_k = 0.50$. Hva er snookerkulas hastighet V_0 umiddelbart etter at støtet er fullført?

Newtons 2. lov, $F = dp/dt$, gir at kulas impuls umiddelbart etter fullført støt blir (med støtvarighet $T = 0.01$ s) $P_0 = F \cdot T = 100 \cdot 0.01 = 1.00$ kg m/s. Kulas hastighet umiddelbart etter fullført støt er dermed $V_0 = P_0/m = 1.00/0.130 = 7.7$ m/s.

C) 7.7 m/s

5) Hva er snookerkulas vinkelhastighet ω_0 umiddelbart etter at støtet er fullført? ($I_0 = 2mr^2/5$)

Newtons 2. lov for rotasjon om fast akse (gjennom kulas massesenter), $\tau = I_0 d\omega/dt$, gir $\omega_0 = \tau T/I_0 = FyT/(2mr^2/5) = 100 \cdot 8.6 \cdot 10^{-3} \cdot 0.01/(2 \cdot 0.130 \cdot 26.25^2 \cdot 10^{-6}/5) = 240$ rad/s.

E) 240 rad/s

6) Hva er snookerkulas vinkelakselerasjon α etter at støtet er fullført (og fram til den ruller rent, dvs uten å slure/gli)?

Etter fullført støt er det den kinetiske friksjonskraften fra bordet på kula som sørger for å gi kula en vinkelakselerasjon:

$$\alpha = \dot{\omega} = \tau_f/I_0 = \mu_k mgr/(2mr^2/5) = 5\mu_k g/2r = 5 \cdot 0.50 \cdot 9.81/2 \cdot 26.25 \cdot 10^{-3} = 467,$$

med enhet rad/s^2.

C) 467 rad/s^2

En kubisk kloss (alle sidekanter like lange) med masse 0.15 kg er plassert på et skråplan. Statisk og kinetisk friksjonskoeffisient mellom kloss og skråplan er hhv $\mu_s = 0.60$ og $\mu_k = 0.49$. Oppgavene 7 – 9 dreier seg om dette systemet.

7) Hvor stor vinkel kan skråplanet maksimalt danne med horisontalen uten at klossen skal begynne å gli?

Hvis tyngdens komponent nedover langs skråplanet, $mg \sin \beta$, overstiger den maksimale statiske friksjonskraften $\mu_s N = \mu_s mg \cos \beta$, vil klossen gli. Maksimal vinkel β er derfor gitt ved $mg \sin \beta = \mu_s mg \cos \beta$, dvs $\beta = \arctan \mu_s = \arctan 0.60 = 31°$. (Hvis resultatet hadde blitt større enn 45 grader, ville klossen ha veltet ved $\beta = 45°$. Men det skjer ikke her.)

B) 31°

8) Anta at klossen glir. Hva må skråplanets helningsvinkel være for at klossen skal gli nedover med konstant hastighet?

Klossen glir med konstant hastighet når $mg \sin \beta = \mu_k mg \cos \beta$, dvs $\beta = \arctan \mu_k = \arctan 0.49 = 26°$.

A) 26°

9) En kloss nr to plasseres på skråplanet nedenfor klossen som hittil er beskrevet. De to klossene forbindes med ei tilnærmet masseløs snor (parallell med skråplanet). Kloss nr to er så glatt at vi kan se bort fra friksjon mellom denne klossen og skråplanet. De to klossene har like stor masse. Anta at klossene glir. Hva må skråplanets helningsvinkel nå være for at de to klossene skal gli nedover med konstant hastighet?

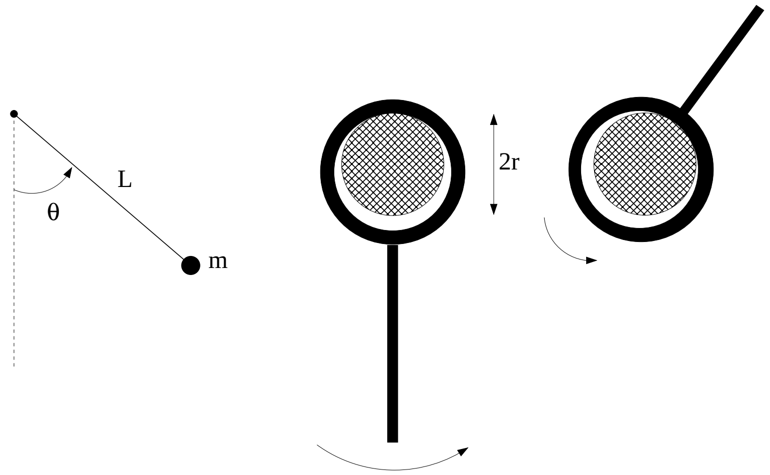
Snora er stram, og snordraget S virker nedover langs skråplanet på den øverste klossen og oppover langs skråplanet på den nederste klossen. Newtons 2. lov (evt 1. lov) langs skråplanet gir dermed de to ligningene

$$\begin{aligned} S + mg\sin\beta - \mu_k mg\cos\beta &= ma = 0 \\ -S + mg\sin\beta &= ma = 0 \end{aligned}$$

Dvs $2mg\sin\beta = \mu_k mg\cos\beta$, dvs $\beta = \arctan\mu_k/2 = \arctan 0.245 = 14°$.

D) 14°

En fysisk, men tilnærmet matematisk pendel består av et lodd med masse $m = 200$ g festet til enden av ei tynn stang med lengde $L = 64$ cm. Stanga har en ring i den andre enden, tredd inn på en fastspent aksling med radius $r = 8.0$ mm. Ringens indre radius er bittelitt større enn dette, slik at pendelen kan rotere med forholdsvis lite friksjonstap omkring akslingen. Friksjonskraften f_μ mellom pendelring og aksling kan behandles som tørr kinetisk friksjon, dvs proporsjonal med normalkraften N fra akslingen på pendelen, med friksjonskoeffisient $\mu = 0.1$. I tillegg antar vi at loddet i enden av pendelstanga utsettes for en luftmotstand som i absoluttverdi er proporsjonal med kvadratet av loddets hastighet, $f_D = Dv^2$, med $D = 0.1$ g/m. Pendelens utsving fra likevekt angis med vinkelen θ, regnet positiv mot klokka. Oppgavene 10 – 14 dreier seg om denne pendelen.



10) Anta at pendelen starter med praktisk talt null vinkelhastighet, med pendelstanga rett oppover ($\theta = -\pi$). Neglisjer i første omgang friksjonskreftene som virker på pendelen og beregn dermed en tilnærmet riktig verdi for pendelens vinkelhastighet i det loddet for første gang passerer bunnen av sirkelbanen ($\theta = 0$).

Energibevarelse (tilnærmet!) gir $2mgL = mv^2/2 = m\omega^2L^2/2$, og dermed $\omega = \sqrt{4g/L} = 2 \cdot \sqrt{9.81/0.64} = 7.8$ rad/s.

B) 7.8 s^{-1}

11) Etter at loddet har svingt forbi bunnen første gang vil det svinge nesten opp til toppen igjen, men ikke helt. Det er klart at normalkraften N har retning *bort fra* loddet når loddet passerer bunnen, og retning *mot* loddet der loddet snur. Det må bety at N er lik null et eller annet sted mellom bunnen og der hvor loddet

snur. Hva er sammenhengen mellom vinkelen θ og vinkelhastigheten $\omega = \dot{\theta}$ der $N = 0$?

Loddet har (sentripetal-)akselerasjon $v^2/L = \omega^2 L$ normalt på sirkelbanen. Kreftene normalt på sirkelbanen er normalkraften N og tyngdens normalkomponent $-mg\cos\theta$. Her er positivt fortegn valgt inn mot banens sentrum. Newtons 2. lov gir da $N - mg\cos\theta = m\omega^2 L$. Vi setter $N = 0$ og finner $\omega = \sqrt{-(g/L)\cos\theta}$.

B) $\omega = \sqrt{-\frac{g\cos\theta}{L}}$

12) Anta at pendelen etter noen svingninger passerer bunnen med hastighet 0.5 m/s. Du ønsker å vurdere relativ påvirkning av tørr friksjon og luftmotstand akkurat i denne situasjonen og velger da å betrakte det dimensjonsløse forholdet $\kappa = |\tau_\mu/\tau_D|$. Her er τ_μ og τ_D dreiemomentet på pendelen pga hhv tørr friksjon og luftmotstand. Hva er verdien av κ her?

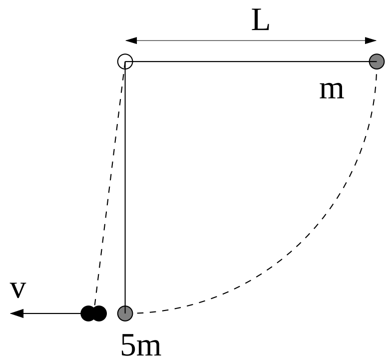
Den tørre friksjonen f_μ har arm r mens luftmotstanden f_D har arm L. Ved bunnen av banen er $\theta = 0$ (evt $n \cdot 2\pi$), slik at $N = mg + mv^2/L$. Dermed er $f_\mu = \mu N = \mu(mg + mv^2/L)$, og $\tau_\mu = \mu m r(g + v^2/L) = 0.1 \cdot 0.200 \cdot 0.008 \cdot (9.81 + 0.5^2/0.64) = 0.001632$ Nm. Luftmotstandens dreiemoment er $\tau_D = Dv^2 L = 0.0001 \cdot 0.5^2 \cdot 0.64 = 1.6 \cdot 10^{-5}$ Nm. Forholdet mellom disse er 102.
(Her burde oppgaveteksten strengt tatt ha spesifisert referansepunktet, men hvis vi "ønsker å vurdere relativ påvirkning av tørr friksjon og luftmotstand", er det vel temmelig naturlig å velge akslingens sentrum, dvs rotasjonsaksen, som referanse.)

A) 102

13) Etter en stund vil pendelen svinge tilnærmet harmonisk med små utsving omkring bunnen. Hva er da svingetiden (perioden), sånn omtrent?

En matematisk pendel med lengde L som svinger med små utsving fra likevekt har svingetid $T = 2\pi/\sqrt{g/L} = 2\pi\sqrt{0.64/9.81} = 1.6$ s.

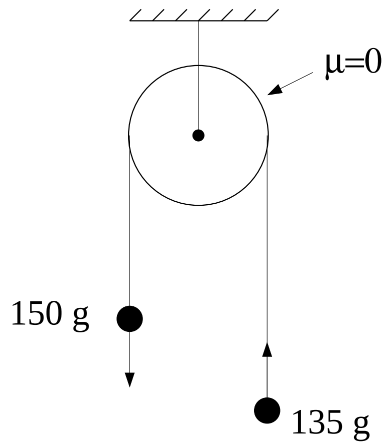
B) 1.6 s



14) To kuler, med masse m og $5m$, er hengt opp i samme punkt med tynne, vektløse snorer med lengde $L = 1.0$ m. Kula med masse m trekkes ut til snora er horisontal og slippes. Den svinger nedover og treffer den andre kula i et sentralt støt. Betrakt kulene som punktmasser slik at snorene er vertikale når kollisjonen skjer. Anta at kollisjonen er fullstendig uelastisk, dvs kulene henger sammen etter kollisjonen. Hva er kulenes felles hastighet v umiddelbart etter kollisjonen?

Energibevarelse, $mgL = mv_0^2/2$, gir hastigheten til m rett før kollisjonen: $v_0 = \sqrt{2gL}$. Impulsbevarelse i den uelastiske kollisjonen, $mv_0 = 6mv$, gir deretter kulenes felles hastighet v umiddelbart etter kollisjonen: $v = v_0/6 = \sqrt{2gL}/6 = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 1.0}/6 = 0.7$ m/s.

A) 0.7 m/s



15) Figuren viser et øyeblikksbilde av to små kuler med masse hhv 150 g og 135 g, forbundet med ei tilnærmet masseløs snor som kan gli uten friksjon over ei trinse. Hva er kulenes akselerasjon?

Uten friksjon mellom snor og trinse er trinsas funksjon kun å holde kulene oppe, samt å snu retningen på snora. Den tyngste kula (M) vil akselerere nedover, den letteste (m) oppover. Snordraget S virker oppover på begge kulene, tyngdekraften virker nedover på begge kulene. Dermed: $Mg - S = Ma$ og $S - mg = ma$. Vi legger disse to ligningene sammen for å eliminere S, og finner $a = g(M - m)/(M + m) = 9.81 \cdot 15/285 = 0.52$ m/s^2.

E) 0.52 m/s^2

16) Berylliumdifluorid, BeF_2, er et lineært molekyl (F–Be–F) med Be i midten. En av de fire mulige vibrasjonsbevegelsene, såkalt "symmetrisk strekk", innebærer at de to F-atomene svinger hver sin vei langs molekylets akse mens Be-atomet står i ro. Svingebevegelsen kan betraktes som en harmonisk oscillator, med masse 19u og fjærkonstant 16.8 N/m. Med hvilken frekvens svinger da F-atomene? ($1\text{u} = 1.66 \cdot 10^{-27}$ kg.)

$f = \omega/2\pi = \sqrt{k/m}/2\pi = \sqrt{16.8/19 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27}}/2\pi = 3.7 \cdot 10^{12}$ Hz $= 3.7$ THz.

B) 3.7 THz

17) Avstanden mellom Be og hvert av de to F-atomene er 133 pm. Hvor stort er da molekylets treghetsmoment, mhp en akse gjennom massesenteret og normalt på molekylets akse?

$I_0 = 2m_{\mathrm{F}} d^2_{\mathrm{Be-F}} = 2 \cdot 19\mathrm{u} \cdot 1.33^2$ Å^2 $= 67$ uÅ^2. (Det framgår av oppgaveteksten i nr 16 at et F–atom har masse 19u.)

D) 67 uÅ^2

18) En miljøvennlig trikk drives ved å utnytte den kinetiske energien i ei roterende kompakt metallskive med diameter 150 cm og masse 1200 kg. Hva er skivas kinetiske energi når den gjør 3000 omdreininger pr minutt? (Oppgitt: $I_0 = MR^2/2$ for kompakt skive.)

$K = I_0\omega^2/2 = MR^2\omega^2/4 = 1200 \cdot 0.75^2 \cdot (3000 \cdot 2\pi/60)^2/4 = 1.7 \cdot 10^7$ J $= 17$ MJ.

C) 17 MJ

19) En kloss med masse 20 g er festet til ei fjær med fjærkonstant 20 N/m. Fjæra strekkes med 2.0 cm og klossen slippes, med null starthastighet. Klossen utfører deretter dempede svingninger, der dempingskraften er proporsjonal med klossens hastighet, med dempingskoeffisient $b = 0.020$ Ns/m. Hvor mange hele perioder svinger klossen før utsvingsamplituden er redusert til 0.4 cm?

Utsvingsamplituden avtar eksponentielt med tiden, $x_0 \exp(-\gamma t)$, der $\gamma = b/2m$. Med $x_0 = 2.0$ cm blir amplituden redusert til 0.4 cm etter en tid t bestemt av $\exp(-\gamma t) = 1/5$, dvs $\exp(\gamma t) = 5$, dvs $t = (\ln 5)/\gamma = (\ln 5) \cdot 2m/b = (\ln 5) \cdot 0.040/0.020 = 3.219$ s. Perioden er $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{k/m - b^2/4m^2} \simeq 2\pi/\sqrt{k/m} = 2\pi/\sqrt{20/0.020} = 0.199$ s. (Dempingen er svak.) Forholdet t/T blir da ca 16.17, dvs 16 hele perioder før amplituden er redusert til 0.4 cm.

B) 16

20) Hva er Q-faktoren til systemet i oppgave 19?

$Q = \omega/\Delta\omega \simeq \omega_0/2\gamma = \sqrt{k/m}/(b/m) = \sqrt{1000}/1 = 32.$

C) $Q = 32$

21) Til hvilken verdi må dempingskoeffisienten b justeres i oppgave 19 dersom systemet skal være kritisk dempet?

Kritisk demping betyr at $\gamma = \omega_0$, dvs $b/2m = \sqrt{k/m}$, dvs $b = \sqrt{4mk} = \sqrt{4 \cdot 0.020 \cdot 20} = 1.3$ Ns/m.

B) 1.3 Ns/m

22) Anta at systemet i oppgave 19 *er* kritisk dempet, slik at $\gamma = \omega_0$. Dersom fjæra nå strekkes med 2.0 cm, i positiv x-retning, hva må da klossens starthastighet være for at den skal *passere* likevektsposisjonen $x = 0$ (en gang)?

Med kritisk demping er $x(t) = A\exp(-\gamma t) + Bt\exp(-gammat)$, slik at $x = 0$ eventuelt inntreffer ved tidspunktet $t = -A/B$. Vi har $x(0) = A = x_0 = 2.0$ cm. Passering ved $x = 0$ ved et tidspunkt $t > 0$ fordrer altså at $B < 0$. Vi har videre $v(t) = (-\gamma A + B - \gamma Bt)\exp(-\gamma t)$, slik at $v(0) = -\gamma A + B$. Med andre ord, $v(0)$ må være mindre enn $-\gamma A = -\omega_0 A = -\sqrt{k/m}x_0 = -\sqrt{1000} \cdot 0.020 = -0.63$ m/s, dvs mer enn 63 cm/s i negativ x-retning.

E) Mer enn 63 cm/s i negativ x-retning

23) Ei jamntjukk flaggstang med lengde L faller slik at den roterer om festepunktet A nede ved bakken. Hva er hastigheten til toppen av flaggstanga rett før den treffer bakken? Oppgitt: $I_0 = ML^2/12$.

Steiners sats gir $I_A = I_0 + M(L/2)^2 = ML^2/3$ for flaggstangas treghetsmoment om en akse gjennom festepunktet A nede ved bakken. Flaggstangas mekaniske energi er $E = U_0 = MgL/2$, lik potensiell energi for massen M i massesenterets høyde $L/2$ før stanga faller. Rett før den treffer bakken er $U_1 = 0$, mens kinetisk energi er $K_1 = I_A\omega^2/2 = ML^2\omega^2/6$. Energibevarelse gir da $\omega = \sqrt{3g/L}$, og hastigheten til toppen av flaggstanga er $v = \omega L = \sqrt{3gL}$.

B) $\sqrt{3gL}$

24) Merkur har masse $3.302 \cdot 10^{23}$ kg og radius 2440 km. Planeten kunne observeres den 9. mai i år, da den passerte foran solskiva, sett her fra jorden. Hvor stor er tyngdens akselerasjon på Merkurs overflate?

$g_{\text{Merkur}} = GM/R^2$, og med innsetting av oppgitte tallverdier for M og R, samt verdien av gravitasjonskonstanten G fra formelvedlegget blir $g_{\text{Merkur}} = 3.7$ m/s^2.

C) 3.7 m/s^2

25) På månen er tyngdens akselerasjon ca 1/6 av verdien på jorden. Hva er da nedre teoretiske grense for tiden en elektrisk bil bruker på å akselerere fra 0 til 100 km/h på månen? Anta at statisk friksjonskoeffisient mellom bildekk og underlag har verdien 1.0.

Her er det kun friksjonskreftene mellom bildekk og underlag som kan bidra til bilens akselerasjon. Vi har $f_{\max} = \mu_s N = \mu_s mg/6 = ma_{\max}$, med $\mu_s = 1.0$ og $g = 9.81$ m/s^2. Dette gir en maksimal akselerasjon $a_{\max} = \mu_s g/6 = 1.635$ m/s^2, og dermed en minste tidsbruk $t_{\min} = v/a_{\max} = (100/3.6)/1.635 = 17$ s.

E) 17 s

En transversal bølge $y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t)$ forplanter seg på en streng, med $y_0 = 2.0$ cm, $k = 20$ m^{-1} og $\omega = 20$ s^{-1}. Oppgavene 26 – 28 dreier seg om denne harmoniske bølgen.
26) Hva er bølgelengden?

$\lambda = 2\pi/k = 2\pi/20 = 0.31$ m $= 31$ cm.

A) 31 cm

27) Hva er bølgehastigheten?

$v = \lambda/T = \omega/k = 20/20 = 1.0$ m/s.

E) 1.0 m/s

28) Hva er strengelementenes maksimale hastighet?

$dy/dt = -\omega y_0 \cos(kx - \omega t)$, så strengelementenes maksimale transversale hastighet er $\omega y_0 = 20 \cdot 0.020 = 0.40$ m = 40 cm.

B) 40 cm/s

29) En akustisk gitar har strenger med 648 mm mellom festepunktene (dvs der strengen har null utsving). A–strengen har masse 4.466 gram pr meter og skal stemmes slik at grunntonen har en frekvens 110 Hz. Hva skal strekk-kraften i strengen være?

$S = \mu v^2 = \mu \lambda^2 f^2 = \mu \cdot 4L^2 \cdot f^2 = 4.466 \cdot 10^{-3} \cdot 4 \cdot 0.648^2 \cdot 110^2 = 90.8$ N.

E) 90.8 N

30) En sirene er festet ute på kanten (periferien) av ei sirkulær skive som roterer med omløpstid 0.2 s. Skivas radius er 50 cm. Sirenen genererer lyd med frekvens 200 Hz. Lydhastigheten er 340 m/s. Du står et stykke unna og hører lyd med en frekvens som varierer harmonisk mellom

Sirenens maksimale hastighet rett mot og rett fra deg er $2\pi r/T = 3.14/0.2 = 15.7$ m/s. Observert frekvens varierer dermed mellom $200 \cdot 340/(340 + 15.7) = 191$ Hz og $200 \cdot 340/(340 - 15.7) = 210$ Hz.

C) 191 og 210 Hz

31) Du sender rødt laserlys, med bølgelengde 700 nm, inn mot et diffraksjonsgitter og observerer intensitetsmaksima i retning $\theta_1 = \pm 44.4°$ (i tillegg til rett fram, selvsagt, $\theta_0 = 0°$). I hvilke retninger vil det samme diffraksjonsgitteret gi intensitetsmaksima med fiolett laserlys, med bølgelengde 400 nm?

Konstruktiv interferens når $d \sin\theta = n\lambda$, slik at diffraksjonsgitteret har spalteavstand $d = 700/\sin 44.4° = 1000$ nm. Dermed konstruktiv interferens med fiolett laserlys i retninger gitt ved $\theta = \arcsin(n \cdot 400/1000) = 0°, \pm 23.6°, \pm 53.1°$.

B) $0°, \pm 23.6°, \pm 53.1°$

32) Springsteen spiller i Granåsen, og du har funnet deg en fin plass, ca 10 m fra høyttaleranlegget, som sender ut omtrentlig like mye akustisk energi i alle retninger. Halvveis i åpningslåten innser du at lydintensiteten er i høyeste laget. Hvor lang avstand må du ha til høyttalerne for å redusere lydtrykksnivået med 10 dB?

Ettersom $\beta \sim 10 \log I$, må intensiteten endres fra I til $I/10$ for å gi en reduksjon i lydtrykksnivået β på 10 dB. Det betyr, siden $I \sim 1/r^2$, at avstanden r må endres til $\sqrt{10}r$, her fra 10 m til ca 32 m.

B) 32 m

33) Du befinner deg i en fiskebåt 20 km utenfor kysten da et lokalt uvær passerer fiskefeltet, med kurs rett inn mot kysten. Du teller 7 sekunder mellom hver gang båten er på en bølgetopp. Vel vitende om at du er på dypt vann (dvs: dybden er betydelig større enn bølgelengden, hele veien inn til kysten) kan du anslå at uværet ("bølgetoget") vil slå mot land om ca

På dypt vann er $\omega = 2\pi/T = \sqrt{gk}$, så bølgelengden er her $\lambda = 2\pi/k = 2\pi/(4\pi^2/T^2 g) = T^2 g/2\pi = 49 \cdot 9.81/2\pi = 76.5$ m. Bølgetogets gruppefart er $v_g = d\omega/dk = \sqrt{g/k}/2 = \sqrt{g\lambda/8\pi} = \sqrt{9.81 \cdot 76.5/8\pi} = 5.46$ m/s $= 19.7$ km/h. Dermed bruker uværet ca 1 time på å nå inn til land.

A) 1 time

34) Et jordskjelv på havets bunn, på ca en kilometers dyp, skaper en bølge på overflaten med bølgelengde ca 200 km. Med hvilken hastighet forplanter bølgen seg?

Her er vi på grunt vann, $D \ll \lambda$, slik at $\omega \simeq \sqrt{gD}k$. Fasefart og gruppefart er da like store, $v = \omega/k = \sqrt{gD} = 99 \simeq 100$ m/s.

C) ca 100 m/s

35) En streng med masse μ pr lengdeenhet er plassert langs x-aksen med strekk-kraft S. En bølgepuls forplanter seg langs strengen, i positiv x-retning. Ved tidspunktet $t = 0$ er utsvinget

$$\xi(x, 0) = \xi_0 \left(1 + \cos(2\pi x/a)\right)$$

for $|x| \leq a/2$ og $\xi(x, 0) = 0$ for $|x| > a/2$. Hva er den totale energien E som forplanter seg med denne bølgepulsen?
Oppgitt: Energien pr lengdeenhet er $\varepsilon = S(\partial\xi/\partial x)^2$. Trigonometrisk identitet: $\sin^2\beta = (1 - \cos 2\beta)/2$.

Vi trenger $\partial\xi/\partial x = -\xi_0(2\pi/a)\sin(2\pi x/a)$, som innsatt og med bruk av oppgitt identitet gir $\varepsilon(x, 0) = S\xi_0^2(2\pi/a)^2(1 - \cos(4\pi x/a))/2$. Denne energitettheten må integreres fra $-a/2$ til $a/2$. Da gir cosinusleddet null bidrag, slik at

$$E = S\xi_0^2 \cdot \frac{2\pi^2}{a^2} \cdot a = 2S\xi_0^2\pi^2/a.$$

C) $E = 2S\xi_0^2\pi^2/a$

36) En stålbjelke er 1000 cm lang når temperaturen er $-30°$C. Hvor mye lenger er bjelken ved en temperatur $+50°$C? Stål har lengdeutvidelseskoeffisient $12\,\mu$m/m K.

Forlengelsen er 12μm pr meter og pr kelvin. Med en lengde 10 m og en temperaturøkning 80 K blir følgelig forlengelsen 12μm $\cdot 800 = 9600\mu$ m, som er ca 1 cm.

D) 1 cm

37) En ideell gass benyttes som arbeidssubstans i en kjølemaskin og gjennomgår følgende reversible kretsprosess (der a, b, c og d angir ulike likevektstilstander for gassen): ab: isobar utvidelse, bc: isoterm kompresjon, cd: isokor trykkreduksjon, da: adiabatisk utvidelse. Hva er da korrekt rangering av temperaturene i de fire likevektstilstandene?

Isoterm kompresjon fra b til c: $T_b = T_c$. Isobar utvidelse fra a til b: $T_b > T_a$. Adiabatisk utvidelse fra d til a: $T_d > T_a$ (adiabat brattere enn isoterm). Isokor kompresjon fra c til d: $T_c > T_d$. Alt i alt: $T_b = T_c > T_d > T_a$.

C) $T_b = T_c > T_d > T_a$

38) Hvilken figur illustrerer kretsprosessen i forrige oppgave?

Figur D stemmer med beskrivelsen.

39) I trippelpunktet til etanol er temperaturen 150 K og damptrykket (metningstrykket) 0.43 mPa. Etanols fordampingsvarme er ca 42 kJ/mol og varierer lite med temperaturen. Hvilken verdi gir da Clapeyrons ligning (og dermed damptrykk-kurven) for kokepunktet til etanol? (En væske koker når damptrykket tilsvarer det omgivende lufttrykket, som ved normale betingelser er ca en atmosfære.)

Damptrykk-kurven: $p(T) = p(T_t)\exp((l/R)(1/T_t - 1/T))$, her med $T_t = 150$ K og $p(T_t) = 0.43$ mPa. Fra denne skal vi bestemme hvilken temperatur T som gir et damptrykk $p(T) = 101325$ Pa. Vi løser mhp T og finner

$$T = (1/T_t - (R/l)\ln(p(T)/p(T_t)))^{-1} = (1/150 - (8.314/42000)\cdot\ln(101325/0.00043))^{-1} = 350.8\,\text{K},$$

dvs ca 78°.

E) ca 78°C

40) Ei aluminiumsstang har lengde 50 cm og tverrsnitt 10 cm^2. Stangas to ender er i kontakt med vann med temperatur hhv 20°C og 100°C. I dette temperaturintervallet er varmeledningsevnen til Al omtrent konstant, med verdi 235 W/m K. Hvor mye varmeeffekt overfører stanga ved stasjonære forhold?

$P = jA = \kappa\Delta T A/L = 235\cdot 80\cdot 0.0010/0.50 = 38$ W.

D) 38 W

41) Anta nå at det varme vannet i forrige oppgave ikke er et stort reservoar men derimot 5 L (evt 5 kg) med vann, med spesifikk varmekapasitet 4.2 kJ/kg K. Da vil temperaturforskjellen $\Delta T(t) = T(t) - T_1$ mellom det varme vannet ($T(t)$) og vannet med romtemperatur ($T_1 = 20°$C) avta i henhold til ligningen

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\alpha\Delta T.$$

Hvor stor er koeffisienten α for dette systemet? Vi antar, som i forrige oppgave, at varme kun overføres via den 50 cm lange aluminiumsstanga.

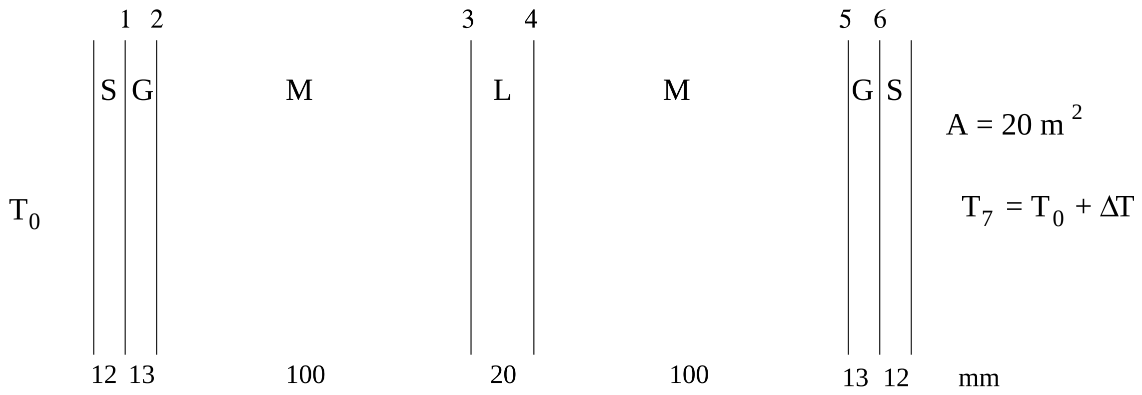
$j = dQ/Adt = CdT/Adt = mcdT/Adt = mcd\Delta T/Adt$ og $j = -\kappa\Delta T/L$ gir $d\Delta T/dt = -(\kappa A/mcL)\delta T$, dvs $\alpha = \kappa A/mcL = 235 \cdot 0.0010/5 \cdot 4200 \cdot 0.50 = 2.2 \cdot 10^{-5}$ pr sekund, dvs 0.08 pr time.

C) 0.08 pr time

42) Betong har varmeledningsevne $\kappa = 1.0$ W/m K. Hva er da byggebransjens U-verdi (i enheten W/m^2 K) for en 40 cm tykk betongvegg?

U-verdi er definert ved sammenhengen $j = U(T_i - T_u)$, dvs U angir varmelekkasjen pr kvadratmeter og pr grad temperaturforskjell mellom inne og ute. Her har vi ganske enkelt $U = \kappa/L = 1.0/0.40 = 2.5$ W/m^2 K.

D) U = 2.5



En skillevegg mellom to rekkehus er konstruert som i figuren ovenfor: 12 mm sponplate (S), 13 mm gips (G), 100 mm mineralull (M), 20 mm luft (L), 100 mm mineralull (M), 13 mm gips (G), 12 mm sponplate (S). Gipsplater isolerer godt mot *lyd* og hemmer spredning av brann, men isolerer *dårlig* mot varmeledning. Varmeledningsevnene er $\kappa_\mathrm{S} = 0.12$ W/m K, $\kappa_\mathrm{G} = 0.25$ W/m K, $\kappa_\mathrm{M} = 0.035$ W/m K, $\kappa_\mathrm{L} = 0.026$ W/m K. Pensjonistparet i leiligheten til venstre har valgt å tilbringe deler av vinteren på sydligere breddegrader og har skrudd termostaten i alle rom ned til temperaturen $T_0 = 9°$C. Studentparet i leiligheten til høyre kan ikke unne seg den slags luksus og holder en jevn temperatur $T_7 = 22°$C i alle rom. Skilleveggens totale areal er 20 m^2. Oppgavene 43 – 45 omhandler denne skilleveggen. Vi antar stasjonære (tidsuavhengige) forhold.

43) La oss betegne absoluttverdien av temperaturgradienten, $|dT/dx|$ (dvs temperaturendringen pr lengdeenhet) i de tre materialtypene sponplate, gips og mineralull med henholdsvis S, G og M. Hva er korrekt rangering av temperaturgradienten i de ulike materialene?

Ved stasjonær endimensjonal varmeledning er varmestrømmen j konstant gjennom hele veggen. Dermed, siden $j = \kappa\Delta T/L = \kappa dT/dx$, vil temperaturgradienten være størst i det materialet som har minst varmeledningsevne κ. Dermed: M > S > G.

C) M > S > G

44) Luftlaget midt i veggen kan betraktes som en parallellkobling av to varmemotstander, R_σ grunnet stråling og R_κ grunnet varmeledning. (Vi ser her helt bort fra varmetap pga konveksjon.) Omtrent hvor stort er forholdet R_κ/R_σ for dette luftlaget? Vi betrakter mineralullen som et svart legeme. (Tips: $T_4^4 - T_3^4 \simeq 4T_3^3(T_4 - T_3) \simeq 4T_4^3(T_4 - T_3)$.)

Generelt gjelder for en varmemotstand at $R = \Delta T/P = \Delta T/jA$, dvs $j = (1/RA)\Delta T$. Her er $j_\sigma = \sigma(T_4^4 - T_3^4) \simeq \sigma \cdot 4T_L^3\Delta T$, med temperatur $T_L \simeq 288.5$ K i luftlaget midt i veggen. Med andre ord, stråling over luftlaget representerer en varmemotstand $R_\sigma = \sigma \cdot 4T_L^3/A$. Videre er $j_\kappa = (\kappa_\mathrm{L}/L)\Delta T$, som betyr at varmeledning over luftlaget representerer en varmemotstand $R_\kappa = L/\kappa_\mathrm{L}A$. Forholdet mellom de to varmemotstandene blir dermed

$$R_\kappa/R_\sigma = \sigma \cdot 4T_L^3 L/\kappa_\mathrm{L} = 5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 4 \cdot 288.5^3 \cdot 0.02/0.026 \simeq 4.$$

D) ca 4

45) Det oppgis at luftlaget midt i veggen har en varmemotstand

$$R_\mathrm{L} = \left(R_\sigma^{-1} + R_\kappa^{-1}\right)^{-1} \simeq 0.15 \text{ K/W}$$

pr kvadratmeter skillevegg. Hvor mye varmeenergi overføres da pr døgn gjennom hele skilleveggen på 20 kvadratmeter, fra studentenes leilighet til pensjonistenes leilighet?

Veggen er en seriekobling av 7 varmemotstander: S+G+M+L+M+G+S. Utregnet pr m^2 vegg, for 200 mm mineralull: $R_M = 0.200/0.035 = 5.71$ K/W. 24 mm sponplate: $R_S = 0.024/0.12 = 0.20$ K/W. 26 mm gipsplate: $R_G = 0.026/0.25 = 0.10$ K/W. Totalt: $R = 0.15+5.71+0.20+0.10 = 6.16$ K/W. Overført varmeeffekt pr m^2 vegg: $P = \Delta T/R = 13/6.16 = 2.11$ W. Overført varmeeffekt gjennom 20 m^2 vegg: $2.11 \cdot 20 = 42.2$ W. Overført varmeenergi i løpet av 24 timer: $42.2 \cdot 24 = 1013$ Wh = ca 1 kWh. (Her ville vi ikke ha bommet med mer enn ca 7% hvis vi kun hadde tatt de 200 mm med mineralull i betraktning.)

C) ca 1 kWh

I en reversibel Carnot-varmekraftmaskin med 3.00 mol ideell gass som arbeidssubstans utvider gassen seg isotermt ved temperatur 1000 K fra et volum $V_0 = 0.100$ m^3 til et dobbelt så stort volum. Den isoterme kompresjonen finner sted ved 400 K. Oppgavene 46 – 50 omhandler denne varmekraftmaskinen.

46) Hvor stort arbeid W utføres av gassen under den isoterme utvidelsen?

$$W = \int_{V_0}^{2V_0} p(V)\,dV = nRT_2 \ln 2 = 3.00 \cdot 8.314 \cdot 1000 \cdot \ln 2 = 17.3 \cdot 10^3 \text{ J} = 17.3\,\text{kJ}.$$

E) 17.3 kJ

47) Hva er varmekraftmaskinens virkningsgrad?

$\eta = \eta_C = 1 - T_1/T_2 = 1 - 400/1000 = 0.60.$

B) 0.60

48) Arbeidssubstansen er en gass med adiabatkonstant 1.398. Hva er gassens maksimale volum i den beskrevne kretsprosessen?

Gassen har maksimalt volum etter den adiabatiske utvidelsen (og avkjølingen) fra tilstanden med temperatur $T_2 = 1000$ K og volum $V_2 = 0.200$ m^3. I en adiabatisk prosess (med ideell gass) er $TV^{\gamma-1}$ en konstant. Dermed er $T_2 \cdot (2V_0)^{0.398} = T_1 \cdot V_{\max}^{0.398}$, eller

$$V_{\max} = 2V_0 \cdot (T_2/T_1)^{1/0.398} = 0.200 \cdot 2.50^{1/0.398} = 2.00\,\text{m}^3.$$

D) 2.00 m^3

49) Hva er (omtrent) det maksimale trykket i gassen i den beskrevne kretsprosessen?

Vi har maksimalt trykk når volumet er 0.100 m^3 og temperaturen 1000 K: $p_{\max} = nRT_2/V_0 = 3.00 \cdot 8.314 \cdot 1000/0.100 = 2.49 \cdot 10^5$ Pa, eller ca 2.5 atm.

A) ca 2.5 atm

50) Hva er entropiendringen i gassen i den isoterme kompresjonen ved 400 K?

Her kan man gå fram på flere vis. Vi kan f eks ta utgangspunkt i den termodynamiske identitet, $TdS = dU + pdV$, som med $dU = 0$ langs en isoterm med ideell gass gir $dS = pdV/T = nRdV/V$. De adiabatiske delprosessene foregår uten utveksling av varme, og dermed uten entropiendring i gassen. Dermed må gassens entropi reduseres like mye i den isoterme kompresjonen ved 400 K som den øker i den isoterme utvidelsen ved 1000 K:

$$\Delta S_1 = -\Delta S_2 = -nR\ln 2 = -3.00 \cdot 8.314 \ln 2 = -17.3\,\mathrm{J/K}.$$

A) -17.3 J/K