TFY4106 - Oppsummering

Klassisk dynamikk

$\vec{v} = d\vec{r}/dt, \quad \vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$

$d\vec{r} = \vec{v}\,dt, \quad d\vec{v} = \vec{a}\,dt$

Sirkelbevegelse:

$d\varphi = ds/r, \quad \omega = d\varphi/dt, \quad \alpha = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$

$v = ds/dt = r\,d\varphi/dt = r\omega$

$a_\perp = -\omega^2 r = -v^2/r, \quad a_\parallel = dv/dt = r\,d\omega/dt = r\alpha$

$T = 2\pi r/v, \quad f = 1/T, \quad \omega = 2\pi/T = 2\pi f$

Newtons Lover:

N1: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$

N2: $\vec{F} = m\vec{a} = m\,d\vec{v}/dt = d\vec{p}/dt$ [Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$]

N3: $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Gravitasjon: $F = \dfrac{GmM}{r^2}$; G = gravitasjonskonstanten

Tyngde: $F = mg$; $g = G \cdot M/R^2 = 9.81\ m/s^2$ på jordas overflate

Kontaktkrefter: Normalkraft, Snordrag, Friksjon

Tørr friksjon: Statisk: $f \leq \mu_s N$; Kinetisk: $f = \mu_k N$

Våt friksjon: Laminær strømning: $\vec{f} = -kv\hat{v}$

Turbulent —"— : $\vec{f} = -Dv^2\hat{v}$

Arbeid: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ Effekt: $P = dW/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$

Kinetisk energi: $K = \frac{1}{2}mv^2$

Konservativ kraft: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Potensiell energi: $U(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ (kons. kraft $\vec{F}$)

Mekanisk energi, $E = K + U$, er bevart i kons. system

Friksjonsarbeid: $W_f = \int \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$ ($\vec{f}$ ikke kons.)

Impuls: $\vec{p} = m\vec{v}$. Hvis ytre $\vec{F} = 0$, er $\vec{p}$ = konstant (N1)

$$\Delta\vec{p} = \int \vec{F} \cdot dt \quad (\text{da } \vec{F} = d\vec{p}/dt;\ \text{N2})$$

Kollisjoner: $\Delta\vec{p} = 0$ hvis $\vec{F}_{ytre} = 0$

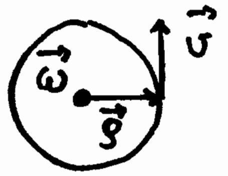
Elastisk: $\Delta K = 0$ Uelastisk: $\Delta K < 0$ Fullstendig uelastisk: $\max|\Delta K|$

Massesenter: $\vec{R}_{CM} = \int \vec{r}\, dm / \int dm = \int \vec{r}\, dm / M$ ($\approx$ Tyngdepunkt)

Tyngdepunktbevegelse: $M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}$

Rotasjon:

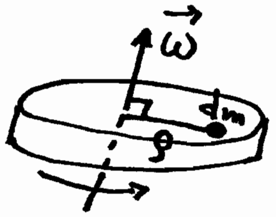
Vinkelhastighetsvektor: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$



($\vec{\omega}$ opp)

Rotasjonsenergi: $K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$

Treghetsmoment: $I = \int \rho^2\, dm$



Stivt legeme: $K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$

mhp akse gjennom CM

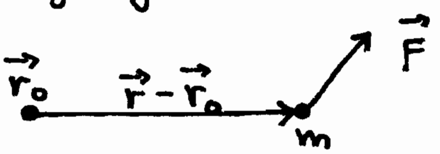
Steiners sats: $I = I_0 + M d^2$

Ren rulling: $V = \omega R$, $A = \alpha R$ (rullebetingelser)

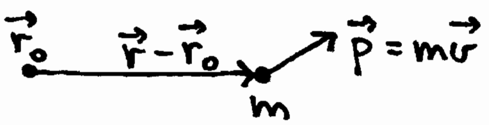
Sluring: Relativ hastighet i kontaktpunktet $v = V - \omega R \neq 0$

$\Rightarrow$ effekttap $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$ pga friksjon

Dreiemoment: $\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$



Dreieimpuls: $\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p}$



N2 for rotasjon: $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt$ ("spinnsatsen")

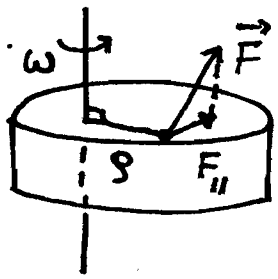
Arbeid ved rotasjon: $dW = \tau \, d\varphi$; Effekt: $P = \tau\omega$

Stivt legeme: $\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$

N2, rotasjon om fast akse:

$\tau = I \frac{d\omega}{dt}$; $\tau = F_{\parallel} \cdot \rho$

$I = \int \rho^2 \, dm$



$(F_{\parallel} \perp \rho)$

Bevaringslover:

- For isolert system er total energi, impuls og dreieimpuls bevart.
- For konservativt system er mekanisk energi, $E = K + U$, bevart.
- Når netto $\vec{F}_{ytre}$ er null, er impuls $\vec{p}$ bevart.
- Når netto $\vec{\tau}_{ytre}$ er null, er dreieimpuls $\vec{L}$ bevart.

Mekanisk likevekt (Statikk):
Stivt legeme er i ro, $\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$, bare hvis netto $\vec{F}_{ytre} = 0$ og netto $\vec{\tau}_{ytre} = 0$.

Svingninger

Harmonisk oscillator:

$F = -kx$ (Hookes lov) $\overset{N2}{\Rightarrow}$ $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ med $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$T = 2\pi/\omega_0 = 1/f$

$K = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, $U = \frac{1}{2}kx^2$, $E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$ = konstant

Med friksjon $f = -b\dot{x}$: $x(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \varphi)$ $(\gamma < \omega_0)$

$\gamma = b/2m$; $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$

$x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$ $(\gamma > \omega_0)$

$\alpha_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$

Tvungen svingning: $F_{ytre} = F_0 \cos \omega t$

Resonans: $x(t) = x_p(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi)$ $[x_h \approx 0$ når $\gamma t \gg 1]$

$$A(\omega) = \frac{F_0}{m}\left\{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\right\}^{-1/2}$$

$\Delta\omega = 2\gamma$ = halvverdibredde

$Q = \omega_0/\Delta\omega$ = Q-faktor

Matematisk pendel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$; $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ (små utsving)

Fysisk pendel: $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$; $\omega_0 = \sqrt{mgd/I}$ (små utsving)

Bølger

Transversal: partiklene svinger $\perp$ forplantningsretningen

Longitudinal: ——"—— $\parallel$ ——"——

Harmonisk bølge: $y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t)$

$k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi/T$, $v = \lambda/T = \omega/k$, $f = 1/T = v/\lambda$

Transv. bølge på streng: $v = \sqrt{S/\mu}$

Longit. bølge i fluid (lyd!): $v = \sqrt{B/\rho}$

Lydbølge i tynn stang: $v = \sqrt{E/\rho}$

Lydbølge i bulk faststoff: $v_p = \sqrt{(B + 4G/3)/\rho}$ (Longit.)

$v_s = \sqrt{G/\rho}$ (transv.)

$E = (F/A)/(\Delta L/L_0)$

$B = -(\Delta F/A)/(\Delta V/V_0) = -\Delta p/(\Delta V/V_0)$

$G = (F/A)/(\Delta x/L) = (F/A)/\tan\theta$

Bølgeligning: $\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$; $\xi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$

Energitetthet, transv. bølge på streng: $\varepsilon = \mu v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ (J/m)

——"——, plan lydbølge: $\varepsilon = \rho v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2$ (J/m³)

Midlere energitetthet i harmoniske bølge:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} \varepsilon(x,t)\,dx \quad ; \quad \langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{T}\int_0^{T} \varepsilon(x,t)\,dt$$

Intensitet: I = overført effekt pr flateenhet $= \frac{\bar{P}}{A} = \bar{\varepsilon}\cdot v$

Desibelskalaen: $\beta = \#\,dB = 10\log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$; $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$

Kulebølge: $I(r) \sim 1/r^2$ Sylinderbølge: $I(r) \sim 1/r$ Plan bølge: I = konst.

Stående bølger:

Streng med to faste eller to fri ender: $\lambda_n = 2L/n$ $(n = 1,2,3,\dots)$

Streng med en fast og en fri ende: $\lambda_n = 4L/(2n-1)$ (—"—)

Tilsvarende for lydbølge i tynt rør.

Grunntone: $n=1$. Overtoner: $n = 2,3,\dots$

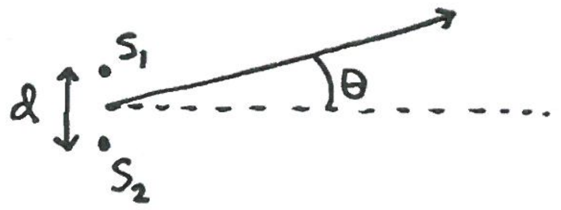
Dopplereffekt: $f_O = \frac{v + v_m - v_O}{v + v_m - v_S}\cdot f_S$ [O: observatør, S: kilde, m: medium]

Svevning: $I(t) \sim 1 + \cos(\Delta\omega\cdot t)$; $\Delta\omega = 2\pi|f_1 - f_2| = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_s}$

Interferens: Max intensitet der bølgene er i fase.

Min —"— —"— i motfase.

Retningsavhengig interferens:



max I for $d\cdot\sin\theta = n\cdot\lambda$

min I for $d\cdot\sin\theta = (n+\frac{1}{2})\cdot\lambda$

$(n = 0,1,2,\dots)$

Gruppehastighet: $v_g = d\omega/dk$ = felleshastigheten til en bølgepakke

Overflatebølger på vann:

Dypt vann: $\omega(k) = \sqrt{gk + \gamma k^3/\rho}$; γ = overflatespenning = 0.073 N/m

ρ = tetthet = 1000 kg/m^3

Tyngdebølger: $gk \gg \gamma k^3/\rho$. Kapillærbølger: $\gamma k^3/\rho \gg gk$

Tyngdebølger generelt: $\omega(k) = \sqrt{gk\tanh(kD)}$; D = vanndybden

Termisk fysikk

Trykk: $p = dF/dA$; $d\vec{F} = -p\, d\vec{A}$

Termisk likevekt: $T_A = T_B$ (T = temperatur)

Absolutt temperatur: $T = 0\,K$ tilsvarer $-273.15\,°C$

$\Delta T = 1K$ —"— $\Delta T = 1°C$

Standardreferanse: Trippelpunkt for H_2O, $p_t = 612\,Pa$, $T_t = 273.16\,K$

Ideell gass tilstandsligning: $pV = nRT$ ($pV = Nk_BT$)

Avogadros tall: $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ = antall molekyler i 1 mol

Gasskonstanten: $R = 8.314\ J/mol \cdot K$

Boltzmanns konstant: $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}\ J/K$

$\left.\right\} R = N_A \cdot k_B$

Prosess: Endring i systemets tilstandsvariable

Isoterm: T = konst. Isobar: p = konst. Isokor: V = konst.

Termiske koeffisienter:

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p ; \quad \alpha = \frac{1}{L}\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{3}\beta ; \quad \gamma = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V ;$$

$$\kappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = B^{-1}$$

Varme: Energioverføring pga ΔT

Arbeid: Andre former for energioverføring

Varmekapasitet: $C = \Delta Q / \Delta T$; $C_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_p$; $C_V = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_V$

Spesifikke varmekap: $c = C/M$ = varmekap. pr masseenhet

$c_m = C/n$ = molar varmekap.

Koeksistenslinjer: Likevekt mellom to faser (tre i trippelpunkt). Markerer faseovergang (smelting/frysing, fordamping/kondensasjon, sublimasjon/deposisjon).

Latent varme: L = påkrevd varme for å smelte, fordampe eller sublimere stoffet ved gitt T ($\Delta T = 0$). Varmen avgis ved frysing, kondensasjon eller deposisjon.

Clapeyrons ligning for koeksistenslinjene: $\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T \cdot \Delta V}$

Damptrykk-kurven: $p_d(T) = p_d(T_0) \exp\left\{\frac{\ell}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right\}$

ℓ = molar latent varme

$T_0,\ p_d(T_0)$ = valgt ref. punkt (f.eks. p_t, T_t)

Relativ luftfuktighet: $\phi = 100\% \cdot p_{H_2O} / p_d$

Varmetransport:

Konveksjon: Strømning, vind ⇒ mer effektiv varmeoverføring

Varmeovergangstall α: $j = -\alpha \cdot \Delta T$

j = overført varmeeffekt pr flateenhet (W/m^2)

Ute (med "midlet vind"): $\alpha_u \approx 25\ W/m^2 \cdot K$

Inne (vindstille) : $\alpha_i \approx 7.5$ —"—

"Perfekt kobling" : $\alpha \to \infty$

Varmeledning (stasjonært, 1D): $j = -\varkappa \cdot \frac{\Delta T}{a}$

$\varkappa$ = materialets varmeledningsevne ($W/m \cdot K$)

a = —"— tykkelse

Fouriers lov: $j_x = -\varkappa \cdot dT/dx$

Seriekobling av varmemotstander: $\Delta T = -\left(\sum_j \frac{a_j}{\varkappa_j A}\right) \cdot P$; $P = j \cdot A$

Parallellkobling —"—: $\Delta T = -\left[\sum_j \frac{\varkappa_j A_j}{a_j}\right]^{-1} \cdot P$

Stråling: $j = \sigma T^4$; $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ (svart legeme, $e = a = 1$)

Reelt legeme: $j = e \cdot \sigma T^4$; e = emissiviteten ≤ 1

Plancks fordelingslov:

$$j(T) = \int_0^\infty (dj/df)\,df \; ; \quad \frac{dj}{df} = \frac{2\pi h f^3 / c^2}{\exp[hf/k_B T] - 1}$$

$$j(T) = \int_0^\infty (dj/d\lambda)\,d\lambda \; ; \quad \frac{dj}{d\lambda} = \frac{2\pi h c^2 / \lambda^5}{\exp[hc/\lambda k_B T] - 1}$$

Wiens forskyvningslov: Max $\frac{dj}{d\lambda}$ for $\lambda \cdot T = 2.90 \cdot 10^{-3}$ m·K

Kinetisk gassteori (Mikroskopisk tolkning av p og T):

$p = \frac{2N}{3V} \langle K \rangle_{trans}$; $\langle K \rangle_{trans}$ = midlere kinetisk translasjonsenergi pr molekyl

$\Rightarrow k_B T = \frac{2}{3} \langle K_{trans} \rangle$

Middelhastigheter: $\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$

$$\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle = 3 k_B T / m$$

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3 k_B T / m}$$

Arbeid (utvidelse av gass): $dW = p\,dV \Rightarrow W$ er arealet under $p(V)$

Isobar utvidelse: $W = p(V_2 - V_1)$

Isoterm —"— : $W = N k_B T \ln(V_2 / V_1)$

Indre energi: U = systemets energi

Ideell gass: $U = U(T) = N \cdot \langle K \rangle$

Atomær gass: $U = \frac{3}{2} N k_B T$; 2-atomig: $U = \frac{5}{2} N k_B T$

1. hovedsetning: $\Delta Q = \Delta U + \Delta W$ (energibevarelse)

C_p og C_V for ideell gass: $C_p - C_V = nR = Nk_B$

Atomær: $C_V = \frac{3}{2} nR$ Toatomig: $C_V = \frac{5}{2} nR$

Adiabatisk prosess: $dQ = 0 \Rightarrow dU = -dW$

$$pV^{\gamma} = \text{konst.} \; ; \; TV^{\gamma-1} = \text{konst.} \; ; \; pT^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{konst.}$$

Adiabatkonstanten: $\gamma = C_p / C_V > 1$

Luft: $\gamma \approx 1.4$ Edelgasser: $\gamma \approx 1.67$

Lydfart i gasser: $v = \sqrt{\gamma k_B T / m}$

Kretsprosess:

$\Delta U = 0$

$\Delta Q = \Delta W$ (> 0 med klokka)

Carnotprosess: To isotermer ($T_2 > T_1$; $Q_2 > 0$; $Q_1 < 0$), to adiabater ($Q = 0$).

$$W = Q_1 + Q_2 \; ; \quad Q_1 = -Q_2 \cdot T_1 / T_2$$

$$\Rightarrow W_c = Q_2 (1 - T_1/T_2)$$

Varmekraftmaskin: Tilfører varme Q_2, får utført arbeid W.

Virkningsgrad: $\eta = W/Q_2$

$\Rightarrow \eta_c = 1 - T_1/T_2$

Reell varmekraftmaskin: $\eta < \eta_c$ alltid

Kjøleskap/Varmepumpe:

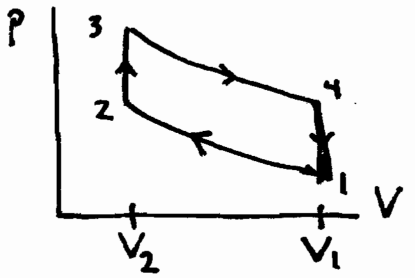
Gjør arbeid W på systemet ("arbeidssubstansen"), overfører varme (Q_1) (delvis) fra kaldt til varmt reservoar (Q_2)

Effektfaktor: $\varepsilon_K = |Q_1/W|$, $\varepsilon_V = |Q_2/W|$

Med Carnotprosess: $\varepsilon_K^c = \dfrac{T_1}{T_2 - T_1}$, $\varepsilon_V^c = \dfrac{T_2}{T_2 - T_1}$

Reelle kjølemaskiner: $\varepsilon_K < \varepsilon_K^c$; $\varepsilon_V < \varepsilon_V^c$

Otto-syklus: Reversibel idealisering av bensinmotor



$Q_{23} > 0$

$Q_{41} < 0$

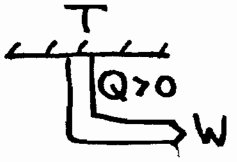
$(Q_{12} = Q_{34} = 0)$

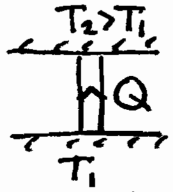
$\eta_0 = 1 - \varkappa^{1-\gamma}$

$\varkappa = V_1/V_2$

= kompresjonsforholdet

2. hovedsetning:

Kretsprosessen  er umulig (Kelvin)

——— " ———  er umulig (Clausius)

Entropi: $dS = dQ/T$; $\oint dS = 0$ (tilstandsfunksjon!)

$\Rightarrow$ Termodyn. identitet for <u>reversible</u> prosesser: $T\,dS = dU + p\,dV$

Rev. adiabatisk prosess: $\Delta S = 0$

Isoterm utvidelse: $dS = (p/T)\,dV \overset{\text{ideell}}{\underset{\text{gass}}{=}} N k_B\, dV/V$

Prinsippet om entropiens økning: $\Delta S \geq 0$ i termisk isolert system

Boltzmanns prinsipp: $S = k_B \ln \Omega$; Ω = antall mikrotilstander konsistent med den gitte makrotilstand