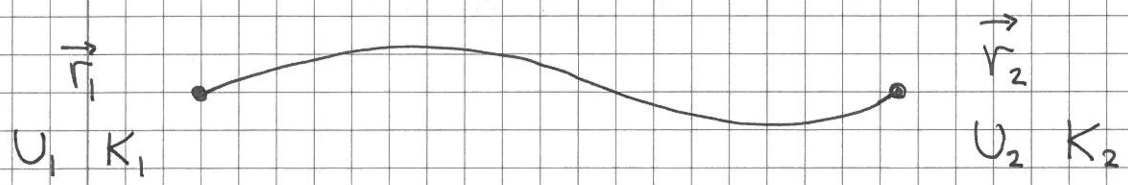
Mekanisk energibevarelse [YF 7.1–7.3; LL 4.5]

Anta et konservativt system.



$$U_1 - U_2 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \qquad (\text{vilkårlig } \vec{r}_0)$$

$$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$

Dvs: Total mekanisk energi,

$$E = K + U$$

er konstant (bevart)

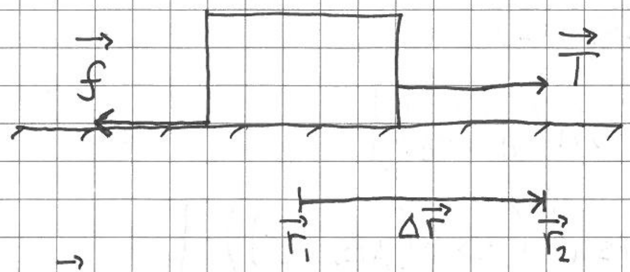
i et konservativt system.

Tyngdekraften er konservativ.

Friksjonskrefter er <u>ikke</u> konservative.

(Men coulombkraften <u>er</u> konservativ!)

Friksjonsarbeid [YF 7.3 ; LL 4.5]



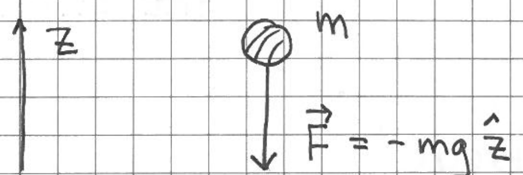
$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f}\cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{fordi } \vec{f} \text{ alltid rettet } \underline{\text{mot}} \; d\vec{r}$$

$\Rightarrow$ mekanisk energi omdannes til varme (og lyd)

$$\vec{f}\cdot d\vec{r} < 0 \;\; \text{alltid} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{f}\cdot d\vec{r} < 0 \;\; \text{alltid}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{f} \text{ er } \underline{\text{ikke}} \text{ konservativ}$$

Eks 1: Fall i tyngdefeltet (bordtennisball)



- Anta $U(0) = 0$ og $v(0) = 0$
- Finn $U(z)$ og $v(z)$ $(z<0)$
- Vurder effekt av luftmotstand

Løsn: Neglisjerer først luftmotstand $\left(\vec{f} = -Dv^2\hat{v} = Dv^2\hat{z}\right)$

$$U(z) = -\int_0^z \underbrace{(-mg\,\hat{z})}_{\vec{F}}\cdot\underbrace{(\hat{z}\,dz)}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{mg\,z}}$$

Konservativ $\vec{F} \Rightarrow E = U + K$ er bevart

$$\Rightarrow U(z) + K(z) = U(0) + K(0) = 0$$

$$\Rightarrow mgz + mv(z)^2/2 = 0$$

$$\Rightarrow v(z) = \underline{\underline{\sqrt{-2gz}}} \qquad (z<0)$$

Med luftmotstand, $\vec{f} = -Dv^2\hat{v}$, med

$D = \frac{1}{2} C A \rho \approx \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot \pi \cdot (0.020\,m)^2 \cdot 1.3\,kg/m^3 \approx 4 \cdot 10^{-4}\,kg/m$

Maksimal hastighet ("terminalhastighet") når

$\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow D \cdot v_t^2 = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{mg/D}$

Bordtennisball: $m = 2.7g \Rightarrow v_t = \sqrt{0.0027\,kg \cdot 9.8\,\frac{m}{s^2} / 4 \cdot 10^{-4}\,kg/m}$

$\approx \underline{8\,m/s}$

Anta at ballen slippes 5 m over bakken og at $v = v_t$ på bakken. ($v_{fri} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 5}\,m/s \approx 10\,m/s$)

Bestem friksjonsarbeidet $|W_f|$.

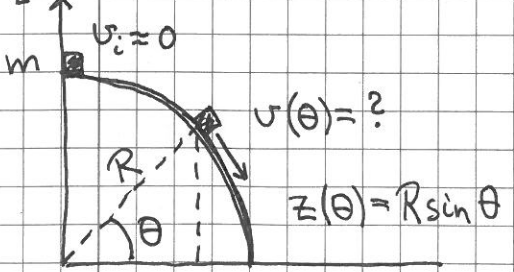
Løsn: $|W_f| = E_i - E_f$ (energien er bevart totalt sett!)

$= mgh - \frac{1}{2} m v_t^2$

$= 0.0027\,kg \cdot \left(9.8\,\frac{m}{s^2} \cdot 5m - \frac{1}{2} \cdot 8^2\,m^2/s^2\right)$

$= \underline{\underline{0.046\,J}}$ ($\approx 35\%$ av E_i)

Eks 2: Glatt kuppel



Løsning: Anta $U(0) = 0 \Rightarrow E = mgR$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v(\theta)^2 + mgz(\theta) = mgR$

$\Rightarrow \underline{\underline{v(\theta) = \sqrt{2gR(1-\sin\theta)}}}$

Med økende kompleksitet:

- Hvor mistes kontakten med underlaget? [Øv3/1d]
- Hvordan ta hensyn til friksjon?
- Hva med objekter som ruller og "skurer"?

Impuls [YF 8 ; LL 5]

= bevegelsesmengde = (linear) momentum

N2 : $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$ når m = konstant

impuls = masse · hastighet

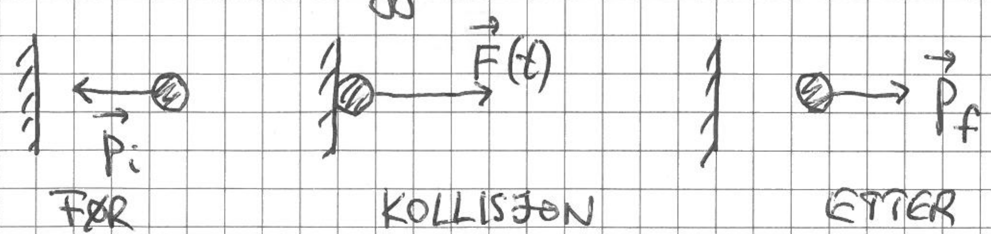
$\vec{p} = m\vec{v}$

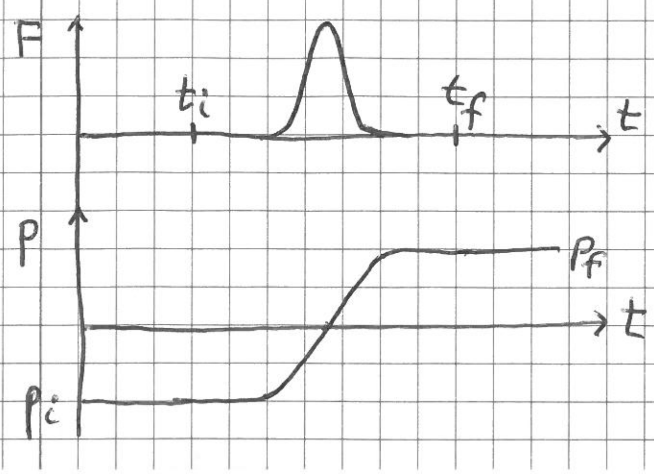
$[p] = \text{kg m/s}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F} = d\vec{p}/dt} \quad$ N2

> Impulsbevarelse : hvis $\Sigma \vec{F}_{ytre} = 0$, er legemets (evt systemets) impuls bevart

Eks: Ball mot vegg





Ballens impulsendring:

$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$

$= \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p}$

$= \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt$

Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5.3]

Elastisk støt: $\Delta K = 0$; mek. energi bevart

Uelastisk –"–: $\Delta K < 0$; –"– ikke bevart

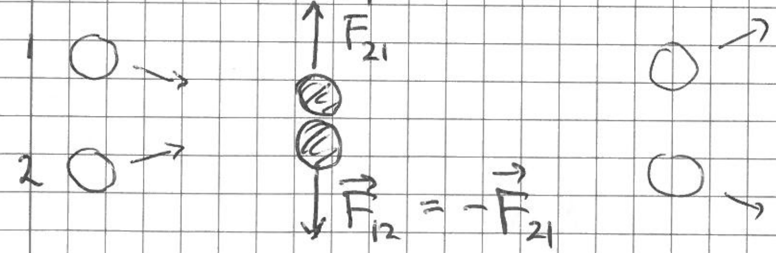
[Typisk kortvarige støt $\Rightarrow \Delta U = 0$]

Fullstendig uelastisk støt:

Sammen-hengende legemer med felles hastighet etter kollisjonen; gir max energitap $|\Delta K|$

Tapt mek. energi → deformasjon, varme, lyd

Indre krefter endrer ikke systemets totale impuls:



N2 og N3 $\Rightarrow \vec{F}_{21} = d\vec{p}_1/dt = -d\vec{p}_2/dt = -\vec{F}_{12}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d}{dt}\vec{p}_{total} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{total} = \text{konst.}$$

$\Rightarrow$ Hvis $\vec{F}_{ytre}$ kan neglisjeres, er $\vec{p}_{total}$ bevart

Ofte store krefter i sving i kortvarige kollisjoner.

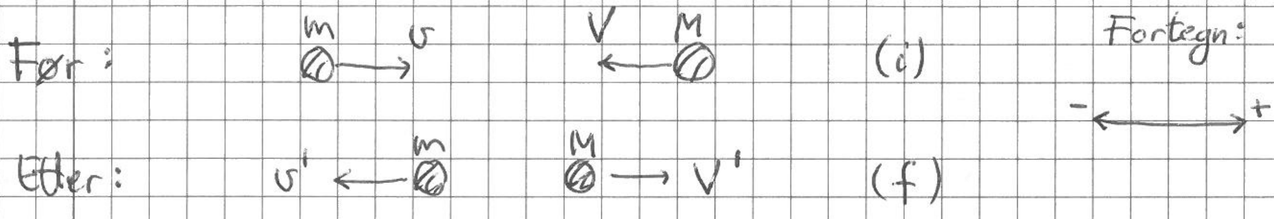
Eks: Bordtennisball, $v_i = -10$ m/s, $v_f = +30$ m/s,
$\Delta t = 1$ ms

$$\Rightarrow F_{slag}/G \approx \frac{m\,\Delta v/\Delta t}{mg} = \frac{40\text{ m/s} / 10^{-3}\text{ s}}{10\text{ m/s}^2} = \underline{4000}$$

$\Rightarrow$ Helt OK å se bort fra G (ytre kraft!) i slaget!

Sentralt støt

[YF 8.2–8.4 ; LL 5.3]



$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mv + MV}_{p_i} = \underbrace{mv' + MV'}_{p_f}$$

(a) Fullstendig uelastisk: $v' = V' = \dfrac{mv + MV}{m+M}$

(b) Delvis uelastisk: Har 1 lign. ($\Delta p = 0$) for 2 ukjente (v', V') $\Rightarrow$ Trenger 1 opplysning til.

(c) Elastisk, $\Delta K = 0$: $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$

$$\Rightarrow m(v+v')(v-v') = M(V'+V)(V'-V) \qquad (1)$$

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \quad m(v-v') = M(V'-V) \qquad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \quad v + v' = V' + V \qquad (3)$$

$M \cdot (3) - (2)$ gir

$$v' = \frac{M}{m+M}\left(2V + v\,\frac{m-M}{M}\right)$$

og dermed (pga "symmetri" $m \leftrightarrow M$, $v \leftrightarrow V$)

$$V' = \frac{m}{M+m}\left(2v + V\,\frac{M-m}{m}\right)$$

Eks: Ball mot vegg, elastisk støt

Løsn: $v' = \frac{M}{m+M}\left(0 + v\,\frac{m-M}{M}\right) \approx \frac{M}{M}\cdot v \cdot\left(-\frac{M}{M}\right) = -v$

$$V' = \frac{m}{M+m}\left(2v + 0\right) \approx \frac{m}{M}\cdot 2v \approx 0$$

Impuls: $p = mv$, $P = MV = 0$, $p' = mv' = -mv$,

$$P' = MV' \approx M\cdot\frac{m}{M}\cdot 2v = 2mv$$

$$\Rightarrow \Delta p = (p'+P') - (p+P) = -mv + 2mv - mv = \underline{\underline{0}} \quad (\text{OK})$$

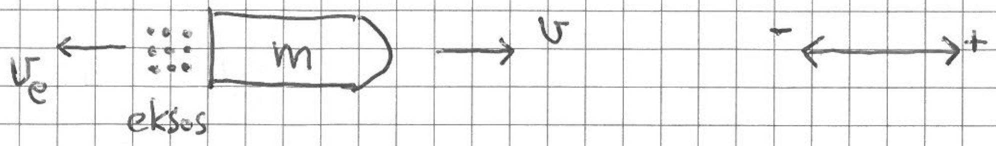
Energi: $K_m = \frac{1}{2}mv^2$, $K_M = 0$, $K_m' = \frac{1}{2}mv^2$,

$$K_M' = \frac{1}{2}MV'^2 = \frac{1}{2}M\left(\frac{m}{M}2v\right)^2 = 2\frac{m}{M}mv^2 \approx 0$$

$$\Rightarrow \Delta K = (K_m' + K_M') - (K_m + K_M)$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \underline{\underline{0}} \quad (\text{OK})$$

Rakettprinsipp [YF 8.6 ; LL 5.4]



$\frac{dm}{dt}$ = rakettens masseendring pr tidsenhet ; $\frac{dm}{dt} < 0$

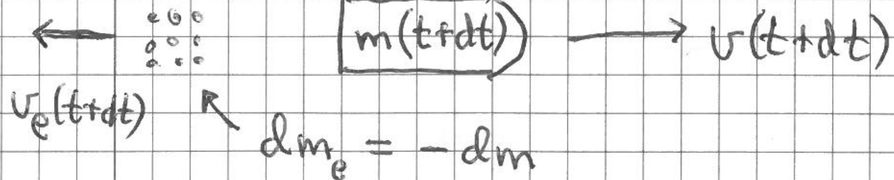
u = eksosens hastighet relativt raketten ; $u < 0$

v_e = ———"——— et fast referansesystem

$\Longrightarrow \quad v_e = u + v$

Anta først $F_{ytre} = 0$ og bruk impulsbevarelse mellom tid t og $t + dt$ til å finne sammenheng mellom u og dm/dt, og rakettens akselerasjon $a = dv/dt$:

$$p(t) = m(t)\,v(t)$$



$$p(t+dt) = m(t+dt) \cdot v(t+dt) + dm_e \cdot v_e(t+dt)$$

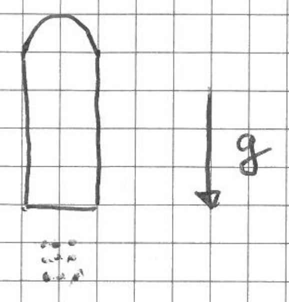
$$= [m(t) + dm] \cdot [v(t) + dv] - dm \cdot [u + v(t) + dv]$$

$$= p(t) + \underbrace{m(t)\,dv - u\,dm}_{=0 \quad (\text{når } p(t+dt) = p(t))}$$

$$\Rightarrow \quad m \cdot \frac{dv}{dt} = u \cdot \frac{dm}{dt} = u\dot{m}$$

dvs $F_{skyv} = m \cdot a$ med $F_{skyv} = u\dot{m} > 0$

I tyngdefeltet:



$F_{ytre} = -mg$

$\Rightarrow$ N2 for (rest-)raketten blir $F = ma$

med total kraft

$$F = F_{skyv} + F_{ytre} = u\dot{m} - mg$$

[Øv.4/Oppg 3: $m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} - mg \Rightarrow \int dv = u \int \frac{dm}{m} - g \int dt$ etc.]

Til nå: I realiteten punktmasser.

I neste omgang: Partikkelsystemer. Stive legemer.