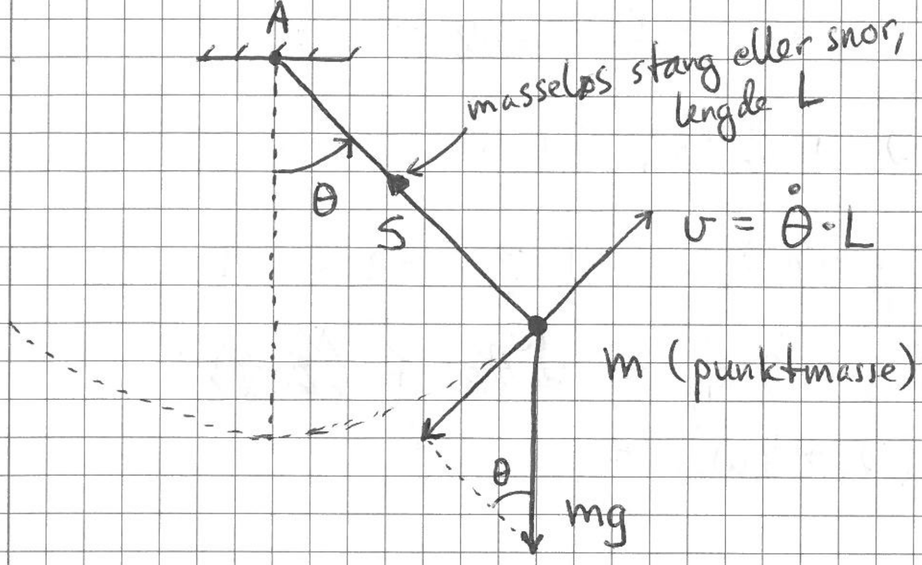
Matematisk pendel [YF 14.5; LL 9.6]



Er her interessert i bevegelsen ∥ sirkelbanen:

$$\left.\begin{aligned} F_{\parallel} &= -mg\sin\theta \\ a_{\parallel} &= \dot{v} = L\ddot{\theta} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad -mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0}$$

Hvis vi hele tiden har små utsving, $|\theta| \ll 1$, er $\sin\theta \approx \theta$, og vi har en enkel harmonisk oscillator:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{g/L}}$$

Med større utsving må $\theta(t)$ bestemmes numerisk.

Anta $\theta(0) = \theta_0$ og $v(0) = v_0$.

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{L} \Rightarrow d\theta = \frac{v}{L}\,dt \Rightarrow \Delta\theta \approx \frac{v}{L}\,\Delta t$$

$$\frac{dv}{dt} = a_{\parallel} \Rightarrow dv = a_{\parallel}\,dt \Rightarrow \Delta v = a_{\parallel}\,\Delta t = -g\sin\theta \cdot \Delta t$$

Dermed:

$$\theta(0) = \theta_0 \quad ; \quad v(0) = v_0$$

$$\theta(\Delta t) \approx \theta(0) + \frac{v(0)}{L}\Delta t \quad ; \quad v(\Delta t) \approx v(0) - g\sin\theta(0)\cdot\Delta t$$

$$\theta(2\Delta t) \approx \theta(\Delta t) + \frac{v(\Delta t)}{L}\Delta t \quad ; \quad v(2\Delta t) \approx v(\Delta t) - g\sin\theta(\Delta t)\cdot\Delta t$$

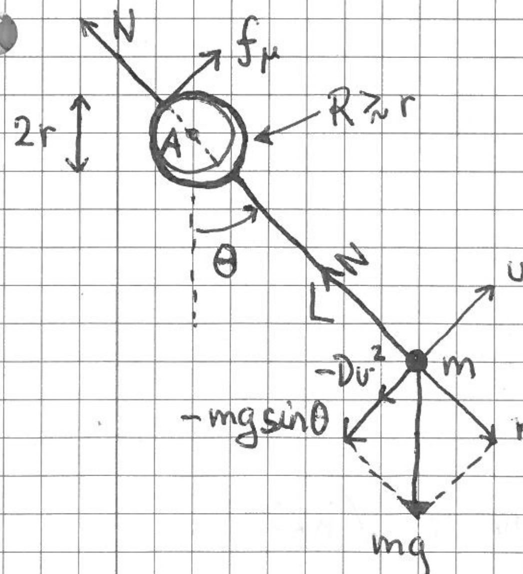
osv.

Dette er Eulermetoden ("Forward Euler"). "Rett linje" fra θ_n $(=\theta(n\cdot\Delta t))$ til θ_{n+1} og fra v_n til v_{n+1}

$\Rightarrow$ må typisk bruke et <u>lite</u> tidssteg Δt.

<u>Numerisk obligatorisk øving</u> <u>(skisse)</u>

- Tilnærmet matematisk pendel, masse m, lengde L
- Startbetingelser $v(0) = v_0$ og (f.eks.) $\theta(0) = \theta_0 = 0$
- Luftmotstand: $f_D = -Dv^2$ $\quad (D \sim 10^{-3} - 10^{-4}\ \text{kg/m})$
- Tynn pendelstang svinger rundt horisontal stang med radius r:



Friksjon mellom "pendelring" (radius $R \gtrsim r$) og horisontal stang (radius r):

$$f_\mu = \mu N$$

$\uparrow$ kinetisk friksjonskoeff

N2 $\perp$ sirkelbanen:

$$N - mg\cos\theta = m a_\perp = mv^2/L$$

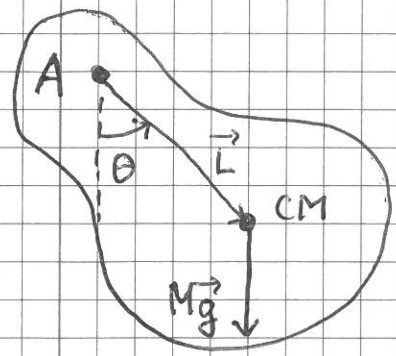
$$\Rightarrow N = m(g\cos\theta + v^2/L)$$

$$\Rightarrow f_\mu = \mu m(g\cos\theta + v^2/L)$$

N2, rotasjon om A: $\tau = I_A\ddot{\theta} = mL^2\ddot{\theta}$; $\tau = -mgL\sin\theta - Dv^2 L - f_\mu r$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta + \frac{Dv^2}{mL} + \frac{\mu r}{L^2}\left(g\cos\theta + v^2/L\right) = 0$$

Fysisk pendel [YF 14.6 ; LL 9.6]



Stivt legeme, masse M. Anta friksjonsfri svingning om akse gjennom A.

I = treghetsmoment mhp rot. aksen

$\vec{R}_{CM} = \vec{L}$; $\hat{A}$ = enhetsvektor ut av planet

Ytre krefter:

$\vec{F}_A$ = kraft fra aksling på legemet ; null arm mhp A

$\Rightarrow$ null dreiemoment mhp rot. aksen

$M\vec{g}$ = tyngdekraften, angriper i CM, arm $\vec{L}$ mhp rot. aksen

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{L} \times M\vec{g} \Rightarrow \vec{\tau} = -MgL\sin\theta\,\hat{A}$$

N2 for rot. om A gir nå $(\tau = I\ddot{\theta})$

$$-MgL\sin\theta = I\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{MgL}{I}\sin\theta = 0}$$

Med små utsving: $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \ ; \ \omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{I}}}$$

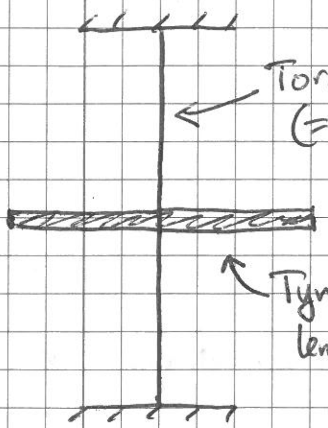
Fysisk pendel, små utsving

Steiners sats: $I = I_0 + ML^2$; I_0 = tregh.mom. mhp CM

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{MgL}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ML^2}{MgL}}$$

- Ser at $T \to \infty$ når $L \to 0$, som ventet
- Matem. pendel: $I_0 = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{g/L}$; OK!

Torsjonspendel [YF 14.4 ; LL 9.6]



Hookes lov: Tråden motvirker vridning og virker på pendelen med dreiemoment prop. med vridn.vinkelen:

$$\boxed{\tau = -\kappa\theta}$$

der κ = torsjonsstivheten

($LL: \tau = -\Gamma\theta$)

N2 for rot. om trådens akse: $\tau = I_0 \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow \quad -\kappa\theta = I_0\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \;; \quad \omega_0 = \sqrt{\kappa / I_0}}$$

Svingeperiode: $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{I_0/\kappa}$

Enheter: $[\kappa] = [\tau] = N\cdot m = kg\,m^2/s^2$

$[I_0] = kg\,m^2$

$\Rightarrow [\sqrt{I_0/\kappa}] = s$; OK

Exp: Mål M, L og T og beregn κ!

$$\kappa = 4\pi^2 I_0/T^2 = \underline{\underline{\frac{\pi^2 ML^2}{3T^2}}}$$

Tallverdier: $M = 50g$; $L = 11cm$; $T = 0.8s$

$$\Rightarrow \kappa \approx \underline{\underline{3\cdot 10^{-3}\ Nm}}$$

[NB: Oppga for ~~st~~ liten L på forelesning!!]

BØLGER [YF 15, 16, 11.4 ; LL 10, 7.2]

Bølge = forplantning av forstyrrelse fra likevekt
(f.eks. svingning)

Masse (partikler) svinger, men forplanter seg <u>ikke</u>

Energi (og impuls) svinger og forplanter seg med bølgen.

Transversal (T) bølge: partikler svinger ⊥ bølgens forplantn. retn.

Longitudinal (L) —"— : ——"—— —— || ——"——

Eks:

Streng/Fjær: T-utsving av streng-/fjærelementer

Lyd: L-utsving av molekylene i mediet

Overflatebølger (f.eks vann): T+L-utsving av vannet

Lys, Elektromagn. bølger: Elektrisk felt $\vec{E}$ og magnetfelt $\vec{B}$ svinger $\perp$ forpl. retn.

Bølgefenomener:

Dopplereffekt. Interferens (Diffraksjon).

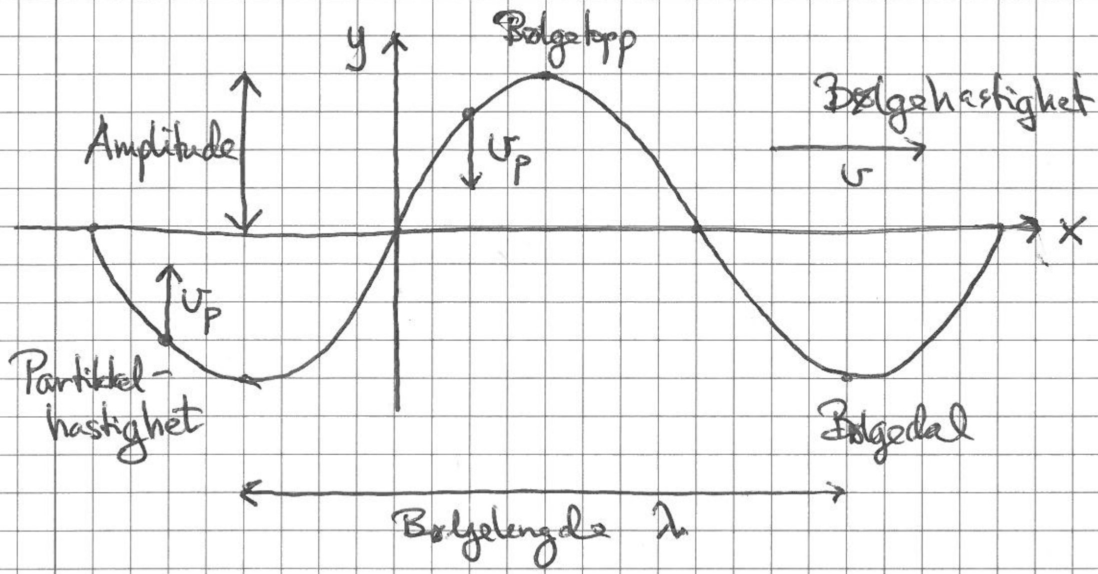
Stående bølger, resonans.

Brytning. Dispersjon → Regnbue etc.

Sjokkbølger.

Harmonisk bølge [YF 15.2, 15.3; LL 10.2]

Anta T-bølge på (∞ lang) streng,
$y(x,t)$ = utsving fra likevekt ($y=0$) å pos. x ved tid t



T = periode = tiden det tar for bølgemønsteret å bevege seg en bølgelengde λ

$\Rightarrow$ Bølgehastighet : $v = \lambda / T$ (= "fasehastighet")

f = frekvens = antall svingninger (ved gitt pos. x) pr tidsenhet

$$\Rightarrow \quad f = 1/T$$

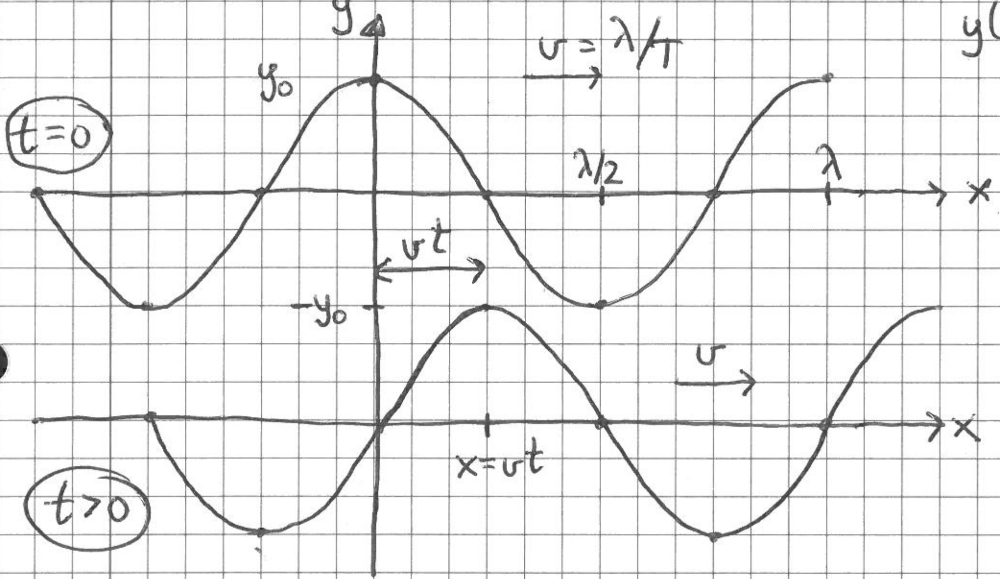
ω = vinkelfrekvens = bølgens faseendring (ved gitt x) pr tidsenhet

$$\Rightarrow \omega = 2\pi / T = 2\pi f$$

Partikkelhastighet: $v_p = dy/dt$

[Med L-bølge: $v_p = d\xi/dt$; ξ = L-utsving]

Matematisk formulering:



$y(x,0) = y_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$

$y(x,t) = y_0 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right]$

Vi har $v = \lambda/T = \lambda \cdot \omega/2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v$

Bølgetallet: $k \equiv 2\pi/\lambda$ $\quad [k] = m^{-1}$

$$\Rightarrow \boxed{y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t)}$$

Harm. bølge, forpl. i pos. x-retn., $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$

Tilsvarende:

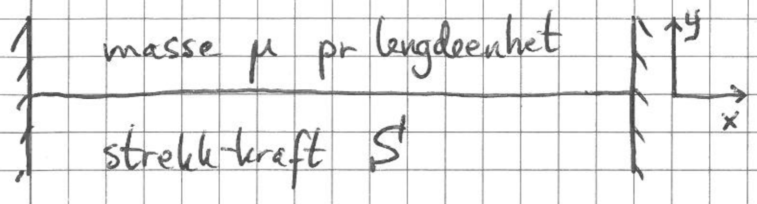
$$\boxed{y(x,t) = y_0 \cos(kx + \omega t)}$$

Forpl. i negativ x-retn.

Generelt: T-bølge $\vec{D}(x,t) = \hat{y} D_0 \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

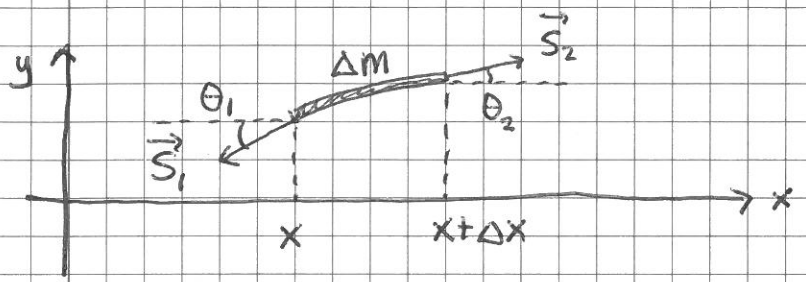
L-bølge $\vec{D}(x,t) = \hat{x} D_0 \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

Transversal bølge på streng [YF 15.4; LL 10.1]



Likevekt: $y = 0$ overalt
(Anta $S \gg Mg$ = strengens tyngde)

Strategi: Bruk Newtons 2. lov på lite strengelement med masse $\Delta m = \mu \cdot \Delta x$:



Anta små utsving $y(x,t)$ [dvs $y \ll \lambda$ overalt].

Anta kun vertikal bevegelse.

$$\Rightarrow |S_{1x}| = |S_{2x}| = S_x \quad \text{og} \quad S_x \approx S$$

N2: $$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \Delta m \cdot \vec{a}$$

Horisontalt: $$S_{1x} + S_{2x} = \Delta m \cdot a_x = 0$$

$$S_{1x} = -S_1 \cos\theta_1 = -S$$
$$S_{2x} = S_2 \cos\theta_2 = S$$

Vertikalt: $$S_{1y} + S_{2y} = \Delta m \cdot a_y = \Delta m \cdot \ddot{y} = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$S_{1y} = -S_1 \sin\theta_1$$
$$S_{2y} = S_2 \sin\theta_2$$

$$\Rightarrow \quad S_2 \sin\theta_2 - S_1 \sin\theta_1 = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Dividerer ligningen med S:

$$\underbrace{\frac{S_2 \sin\theta_2}{S_2 \cos\theta_2}}_{\tan\theta_2} - \underbrace{\frac{S_1 \sin\theta_1}{S_1 \cos\theta_1}}_{\tan\theta_1} = \frac{\Delta m}{S}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \Delta x \frac{\mu}{S}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Ser fra figuren at $\tan\theta = \partial y/\partial x$ = strengens "helning"

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{(\partial y/\partial x)_{x+\Delta x} - (\partial y/\partial x)_x}{\Delta x}}_{= \partial^2 y/\partial x^2 \text{ når } \Delta x \to 0} = \frac{\mu}{S}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Bølgeligning for (små) transversale utsving $y(x,t)$ på streng med strekkraft S og masse μ pr lengdeenhet

<u>Generell løsning</u> er

$$\boxed{y(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt) \quad ; \quad v = \sqrt{S/\mu}}$$

der f og g er vilkårlige to ganger deriverbare funksjoner.

Bevises med $z = x \pm vt$ og kjerneregel for derivasjon:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = -v\frac{\partial f}{\partial z} \; ; \; \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-v\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(-v\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$\Rightarrow \partial^2 f/\partial x^2 = (1/v^2)\,\partial^2 f/\partial t^2$; og helt tilsvarende for $g(x+vt)$ (qed)