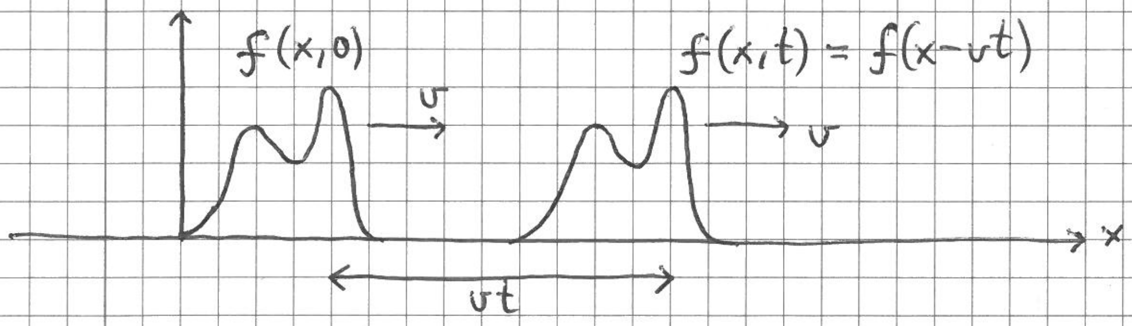
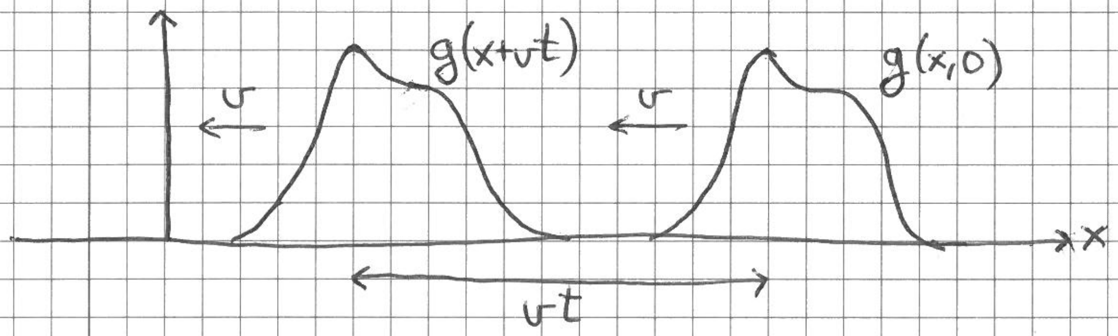
Som på s. 69 ser vi at $f(x-vt)$ er bølge som forplanter seg i positiv x-retning, med hastighet $v$:




Tilsvarende er $g(x+vt)$ bølge som forplanter seg i negativ x-retning, med hastighet $v$:




## Elastisitet [YF 11.4 ; LL 7.2]

Hookes lov / Lineær respons:

Deformasjon (=relativ lengde-/volumendring) er prop. med mekanisk spenning (=kraft pr flateenhet).

$$\text{Elastisk modul} = \frac{\text{mek. spenning}}{\text{deformasjon}}$$

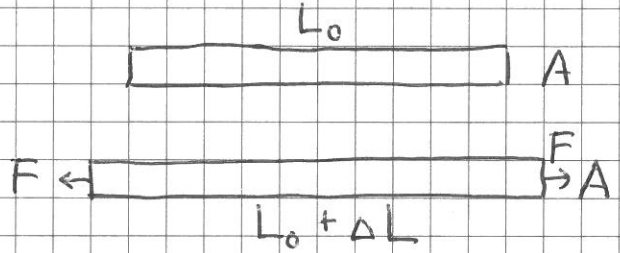
(elastic modulus = stress / strain)

$$[\text{modul}] = [F/A] = N/m^2 = Pa$$

# Tynn stang (strekk, sammenpressing):

Likevekt:

Med strekk:




(A endres litt også!)

Hookes lov:

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \text{elastisitetsmodul}$$

(YF: Youngs modul $Y$)

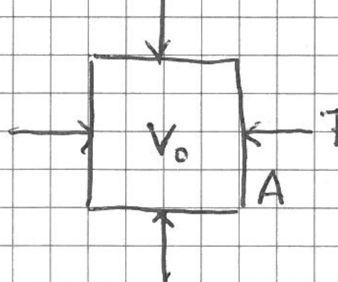
Som ideell fjær, $F = k \cdot \Delta L$, med fjærkonstant

$k = E \cdot A / L_0$.

Talleks: Stål $E = 200$ GPa $(= 2 \cdot 10^{11}$ Pa$)$

# Volumkompresjon:

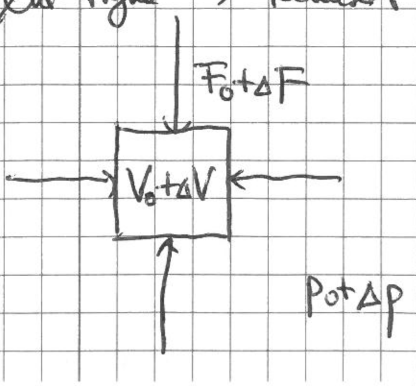
Likevekt:




$p_0 = F_0/A$ = likevektstrykket

$F_0 = p_0 A$ = nettokraft på areal $A$ fra omgivende medium

Økt trykk $\Rightarrow$ Redusert volum:




$$B = -\frac{\Delta F/A}{\Delta V/V_0} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V_0}$$

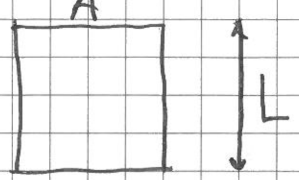
= bulkmodul ($B^{-1}$ = såkalt kompressibilitet)

Stål: $B = 160$ GPa  Vann: $2$ GPa

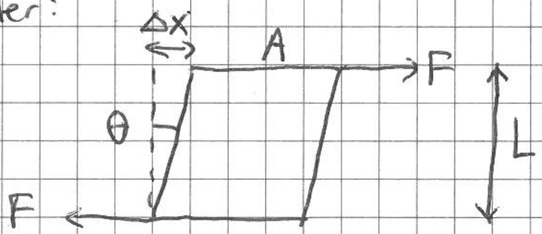
Luft: $10^{-4}$ GPa

Skjærmodul:

Likevekt:




Med skjærkrefter:




$$G = \frac{F/A}{\Delta x/L} = \frac{F/A}{\tan\theta} = \text{skjærmodul}$$

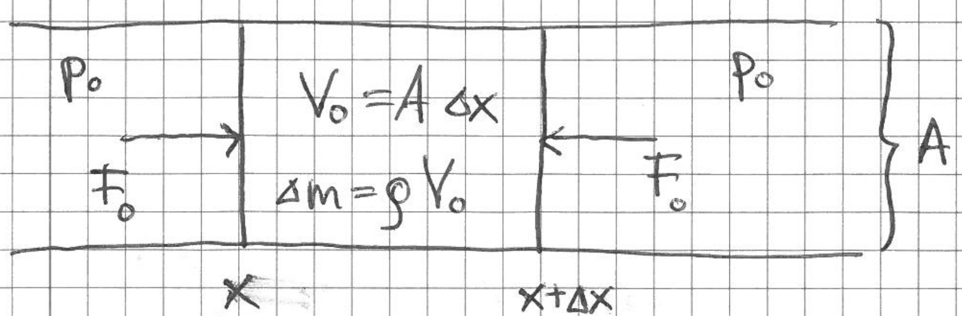
Stål: $G \approx 79\ \text{GPa}$

($\Rightarrow E \sim B > G$ for de fleste faste stoffer)

## Lyd; longitudinale mekaniske bølger

[YF 16.1, 16.2; LL 10.6]

Sylinder med fluid, i likevekt:




$\rho$ = masse pr volumenhet

Strategi: Bruker Newtons 2 lov på $\Delta m$;

$\xi(x,t)$ = midlere utsving fra likevekt for molekyler med likevektsposisjon $x$

[ Skriver bare $\xi(x)$ så lenge vi fokuserer på hvordan $\xi$ varierer med $x$ ]

Med forstyrrelse fra likevekt endres ulike størrelser:

Venstre grenseflate flyttes til $x + \xi(x)$

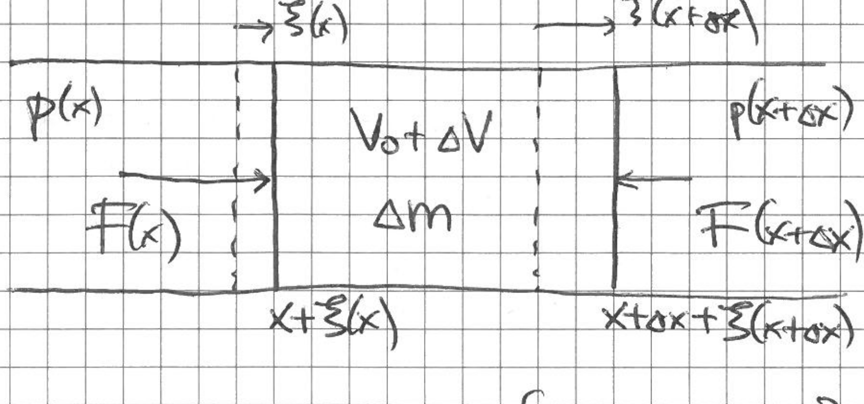
Høyre —"— $x + \Delta x + \xi(x+\Delta x)$

$\Rightarrow$ Volumet blir $V_0 + \Delta V$, Trykket til venstre blir $p(x) + \Delta p(x)$,

Trykket til høyre blir $p(x+\Delta x) = p_0 + \Delta p(x+\Delta x)$,

$\Rightarrow$ Kraft på venstre grenseflate: $F(x) = F_0 + A \cdot \Delta p(x)$

—"— høyre —"— : $F(x+\Delta x) = F_0 + A \cdot \Delta p(x+\Delta x)$




Ser at $\Delta V = A \cdot \Delta \xi = A \cdot \underbrace{\left\{ \xi(x+\Delta x) - \xi(x) \right\}}_{= \Delta x \cdot \partial \xi / \partial x} = A \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \Delta x$

$\Rightarrow$ Trykkendringen kan skrives som:

$$\Delta p(x) = -B \cdot \frac{\Delta V}{V_0} = -B \cdot \frac{A \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x \cdot \Delta x}{A \cdot \Delta x} = -B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x$$

N2 for $\Delta m$: $F(x) - F(x+\Delta x) = \Delta m \cdot \ddot{\xi}$

$$\Rightarrow A \cdot \{\Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x)\} = \Delta m \cdot \ddot{\xi}$$

$$\Rightarrow A \cdot (-B) \cdot \underbrace{\left\{ \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \right\}}_{= -\Delta x \cdot \partial^2 \xi / \partial x^2} = \underbrace{\Delta m}_{= \rho \cdot V_0 = \rho \cdot A \cdot \Delta x} \cdot \ddot{\xi}$$

$$\Rightarrow B \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \rho \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{med} \quad v = \sqrt{B/\rho}}$$

Dvs: Forstyrrelsen fra likevekt, $\xi(x,t)$, oppfyller Samme bølgeligning som $y(x,t)$ på streng!

$\Rightarrow$ Generell løsning er $\xi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$, dvs forstyrrelsen/utsvinget fra likevekt, $\xi(x,t)$, forplanter seg i mediet med fart $v = \sqrt{B/\rho}$, som dermed blir lydhastigheten i mediet.

Med tynn stang erstattes B med E: $v = \sqrt{E/\rho}$

[Generelt blir det mer komplisert i et fast stoff pga både trykk- og skjærkrefter. I "bulk" fast stoff blir $v = \sqrt{(B+4G/3)/\rho}$ for longitudinale bølger og $\sqrt{G/\rho}$ for transversale bølger]

Tallverdier:

| Medium | $\rho$ (kg/m³) | B (Pa) | G (Pa) | v (m/s) |
|---|---|---|---|---|
| Luft | 1.29 | $1.42 \cdot 10^5$ | — | 332 |
| Vann | 1000 | $2.2 \cdot 10^9$ | — | 1483 |
| Stål | 7800 | $1.6 \cdot 10^{11}$ | $0.8 \cdot 10^{11}$ | 5800 (longit.)<br>3200 (transv.) |

Seismikk: Transv. bølger går ~~raskere~~ saktere enn longit. bølger,

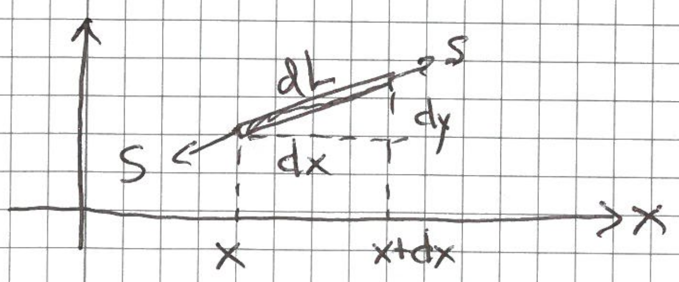
$v_s = \sqrt{G/\rho}$ vs $v_p = \sqrt{(B + 4G/3)/\rho}$

("sekundær bølge") ("primær bølge").

Utnyttes til å lokalisere "sentrum" av jordskjelv.

## Energitransport med bølger [YF 15.5 ; LL 10.5]

Transv. bølge på streng:




Strengelement,
lengde $dL$, masse $dm = \mu\, dx$,
strekk-kraft $S$

Kin. energi: $dK = \frac{1}{2} dm \left(\partial y/\partial t\right)^2 = \frac{1}{2} \mu\, dx \left(\partial y/\partial t\right)^2$

Pot. energi: $dU = S \cdot \underbrace{(dL - dx)}_{= \text{forlengelsen}}$ (Hookes lov)

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1+(dy/dx)^2}$$

$$\approx dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)$$ (fordi $dy \ll dx$ for små utsving)

$$\Rightarrow dU = \frac{1}{2} S \, dx \left(\partial y/\partial x\right)^2$$

$\Rightarrow$ Mekanisk energi pr lengdeenhet:

$$\varepsilon = dE/dx = dK/dx + dU/dx$$

$$= \frac{1}{2}\mu\left(\partial y/\partial t\right)^2 + \frac{1}{2} S \left(\partial y/\partial x\right)^2$$

Med $y(x,t) = y(x \pm vt)$ blir (med $z = x \pm vt$)

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \pm v \frac{\partial y}{\partial z} = \pm v \frac{\partial y}{\partial x},$$

og videre er $v = \sqrt{S/\mu}$, dvs $S = \mu v^2$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon = \mu v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \pm \mu v \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$[\varepsilon] = \mathrm{J/m}$$

Med $y(x,t) = y(x \pm vt)$ er også $\frac{\partial y}{\partial t}$ og $\frac{\partial y}{\partial x}$ funksjoner av kombinasjonen $x \pm vt$ $\Rightarrow \varepsilon(x,t) = \varepsilon(x \pm vt)$

$\Rightarrow \varepsilon$ oppfyller bølgeligning. $\partial^2\varepsilon/\partial x^2 = (1/v^2)\,\partial^2\varepsilon/\partial t^2$

$\Rightarrow$ energien forplanter seg "med bølgen" / "som en bølge", med samme hastighet som utsvinget $y$ (evt $\xi$ hvis longit. bølge; lyd)

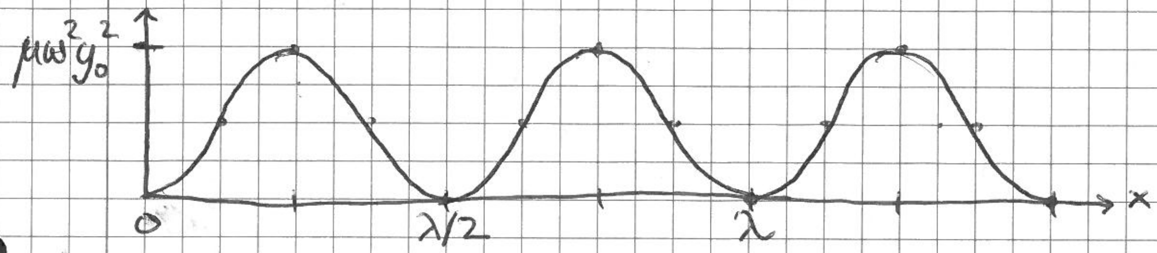
## Eks: Harmonisk bølge

$y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t)$ $\quad (k = 2\pi/\lambda, \; \omega = 2\pi/T, \; v = \omega/k)$

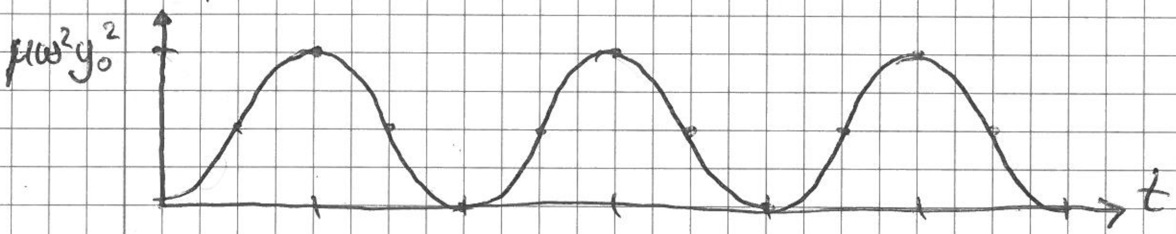
$\Rightarrow \partial y/\partial x = -k y_0 \sin(kx - \omega t)$

$\Rightarrow \varepsilon(x,t) = \mu v^2 \cdot k^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t)$

Øyeblikksbilde, $t = 0$: $\quad \varepsilon(x,0) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 kx$




Fast sted, $x = 0$: $\quad \varepsilon(0,t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 \omega t$




Hvis vi har en plan longitudinal bølge (lydbølge):

$1D \to 3D$; $\mu \to \rho$ = masse pr vol.enh.

$\varepsilon = dE/dx \to dE/dV$ = energi pr vol.enh.

$y \to \xi$ = partiklenes (midlere) utsving fra likevekt

$\Rightarrow \varepsilon(x,t) = \rho v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \pm \rho v \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$

$[\varepsilon] = J/m^3$

# Midlere energitetthet i harmonisk bølge.

Figur s. 79 for $\varepsilon(x,0)$ viser at

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_0^2 \qquad \text{(romlig middelverdi over en bølgelengde)}$$

og fig. for $\varepsilon(0,t)$ viser at

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_0^2 \qquad \text{(tidsmiddel over en periode)}$$

Formelt er

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\lambda \varepsilon(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \varepsilon(x,t)\,dx$$

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\int_0^T \varepsilon(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon(x,t)\,dt$$

Merk at $\langle\sin^2\varphi\rangle = \langle\cos^2\varphi\rangle = 1/2$, fordi

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, dvs $\langle\sin^2\varphi\rangle + \langle\cos^2\varphi\rangle = \langle 1\rangle = 1$.

For plan harmonisk lydbølge:

$$\bar{\varepsilon} = \langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

når $\xi(x,t) = \xi_0\cos(kx-\omega t)$

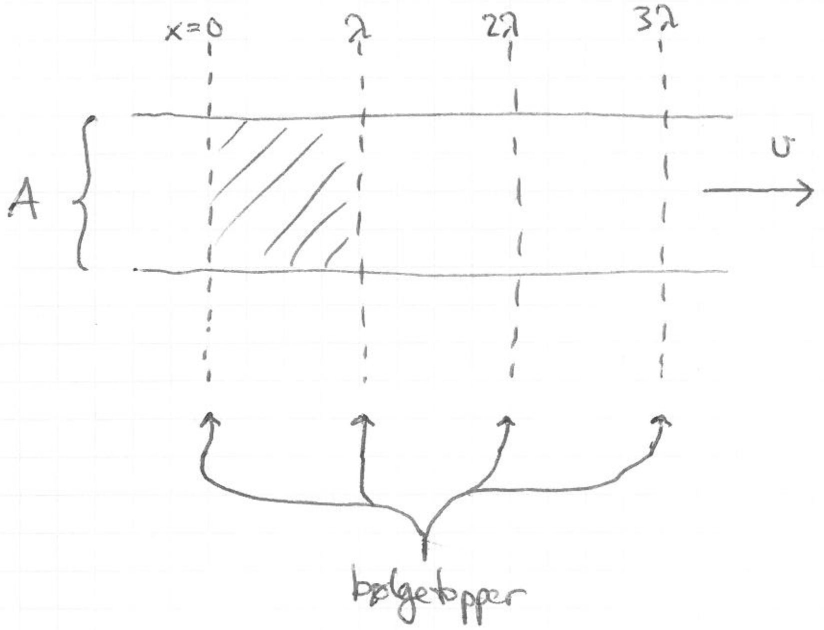
# Bølgens intensitet [YF 16.3; LL 10.5]

$\underline{I}$ = midlere overført energi pr tidsenhet og pr flateenhet

= midlere overført effekt pr flateenhet

$\Rightarrow \quad [I] = W/m^2$

Med plan harmonisk lydbølge:




Energiinnhold i bølgen, mellom $x=0$ og $x=\lambda$:

$$\bar{\varepsilon} \cdot V = \bar{\varepsilon} \cdot A \cdot \lambda$$

Denne energien passerer arealet $A$ ved $x=\lambda$ i løpet av en periode $T$:

$$\Rightarrow \underline{I} = \bar{P}/A = \frac{\bar{\varepsilon} A \lambda / T}{A} = \underline{\underline{\bar{\varepsilon} \cdot v}} \qquad (v = \lambda/T)$$

## Desibelskalaen:

Knapt hørbar lyd: $I = 10^{-12}\ W/m^2$

Smertegrensen: $I = 1\ W/m^2$

Dvs: Stort spenn i tallverdier

$\Rightarrow$ Hensiktsmessig med logaritmisk skala

$$\boxed{\#\,dB = \beta = 10 \log \left( I/I_0 \right)}$$ (Lydtrykksnivå)

med $I_0 = 10^{-12}\ W/m^2$ = standard referanseverdi

Dermed:

Høregrensen: $\beta = 10 \log \frac{10^{-12}}{10^{-12}} = \underline{0\ dB}$

Normal samtale: $\beta = 10 \log \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = \underline{60\, dB}$

Smertegrensen: $\beta = 10 \log \frac{1}{10^{-12}} = \underline{120\, dB}$