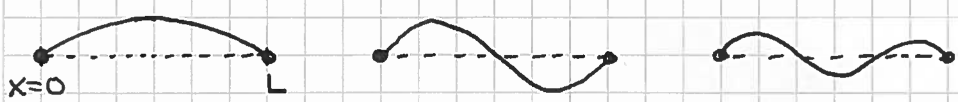
Stående bølger

[YF 15.7, 15.8, 16.4 ; LL 10.3]

Harmonisk bølge på streng med lengde L må ha bølgelengde λ gitt ved

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

når strengen er fastspent i begge ender:



osv.

Grunntone. $\lambda_1 = 2L$

1. overtone $\lambda_2 = L$

2. overtone $\lambda_3 = \frac{2}{3}L$

Kan oppfattes som overlagring av to bølger som forplanter seg hver sin vei:

$$y(x,t) = y_1 \sin(kx - \omega t) + y_2 \sin(kx + \omega t)$$

Fast i $x = 0$ $\Rightarrow y(0,t) = -y_1 \sin \omega t + y_2 \sin \omega t = 0$

$$\Rightarrow y_1 = y_2 = y_0$$

"Identitet": $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

$$\Rightarrow y(x,t) = y_0 [\sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t]$$

$$= 2 y_0 \sin kx \cos \omega t$$

som er en harmonisk svingning ($\cos \omega t$) med posisjonsavhengig amplitude ($2 y_0 \sin kx$).

Stående bølge ; ingen netto energitransport.

$y(L,t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi$

$$\Rightarrow \lambda_n = 2L/n$$

som vi allerede har innsett.

Resonansfrekvensene ($v = \sqrt{S/\mu}$; $f = v/\lambda$):

$$\boxed{f_n = \sqrt{\frac{S}{\mu}} \cdot \frac{n}{2L}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Eks: Gitarstreng, lengde 650 mm (mellom faste punkter), diameter 0.80 mm, stål. Bestem strekk-kraft som gir frekvens (grunntone) 196.0 Hz. (G; streng nr 3)
Stål: 7.86 g/cm^3.

Løsn: $\mu = \rho \cdot A = \rho \cdot \pi r^2 = \rho \pi d^2/4 = 7.86 \cdot 10^3 \, \mathrm{kg/m^3} \cdot \pi \cdot (0.80 \cdot 10^{-3} \mathrm{m})^2/4$
$= 3.95 \cdot 10^{-3} \, \mathrm{kg/m}$

$S = 4L^2 \mu f_1^2 = 4 \cdot (0.650 \, \mathrm{m})^2 \cdot 3.95 \cdot 10^{-3} \, \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} \cdot (196.0 \, \mathrm{s^{-1}})^2$
$= \underline{\underline{257 \, \mathrm{N}}}$

Helt tilsvarende for <u>stående lydbølger i et langt, tynt rør</u> med lengde L som er åpent (eller lukket) i begge ender:

Åpen ende $\Rightarrow p(0) = p(L) = p_0$, dvs $\Delta p = p - p_0 = 0$;
evt. max utsving for utsvingsbølgen $\xi(x,t)$

$\Rightarrow \lambda_n = 2L/n$

$\Rightarrow$ Resonansfrekvenser: $\boxed{f_n = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \cdot \frac{n}{2L}}$ $\qquad (v = \sqrt{B/\rho})$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$

Med <u>to ulike</u> grensebetingelser :

$\lambda_1 = 4L$

$\lambda_2 = 4L/3$

.... $\boxed{\lambda_n = \frac{4L}{2n-1}}$ $(n = 1, 2, 3, ---)$

Dus: Streng med 1 fast og 1 fri ende, evt. rør med 1 åpen og 1 lukket ende.

Tverrfløyte : 2 åpne ender

Klarinett : 1 åpen, 1 lukket; sylindrisk rør

Obo, fagott, saksofon: 1 åpen, 1 lukket ; konisk rør ⇒ mer komplisert...

Eks: Stående lydbølge, to åpne ender, $\overbrace{\text{utsvingsamplitude}}^{\text{max}}$ $2\xi_0$.

Bestem max trykkamplitude.

Løsn: $\xi(x,t) = 2\xi_0 \cos kx \cos\omega t$

$$\Delta p(x,t) = -B \cdot \frac{\partial \xi(x,t)}{\partial x} = 2kB\xi_0 \sin kx \cos\omega t$$

Max amplitude : $2kB\xi_0$ $(k = 2\pi/\lambda)$

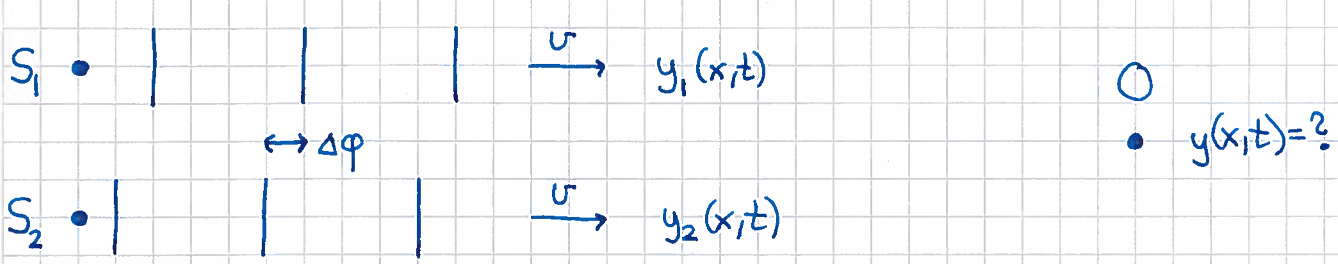
Exp / Demoforsøk :

- Stående bølger på spiralfjær
- Stående lyd-bølger i rør med to eller en åpen ende

Interferens [YF 15.6, 16.6 ; LL 10.7]

= overlagring av to eller flere bølger på et gitt sted til en gitt tid

(1) To bølger i samme retning med lik frekvens, med faseforskjell $\Delta\varphi$



Total bølge ved O :

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t) + y_0 \cos(kx - \omega t + \Delta\varphi)$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}$$

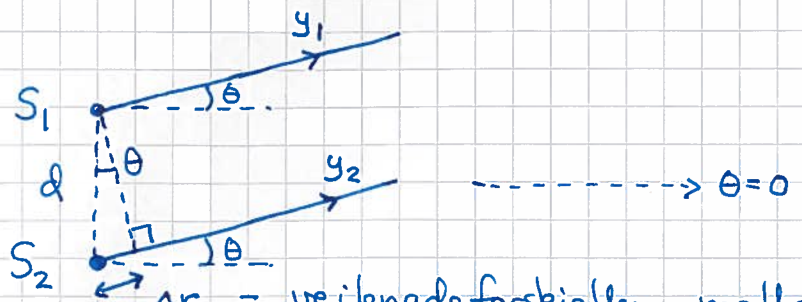
$$\Rightarrow y(x,t) = 2y_0 \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \cos\left(kx - \omega t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ Konstruktiv interferens hvis $\Delta\varphi = 0$; da er y_1 og y_2 i fase ved O.

Hvis en bølge alene gir intensitet I_1 ved O, vil to bølger i fase gi intensitet $I_2 = 4 I_1$.

Destruktiv interferens ved O hvis $\Delta\varphi = \pi$; da er y_1 og y_2 i motfase, og $I_2 = 0$.

② Retningsavhengig interferens med to like bølgekilder i fase



Δr = veilengdeforskjellen mellom y_1 og y_2

$\Delta r = d \cdot \sin\theta$; d = avstanden mellom S_1 og S_2

Anta at bølgene observeres på en skjerm (detektor) i stor avstand ($L \gg d$) fra kildene.

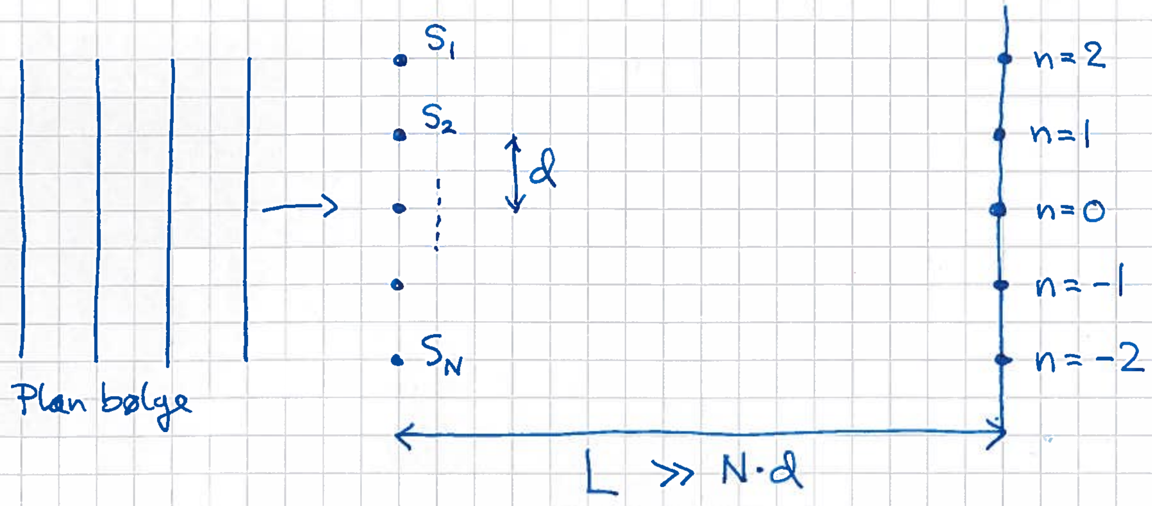
Konstruktiv interferens når $\Delta r = d\sin\theta = n\lambda$

Destruktiv —"— når $\Delta r = d\sin\theta = (n+1/2)\lambda$

$(n = 0, \pm 1, \pm 2, ---)$

③ Som ②, men med mange bølgekilder i fase.

Oppnås ved å sende en plan bølge inn mot et <u>diffraksjonsgitter</u>: Mange smale spalteåpninger med avstand d i mellom. Hver spalteåpning er da opphav til en sylinderbølge som forplanter seg mot detektoren. Veilengdeforskjell $d\sin\theta = n\lambda$ mellom nabospalter gir konstruktiv interferens mellom alle N delbølgene, og maksimal intensitet. I <u>andre</u> retninger interfererer delbølger med "alle mulige faser", og intensiteten blir omtrent lik null.



Eks/Exp: Laserpenner og diffraksjonsgitter

Laserlys er E.M. bølger med skarpt definert bølgelengde λ.

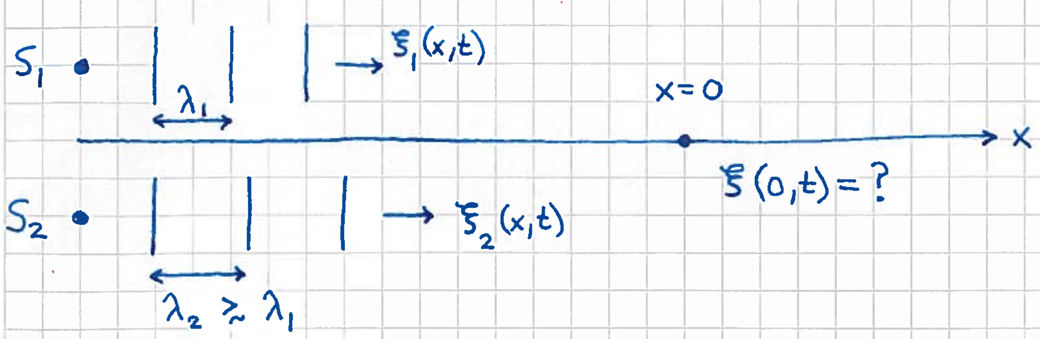
Rød: 650 nm   Grønn: 532 nm   Blå: 405 nm

Diffr. gitre: 100, 300 og 600 spalter pr mm

$$\Rightarrow d = \frac{1}{100}\text{ mm},\ \frac{1}{300}\text{ mm og } \frac{1}{600}\text{ mm}$$

4 Svevning; interferens i tid
[YF 16.7; LL 10.7]

To bølgekilder (f.eks. lyd) med litt forskjellig frekvens.



$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t)$$

$$= \xi_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) + \xi_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

$$= 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cdot \cos(kx - \omega t)$$

der $\Delta k = k_1 - k_2$, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

og $\Delta k \ll k$, $\Delta\omega \ll \omega$

Ved $x = 0$: $\xi(0,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cdot \cos(\omega t)$

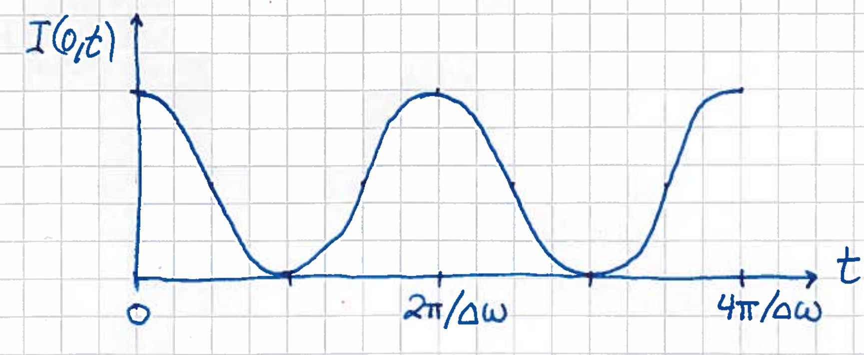
Intensitet ved $x = 0$:

$$I(0,t) = \langle\varepsilon\rangle \cdot v = \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 (2\xi_0)^2 v \cdot \cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}t\right)$$

$$= \rho\,\omega^2 \xi_0^2 v \left[1 + \cos(\Delta\omega \cdot t)\right]$$

Her er $\langle\varepsilon\rangle$ et tidsmiddel over en periode av den raske svingningen, $T = 2\pi/\omega$, dvs den som gir "tonen" $f = (f_1 + f_2)/2$.

Faktoren $[1 + \cos(\Delta\omega \cdot t)]$ gir en langsom variasjon i intensiteten :



Animasjon:
svevning.m

Vi hører svevning ("beats"), der $I(t)$ varierer mellom null ("svak") og max ("sterk") med periode

$$T_s = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{1}{f_s}$$

$$f_s = f_1 - f_2 = \text{svevefrekvensen}$$

Med to stemmegafler :
Ca 3 svingninger i intensiteten pr sekund

$$\Rightarrow \quad f_s \approx 3\,\text{Hz}$$

$$\Rightarrow \quad f_1 = 440\ \text{Hz} \qquad \text{(uten tape)}$$

$$f_2 = 437\ \text{Hz} \qquad \text{(med tape)}$$

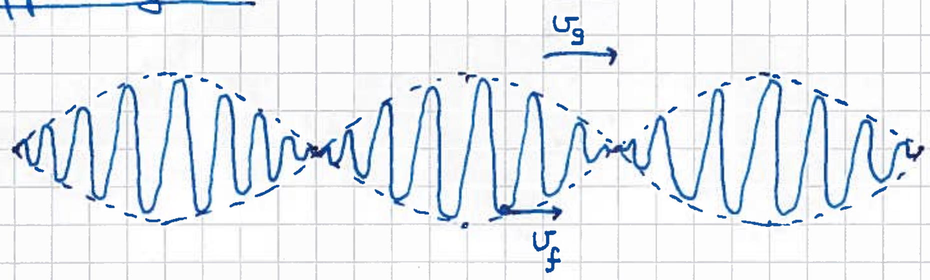
(evt. 443 Hz ; må sjekke om $f_2 > f_1$ eller $f_1 > f_2$)

Gruppehastighet. Dispersjon [LL 10.7, 10.10 ; YF 33.4]

Summen av to harmoniske bølger med litt ulike bølgelengder er

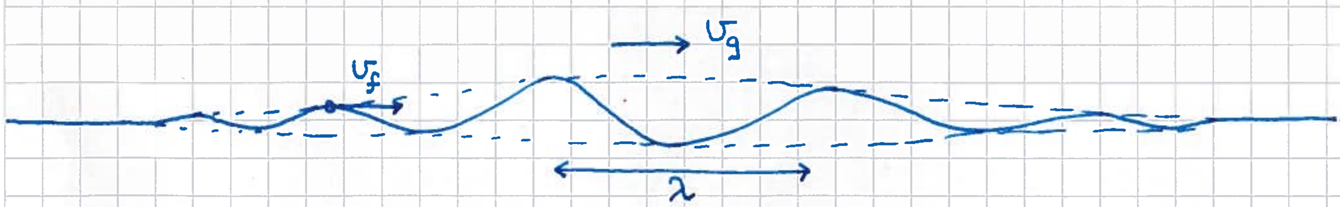
$$\xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta\omega}{2}t\right) \cdot \cos(kx - \omega t)$$

dvs en raskt varierende bærebølge $\cos(kx - \omega t)$ med hastighet $v = v_f = \omega/k$ = fasehastigheten, kombinert med en langsomt varierende modulasjonsbølge $\cos\left(\frac{1}{2}\Delta k x - \frac{1}{2}\Delta\omega t\right)$ med hastighet $v_g = \Delta\omega/\Delta k = d\omega/dk$ (små $\Delta\omega$ og Δk) = gruppehastigheten :



[Animasjon: bolgepakke2.m]

En sum av mange harmoniske bølger med bølgelengder omkring en typisk (gjennomsnittlig) bølgelengde λ kan representere en romlig avgrenset bølgepakke :



- Hele bølgepakken, og dermed energien i bølgepakken, forplanter seg nå med gruppehastigheten $v_g = d\omega/dk$.
- Vi kaller funksjonen $\omega(k)$ dispersjonsrelasjonen ; formen på denne avgjør v_g
- Bølger på streng, lydbølger i fluid og elektromagnetiske bølger i vakuum har fasefart uavhengig av k (hhv $\sqrt{S/\mu}$, $\sqrt{B/\rho}$ og c). Da er $\omega = v_f \cdot k$ og $v_g = d\omega/dk = v_f$; såkalt lineær dispersjon.

Overflatebølger på vann

To typer krefter virker på vannet i overflaten:

- tyngdekraften
- overflatespenningen

Dypt vann:

$$\omega(k) = \sqrt{g \cdot k + \gamma \cdot k^3/\rho} \qquad (k = 2\pi/\lambda)$$

med $g = 9.81 \ m/s^2$
$\rho = 10^3 \ kg/m^3$
$\gamma = 0.073 \ N/m$ (overflatespenningen)

Skiller da mellom

- tyngdebølger ; $g \gg \gamma k^2/\rho$ $\left(\lambda \gg 2\pi\sqrt{\gamma/\rho g} \approx 1.7 \ cm\right)$
- kapillærbølger ; $g \ll \gamma k^2/\rho$ $(\lambda \ll 1.7 \ cm)$

Tyngdebølger : $\omega \approx \sqrt{gk} \Rightarrow v_f = \sqrt{g/k}$, $v_g = \frac{1}{2}\sqrt{g/k} = \frac{1}{2} v_f$

$\Rightarrow$ Bølgetoppene beveger seg framover i bølgepakken

Kapillærbølger: $\omega \approx \sqrt{\gamma k^3/\rho} \Rightarrow v_f = \sqrt{\gamma k/\rho}$, $v_g = \frac{3}{2}\sqrt{\gamma k/\rho} = \frac{3}{2} v_f$

$\Rightarrow$ Bølgetoppene beveger seg bakover i bølgepakken

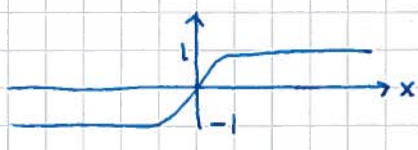
Se notat og filmer på hjemmesiden.

Animasjon : bølgepakkemange.m

Tyngdebølger, generelt:

$$\omega^2 = g \cdot k \cdot \tanh(kD) \quad ; \quad D = \text{vanndybden}$$

$$\tanh x = \sinh x / \cosh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$



$|x| \ll 1 \Rightarrow \tanh x \approx x \quad ; \quad x \gg 1 \Rightarrow \tanh x \approx 1$

Dypt vann: $kD = 2\pi D/\lambda \gg 1 \Rightarrow \omega(k) = \sqrt{gk}$ (OK)

Grunt vann: $kD = 2\pi D/\lambda \ll 1$

$\Rightarrow \omega^2 = gk \cdot kD = gD \cdot k^2$

$\Rightarrow \omega(k) = \sqrt{gD} \cdot k \Rightarrow v_f = v_g = \sqrt{gD}$

Eks: Tsunami

Jordskjelv på havbunnen kan gi overflatebølger med bølgelengder opp mot flere hundre kilometer. Da er $D \ll \lambda$, og vi er alltid på grunt vann. På vei mot land avtar dybden D, og dermed hastigheten v_g. Pga energibevarelse må da amplituden øke, potensielt med katastrofale følger.