

Impuls [YF 8 ; LLS]

(21)

(= bevegelsesmengde = driv = ... = (linear) momentum) eng.
↓

N2: $\vec{F} = m \vec{a} = m d\vec{v}/dt = d(m\vec{v})/dt$ nær $m = \text{konst.}$

impuls $\stackrel{\text{def}}{=} \text{masse} \times \text{hastighet}$

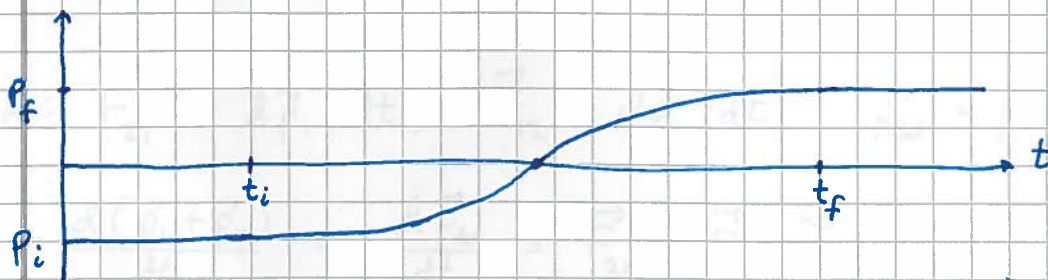
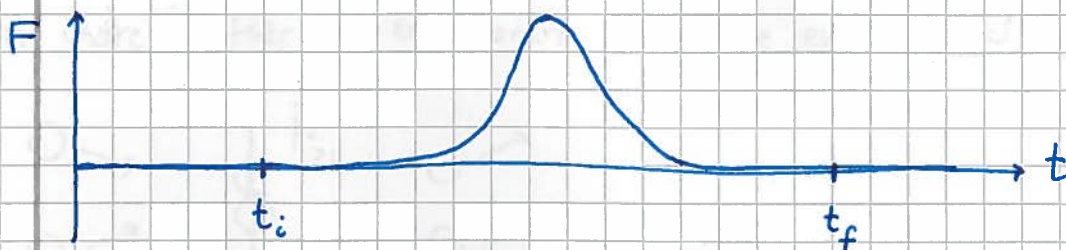
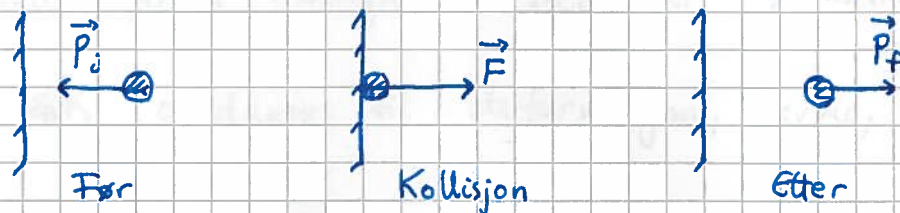
$$\vec{p} = m \vec{v}, \quad [p] = \text{kg m/s}$$

Dermed blir N2: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$

⇒ Prinsippet om impulsbevarelse:

Hvis $\sum \vec{F}_{\text{ytre}} = 0$, er systemets totale impuls bevart

Eks: Ball mot vegg



$$d\vec{p} = \vec{F}(t) dt \Rightarrow \vec{p}(t) = \vec{p}_i + \int_{t_i}^t \vec{F}(t) dt$$

Total impulsendingring:

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$$

Eks: F/G for bordtennisball.

Løsn: Anta $v_i \sim -10 \text{ m/s}$, $v_f \sim +40 \text{ m/s}$, $\Delta t \sim 2 \text{ ms}$ og $F(t) \approx \text{konstant}$

$$\Rightarrow F/G = m(\Delta v / \Delta t) / mg \approx (50 \text{ m/s} / 2 \cdot 10^{-3} \text{ s}) / 10 \text{ m/s}^2 = \underline{\underline{2500}}$$

$\Rightarrow F \gg G$ i kortvarige kollisjoner \Rightarrow OK å negligere ytre krefter som f.eks. G i løpet av kollisjonen!

Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL S.3]

Elastisk kollisjon: Mek. energi bevart ($\Delta E = \Delta K = 0$)

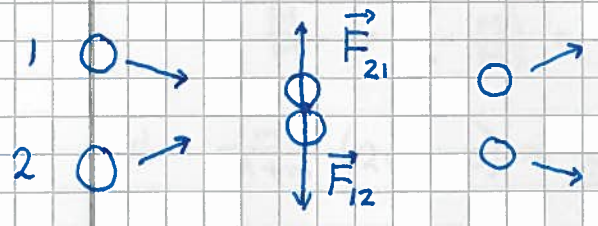
Uelastisk " " : " " " ikke bevart ($\Delta K < 0$)

[Kortvarige kollisjoner ved gitt posisjon $\Rightarrow \Delta U \approx 0 \Rightarrow \Delta E \approx \Delta K$]

Fullstendig uelastisk kollisjon: Legemene henger sammen etter koll. med felles hastighet. Dette gir maksimal $|\Delta K|$.

[Tapt ΔK omdannes til deformasjon, varme, lyd]

Men indre krefter i kollisjonen vil ikke endre total impuls:



$$N2: \vec{F}_{21} = d\vec{p}_1 / dt, \quad \vec{F}_{12} = d\vec{p}_2 / dt, \quad \vec{p}_{tot} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

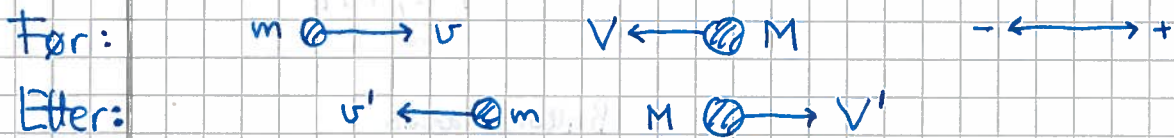
$$\Rightarrow \frac{d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)}{dt} = \frac{d\vec{p}_{tot}}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} \stackrel{N3}{=} \vec{F}_{21} - \vec{F}_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{p}_{tot} = \text{konst.}}}$$

Sentralt støt

[YF 8.2-8.4; LL 5.3]

(23)



Impulsbevarelse $\Rightarrow mv + MV = mv' + MV'$

a) Fullstendig uelastisk kollisjon: $v' = V' = \frac{mv + MV}{m + M}$

b) (Delvis) Uelastisk: 1 ligning, 2 ukjente \Rightarrow Ubestemt

c) Elastisk: $\Delta K = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$
 $\Rightarrow m(v+v')(v-v') = M(V'+V)(V'-V)$ ①

$\Delta p = 0 \Rightarrow m(v-v') = M(V'-V)$ ②

①/② $\Rightarrow v+v' = V'+V$ ③

$M \cdot ③ - ② \Rightarrow \dots \Rightarrow$
 $v' = \frac{M}{m+M} \left(2V + v \frac{m-M}{M} \right)$
 $V' = \frac{m}{M+m} \left(2v + V \frac{M-m}{m} \right)$

Eks: Ball (m) mot vegg ($M \gg m$), elastisk kollisjon

$$v' = \frac{M}{m+M} \left(0 + v \frac{m-M}{M} \right)$$

$$\approx \frac{M}{M} \cdot v \cdot \left(-\frac{M}{M} \right) = -v$$



$$V' = \frac{m}{M+m} (2v + 0) \approx \frac{m}{M} \cdot 2v \quad (\approx 0)$$

Impulsbevarelse?

$p = mv, P = MV = 0, p' = mv' = -mv, P' = MV' \approx M \frac{m}{M} 2v = 2mv$ OK!!

Energi bevarelse?

$K_m = \frac{1}{2}mv^2, K_M = \frac{1}{2}MV^2 = 0, K_m' = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mv^2, K_M' = \frac{1}{2}MV'^2 = \frac{M}{2} \left(\frac{2mv}{M} \right)^2$
 $= \frac{1}{2}mv^2 \cdot \frac{4m}{M} \approx 0$

OK!!

Rakettprinsipp

[YF 8.6; LL 5.4]

(24)



Målt i et referansesystem i ro er: v = rakettenes hastighet ($v > 0$)
 v_e = eksosens " " "

Målt relativt raketten er eksosens hastighet u ($u < 0$) ($u = \text{konst.}$)

$$\Rightarrow v_e = u + v$$

Rakettenes masseendring pr tidsenhet: $dm/dt = \dot{m} < 0$

Anta først $F_{\text{ytre}} = 0$, slik at $dp/dt = 0$. [Til slutt: $F_{\text{ytre}} = -mg$]

Rakett ved tid t : $m(t) \rightarrow v(t)$ $p(t) = m(t)v(t)$

Samme system ved tid $t+dt$:

$$v_e(t+dt) \leftarrow \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \end{array} \begin{array}{c} \boxed{m(t+dt)} \\ \rightarrow v(t+dt) \end{array} = v(t) + dv$$
$$dm_e = -dm > 0$$

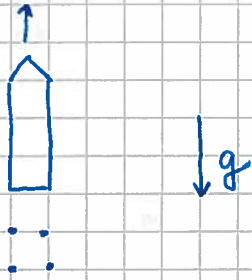
$$p(t+dt) = m(t+dt) \cdot v(t+dt) + dm_e \cdot v_e(t+dt)$$
$$= [m(t) + dm] \cdot [v(t) + dv] - dm \cdot [u + v(t) + dv]$$
$$= m(t)v(t) + m(t)dv - u dm$$
$$= p(t) + m(t)dv - u dm$$

$$\text{Isolert system} \Rightarrow p(t+dt) = p(t) \Rightarrow m dv - u dm = 0$$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} = u \dot{m}, \text{ som "ligner på } N^2\text{"}$$

$$\text{dvs } m \cdot a = F_{\text{skjuv}}, \text{ med skjulerkraft } F_{\text{skjuv}} = u \dot{m} > 0$$

Ved f.eks. oppskyting i tyngdefelt kommer $F_{ytte} = -mg$ i tillegg: (25)



\Rightarrow N2 for ("rest"-) raketten:

$$F = ma$$

med total kraft

$$F = F_{ytte} + F_{skyr} = -mg + u \dot{m}$$

$$\text{Ør. 4: } m \frac{dv}{dt} = -mg + u \frac{dm}{dt} \quad / \cdot dt/m$$

$$\Rightarrow \int dv = - \int g dt + u \int \frac{dm}{m} \quad \text{osv.}$$

Så langt: Punktmasser, evt. ren translasjon av stive legemer.

I neste omgang: Partikkelsystemer. Stive legemer, rotasjon.

Men først: Litt om numerisk løsning av N2; Eulermetoden.

Anta krefter og beregelse i 1D, langs x-aksen.

$$\text{N2: } F = m \frac{dv}{dt} \approx m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta v = (F/m) \Delta t \quad ; \quad \Delta x = v \Delta t$$

$$\text{Startbetingelser: } x_0 = x(0), \quad v_0 = v(0)$$

$$\text{Notasjon: } x_j = x(t_j) = x(j \cdot \Delta t), \quad v_j = v(t_j) = v(j \cdot \Delta t) \quad ; \quad j=0,1,2,\dots$$

$$\Rightarrow x_1 = x_0 + v_0 \Delta t \quad ; \quad v_1 = v_0 + \frac{F_0}{m} \Delta t$$

$$x_2 = x_1 + v_1 \Delta t \quad ; \quad v_2 = v_1 + \frac{F_1}{m} \Delta t$$

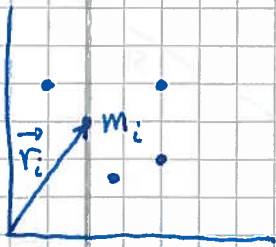
$$x_{j+1} = x_j + v_j \Delta t \quad ; \quad v_{j+1} = v_j + \frac{F_j}{m} \Delta t$$

\Rightarrow M2 typiske løses med en for-løkke eller while-løkke
i Matlab og Python.

Massecenter [YF 8.5 + oppg 8.115/116; LL 5.6, 5.8, 6.1]

(26)

(= tyngdepunkt når g er like stor i hele systemet)



Massecenter (CM) for N punktmasser

m_1, m_2, \dots, m_N i pos. $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad ; \quad M = \sum_i m_i = \text{total masse}$$

Hvis kontinuerlig massefordeling: $m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} dm$

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm \quad ; \quad M = \int dm$$

Masseelementet $dm = \rho dV$ (3D); σdA (2D); λdl (1D)

der $\rho, \sigma, \lambda =$ masse pr hhv volum-, flate-, lengdeenhet

$dV, dA, dl =$ hhv volum-, flate-, lengdeelement

Har ofte uniform massefordeling; da er $\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V}$ osv

Eks 1: Potensiell energi i tyngdefeltet



Velg $U(0) = 0$

$$\Rightarrow U = \int dU = \int gy dm = g \int y dm = \underline{\underline{gMY_{CM}}}$$

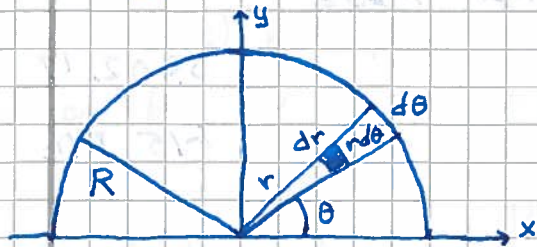
Med andre ord: Total pot. energi U som om hele massen

$M = \int dm$ var samlet i høyden $Y_{CM} = (\int y dm) / M$,

f.eks. i \vec{R}_{CM} .

Eks 2: Tynn skive, halvsirkel

(27)



$X_{CM} = 0$ pga symmetri

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA \quad \left(\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A} \right)$$

$$dA = dr \cdot r d\theta, \quad A = \frac{1}{2} \pi R^2, \quad y = r \sin \theta,$$

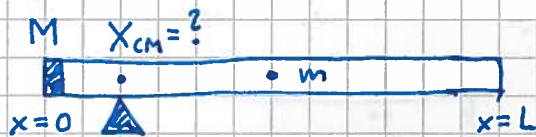
$$0 < r < R, \quad 0 < \theta < \pi$$

$$\Rightarrow Y_{CM} = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^\pi r \sin \theta \, dr \, r d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 \cdot 2 = \frac{4R}{3\pi} \approx \underline{\underline{0.42R}}$$

[Vis selv at $Y_{CM} = \frac{2R}{\pi}$ for "bølge" (1D) og $Y_{CM} = \frac{3R}{8}$ for halvkule (3D)]

Eks 3: Rør m/lodd i enden



$$m = 165g, \quad M = 305g$$

Røret (m) effektivt som m på midten

$$\Rightarrow X_{CM} = \frac{M \cdot 0 + m \cdot L/2}{M+m} = \frac{165}{940} L \approx \underline{\underline{0.18L}}$$

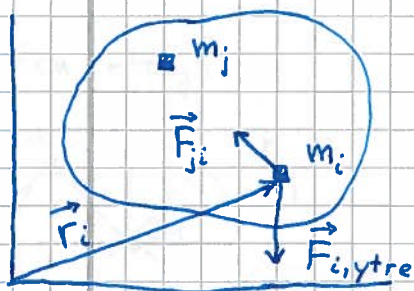
Evt:

$$X_{CM} = \frac{L}{M+m} \left\{ M \cdot 0 + \underbrace{\int_0^L x \cdot \frac{dm}{L}}_{= mL/2} \right\} = \underline{\underline{\frac{mL}{2(M+m)}}}$$

Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5 ; LL 5.8]

(28)

Forsøk (kast) med plastrør og lodd antyder at CM beveger seg som om hele M var samlet i CM. Vi beviser dette:



$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i ; \quad M = \sum_i m_i$$

N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{total indre kraft p\u00e5 } m_i}$$

total ytre kraft p\u00e5 m_i

total indre kraft p\u00e5 m_i

Legg sammen N2 for alle $i = 1, 2, \dots, N$:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \sum_i m_i \vec{r}_i \right\} = \frac{d^2}{dt^2} \left\{ M \vec{R}_{CM} \right\} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

$$\sum_i \vec{F}_{i,ytre} = \vec{F}_{ytre} = \text{total ytre kraft p\u00e5 hele systemet}$$

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N} = 0 \quad \text{pga N3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{ytre} = M \ddot{\vec{R}}_{CM}}$$

Men dette er jo N2 for en punktmasse M i posisjon \vec{R}_{CM} , utsatt for en total ytre kraft \vec{F}_{ytre} . (qed)

I tillegg til tyngdepunktbevegelsen:

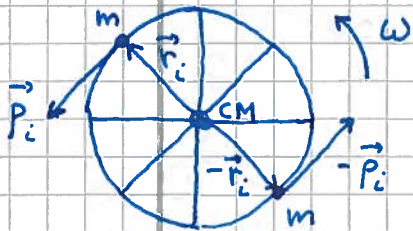
- Rotasjon om CM
 - Vibrasjon om CM
- } neste ca 3 uker

Rotasjon

[YF 9,10; LL 6 (5)]

Et par innledende betraktninger:

- Ren rotasjon



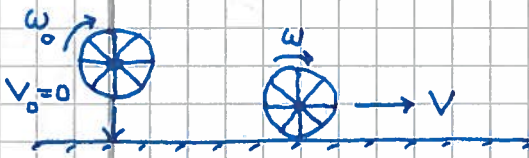
$$CM \text{ i ro} \Rightarrow K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M \dot{R}_{CM}^2 = 0$$

men $K_{\text{rot}} \neq 0$!

$$\text{Impuls? } \vec{p} = \sum_i \vec{p}_i = 0$$

men vi har dreieimpuls !

- Rulling = translasjon + rotasjon

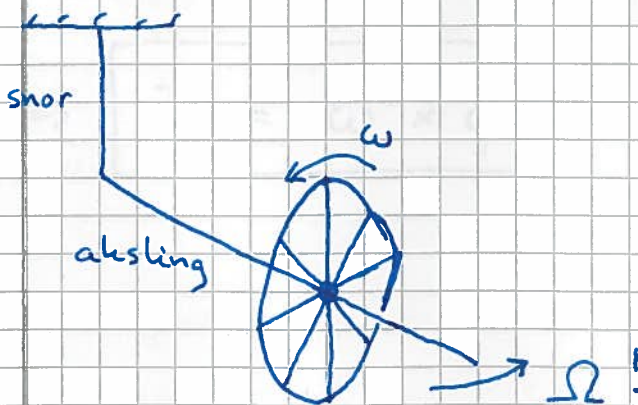


Hvilke krefter?

Hvor angriper kreftene?

Friksjonens rolle?

- Komplex dynamikk



Gyroskop
(Preesjon)

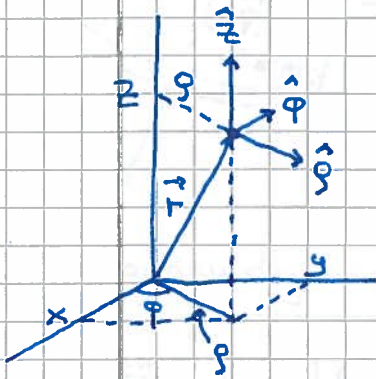
Vi ser at sirkelbevegelse (igjen!) står i sentrum!

Sirkelberegelse [YF 9.1-9.3; LL 1.8]

(30)

Antar rotasjon om z-aksen

⇒ Bruk sylinderkoordinater = polaroord. $(\rho, \varphi) + z$



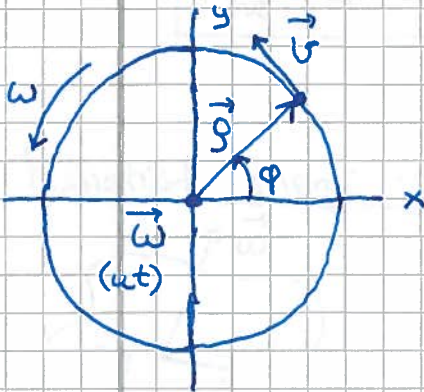
$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\varphi = y/x$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Vinkelhastigheten $\vec{\omega}$ peker langs rotasjonsaksen:



$$\vec{\omega} = \omega\hat{z} = \omega\hat{\omega}$$

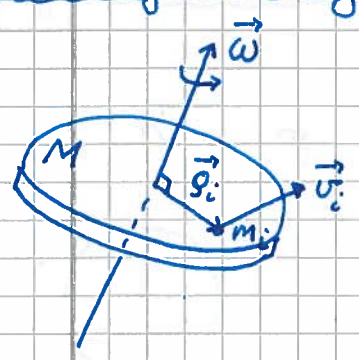
$$\vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} = \rho\omega\hat{\varphi}$$

Vi ser at $\hat{\varphi} = \hat{z} \times \hat{\rho}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}}$$

Rotasjonsenergi. Treghtetsmoment [YF 9.4; LL 6.4, 6.3]



$$K_{rot} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$I \stackrel{def}{=} \sum_i m_i r_i^2 =$ legemets treghtetsmoment
mhp den valgte akse

Hvis kontinuerlig massefordeling: $m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} dm$

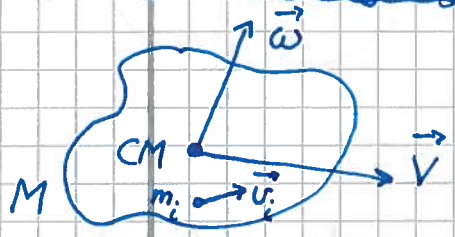
$$\Rightarrow I = \int r^2 dm$$

der $r =$ avstand fra akse til dm

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Rotasjonsenergi

Kinetisk energi for sturt legeme [YF 10.3; LL 6.6]



Fra def. $K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ finner en (etter litt regning, se notat på websiden):

$$K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

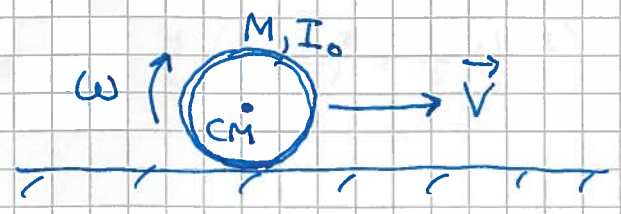
$M =$ total masse

$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM} =$ hastighet til CM

$I_0 =$ treghtetsmoment mhp rot. akse gjennom CM


$\vec{\omega} =$ vinkelhastighet om u

Eks: Rullende hjul



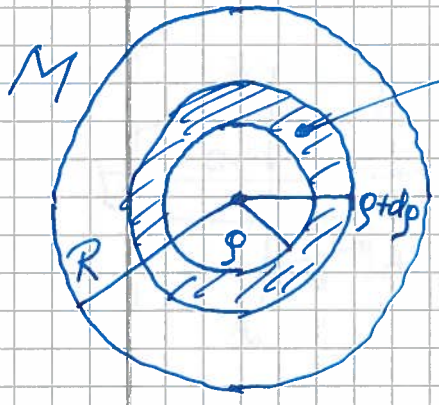
Tregghetsmoment; de viktigste eksemplene [YF 9.6; LL 6.3]

Eks 1: Ring og hul sylinder

M  $I_0 = \int \rho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$ [Må huskes/kunnes!]



Eks 2: Skive og kompakt sylinder

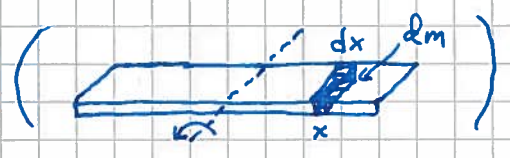
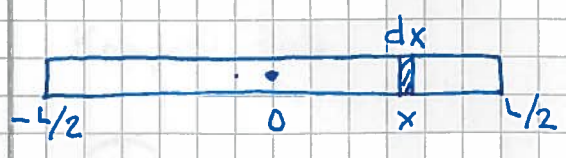
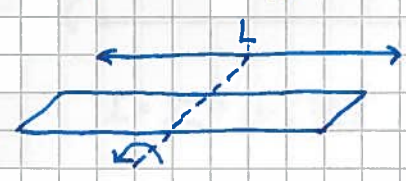
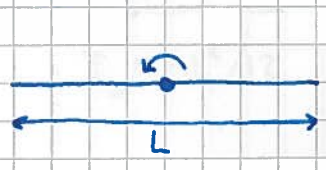
M 

$$dI_0 = \rho^2 dm = \rho^2 M dA/A$$

$$= \rho^2 M \frac{2\pi \rho d\rho}{\pi R^2} = \frac{2M}{R^2} \rho^3 d\rho$$

$$\Rightarrow I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}}$$
 [Oppgis]

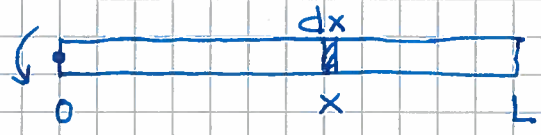
Eks 3: Tynn stang og tynn plate, akse gjennom CM (se fig)



$\rho = x, dm = M dx/L, dI_0 = x^2 M dx/L$

$$\Rightarrow I_0 = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{M}{L} \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^3 \right) = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$
 [Oppgis]

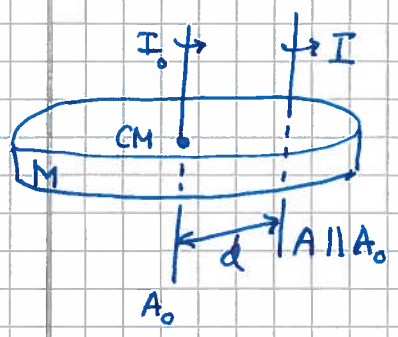
Eks 4: Tynn stang, akse gjennom stangas ende



$$I = \int_0^L x^2 M dx / L = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

Eks 5: Kuleskall $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$
Eks 6: Kompakt kule $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$ } [Oppgiss]

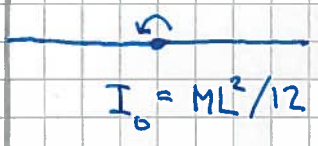
Steiners sats (parallelakse teoremet) [YF 9.5; LL 6.3]



$$I = I_0 + Md^2$$

(Bevis: Se notat)

Eks 1: Tynn stang

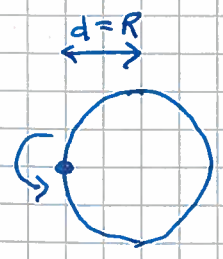


$$I = I_0 + M \cdot (L/2)^2 = \frac{1}{3} ML^2 \text{ (som over!)}$$

Eks 2: Kompakt kule



$$I_0 = \frac{2}{5} MR^2$$



$$I = I_0 + MR^2 = \frac{7}{5} MR^2$$