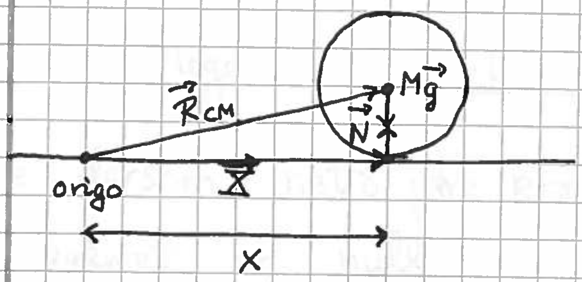
Med konstant $\vec{L}$ er $d\vec{L}/dt = 0$, og dermed $\vec{\tau} = 0$:



$(N1 \Rightarrow N = Mg)$

$$\vec{\tau} = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} + \vec{X} \times \vec{N}$$

$$= (X\hat{x} + R\hat{y}) \times (-Mg\hat{y}) + (X\hat{x}) \times (Mg\hat{y})$$

$$= -XMg\,\hat{z} + XMg\,\hat{z} = \underline{\underline{0}}$$ OK!

Bevaringslover

Vi kan nå oppsummere bevaringslovene for energi, impuls og dreieimpuls:

- For isolert system (ingen ytre krefter) er total energi E, impuls $\vec{p}$ og dreieimpuls $\vec{L}$ bevart
- I konservativt system er mekanisk energi, $K + U$, bevart
- Hvis netto ytre kraft på et system er null, er systemets totale impuls $\vec{p}$ bevart
- Hvis netto ytre dreiemoment på et system er null, er systemets totale dreieimpuls $\vec{L}$ bevart

Statisk likevekt [YF 11.1–11.3 ; LL 7.1]

Et stivt legeme forblir i ro ($\vec{p} = 0$ og $\vec{L} = 0$)

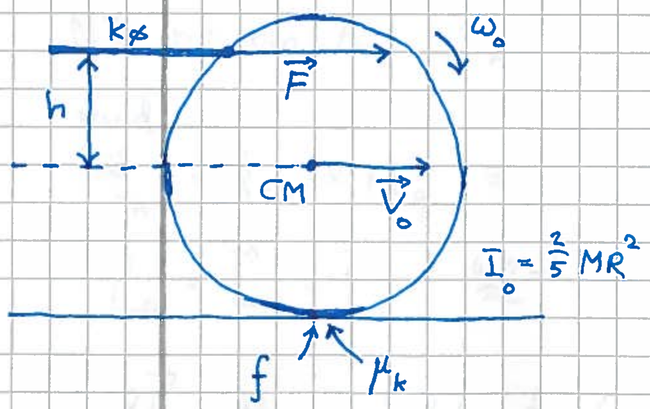
bare dersom netto ytre kraft og netto ytre dreiemoment på legemet er null :

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{konstant} \quad (\text{f.eks. } \vec{p} = 0)$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{konstant} \quad (\text{f.eks. } \vec{L} = 0)$$

Eksempler, N2 rotasjon, dreieimpuls (-bevarelse)

Eks 1: Snooker [LL 6.7 ; øving 6]



Anta kortvarig støt med køen i høyde h over senterlinjen. $F \gg f$, så vi neglisjerer f i selve støtet.

Bestem kulas bevegelse.

Tips: N2 og N2, rotasjon gir V_0 og ω_0 når støtet er ferdig; antar varighet Δt ($\gtrsim 0$) og F = konstant :

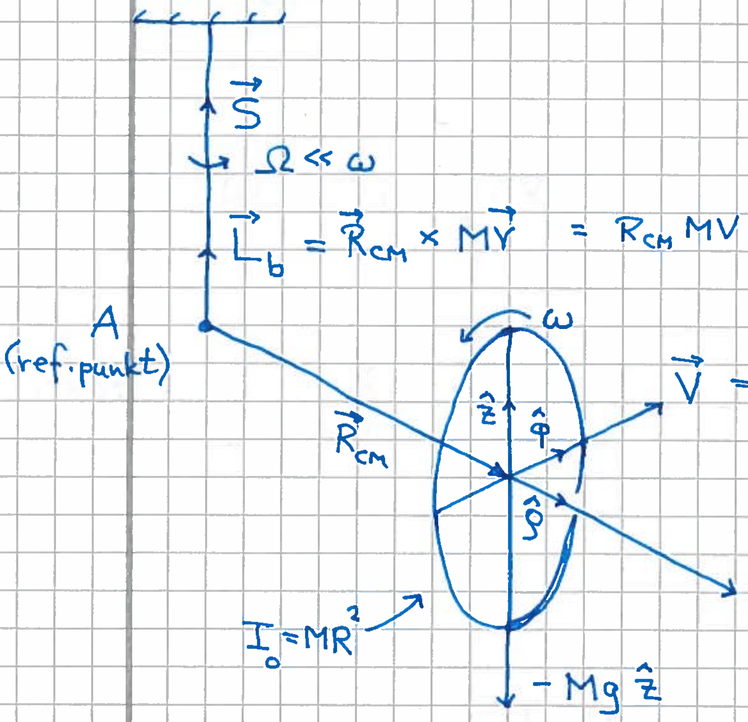
$$F \cdot \Delta t = \Delta p = M V_0 \quad ; \quad \tau \cdot \Delta t = F \cdot h \cdot \Delta t = \Delta L = I_0 \, \omega_0$$

For stor h $\Rightarrow$ $\omega_0 > V_0/R$ $\Rightarrow$ sluring, og $\vec{f}$ mot høyre

For liten h $\Rightarrow$ omvendt

"Riktig" h $\Rightarrow$ $\omega_0 = V_0/R$ og ren rulling med en gang

Eks 2: Presesjon [YF 10.7 ; L 6.10] 46



$$\vec{L}_b = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} = R_{CM} MV\,\hat{z} = MR_{CM}^2\,\Omega\,\hat{z}$$

$$\vec{V} = V\hat{\varphi} = R_{CM}\,\Omega\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{L}_s = I_0\,\vec{\omega} = MR^2\omega\,\hat{\varrho}$$

Finn T_Ω (T_ω) ; $T_\Omega = 2\pi/\Omega$, $T_\omega = 2\pi/\omega$

Exp: $M = 5\,kg$, $R = 0.3\,m$, $R_{CM} = 0.2\,m$, $T_\Omega \approx \underline{4.7\,s}$

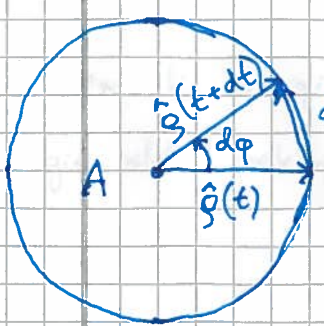
N2, rot. om A : $\vec{\tau}_A = d\vec{L}_A/dt$

med

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g} = R_{CM} Mg\,\hat{\varphi} \qquad [\,\hat{\varrho} \times (-\hat{z}) = \hat{\varphi}\,]$$

$$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s \overset{\omega \gg \Omega}{\approx} \vec{L}_s = MR^2\omega\,\hat{\varrho}$$

$$\Rightarrow d\vec{L}_A/dt \approx MR^2\omega\, d\hat{\varrho}/dt$$



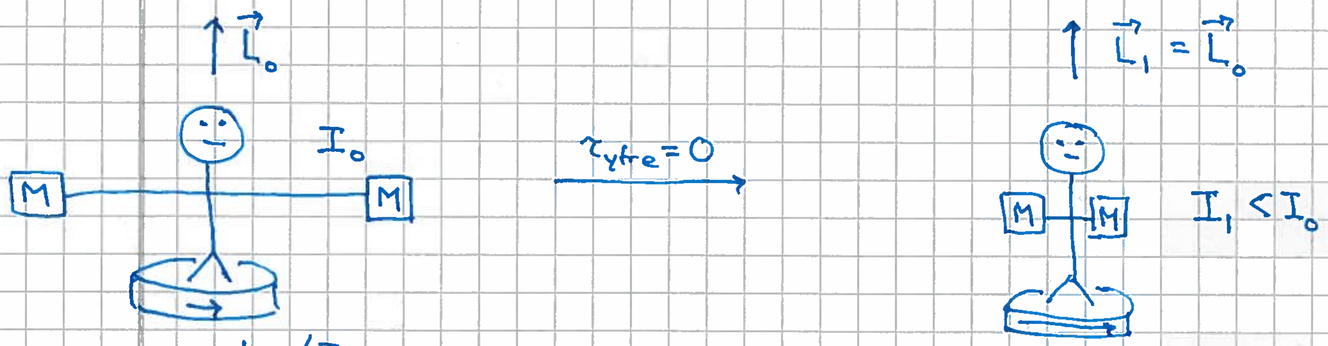
$$d\hat{\varrho} = |\hat{\varrho}| \cdot d\varphi \cdot \hat{\varphi} = d\varphi \cdot \hat{\varphi} \Rightarrow \frac{d\hat{\varrho}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\,\hat{\varphi} = \Omega\,\hat{\varphi}$$

$$\Rightarrow \underbrace{R_{CM} Mg\ \hat{\varphi}}_{\vec{\tau}_A} = \underbrace{MR^2 \omega \Omega\ \hat{\varphi}}_{d\vec{L}_A/dt}$$

$$\Rightarrow \omega = R_{CM}\, g / R^2 \Omega \quad \Rightarrow T_\omega = \underline{\underline{\frac{(2\pi R)^2}{R_{CM}\, g\, T_\Omega}}}$$

Exp: $\quad T_\omega \approx \dfrac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot T_\Omega} \approx \dfrac{4}{2T_\Omega} \approx \underline{0.4\,s}$

Eks 3: Piruett [YF 10.6 ; LL 6.5]



$\omega_0 = L_0 / I_0$ $\qquad\qquad$ $\omega_1 = L_1 / I_1 > \omega_0$

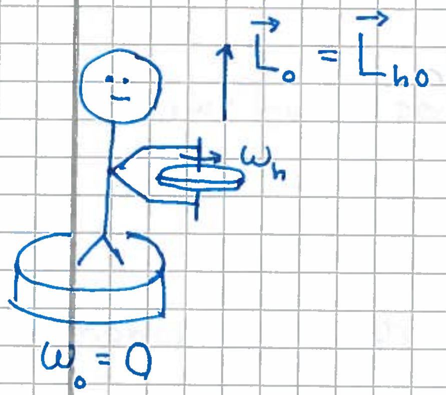
$$L_1 = L_0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{L_1}{I_1} = \frac{I_0 \omega_0}{I_1} > \omega_0 \text{ , da } I_0 > I_1$$

Kin. energi:

$$K_0 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 \ ; \quad K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_0 \omega_0 \omega_1 = K_0 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_0} > K_0$$

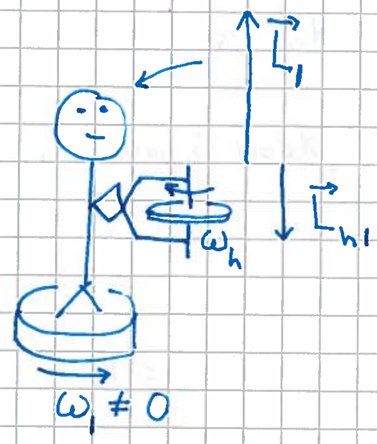
(Kjemisk energi i musklene brukes til å utføre arbeid, gir økt mekanisk energi.)

Eks 4: Dreieimpulsbevarelse med sykkelhjul og student



$$\xrightarrow{\text{Hjulet snus}}$$

$$\vec{\tau}_{ytre} = 0$$



$$\vec{L}_1 + \vec{L}_{h1} = \vec{L}_0 \quad ; \quad \vec{L}_{h1} = -\vec{L}_0$$

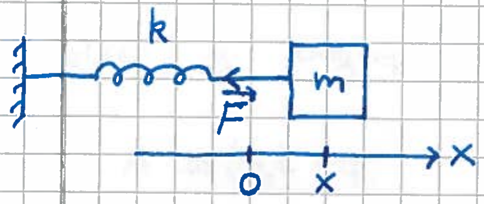
$$\Rightarrow \quad \underline{\vec{L}_1 = 2\vec{L}_0}$$

Svingninger [YF 14 ; LL 9]

= oscillasjoner = periodisk oppførsel omkring en likevekt

Eks: masse/fjær, pendler, instrumentstreng, atom i molekyl osv osv

Harmonisk oscillator [YF 14.2 ; LL 9.1-9.3]



x = posisjonen til m
= fjæras forlengelse ($x > 0$) evt
sammenpressing ($x < 0$) relativt
likevekt ($x = 0$)

$\vec{F}$ = kraft på m fra fjæra

$\vec{F}$ har retning $\mp \hat{x}$ når $x \gtrless 0$ (trekker/skyver m tilbake mot likevekt)

Ideell fjær; Hookes lov:

$$\boxed{\vec{F} = -kx\,\hat{x}}$$

k = fjærkonstanten ; $[k] = \mathrm{N/m}$

N2 gir: $-kx = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$, som er diff.ligning for enkel harmonisk oscillator i 1D.

Skriver generelt $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, dvs $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, som har løsning

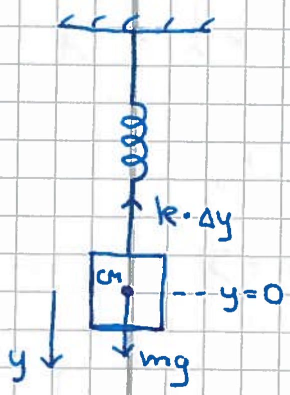
$$x(t) = B\cos\omega_0 t + C\sin\omega_0 t$$

eventuelt

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

der integrasjonskonstantene B, C evt A, φ bestemmes med to initialbetingelser, f.eks. $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$.

Samme ligning vertikalt i tyngdefeltet:



Likevekt når $mg = k\,\Delta y$, dvs fjæra forlenget med $\Delta y = mg/k$. Anta CM i $y=0$ i "strukket likevekt". Hvis CM er i pos. y, gir N2:

$$m\ddot{y} = \Sigma F = mg - k(\Delta y + y) = -ky$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad \text{med } \omega_0 = \sqrt{k/m}, \text{ som før.}$$

Størrelser og begreper (se sirkelbevegelse):

$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ = oscillatorens posisjon (utsving fra likevekt)

A = amplitude = max utsving fra likevekt; $[A] = [x]$

ω_0 = vinkelfrekvens; $[\omega_0] = s^{-1}$

$T = 2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr hele svingning; $[T] = s$

$f = 1/T$ = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet; $[f] = s^{-1} = Hz$

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

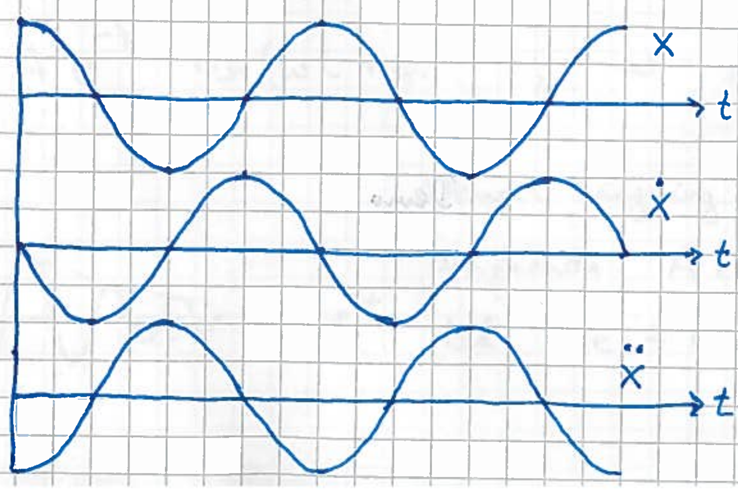
φ = fasekonstant; $[\varphi] = 1$

$\dot{x}(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2)$ = hastighet

$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi) = \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$ = akselerasjon

Dvs: Faseforskjell $\pi/2$ mellom x og $\dot{x}$

—"— π mellom x og $\ddot{x}$ (i motfase)

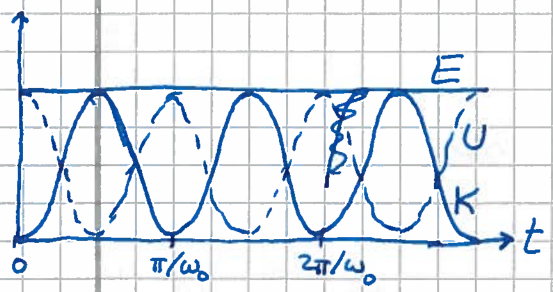


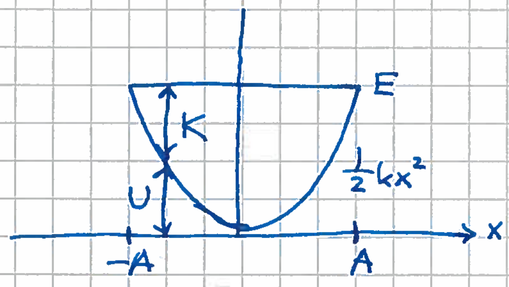
Energi i harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4]

$$K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t \qquad (\text{antar } \varphi = 0)$$

$$U = -\int_0^x (-kx)\, dx = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$\Rightarrow E = K + U = \frac{1}{2} k A^2$, dvs total mek. energi bevart; konservativt system

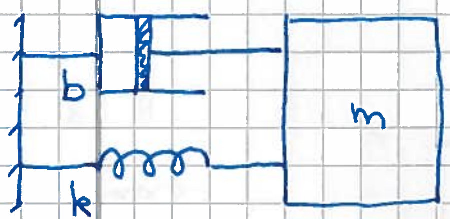




Dempet fri svingning [YF 14.7; LL 9.7]

Antar $f = -b\dot{x}$, dvs langsom bevegelse i fluid

[Større $\dot{x}$ i fluid: $f = -D\dot{x}^2$; Tørr friksjon: $f = \mu_k N$]



N2: $-kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$

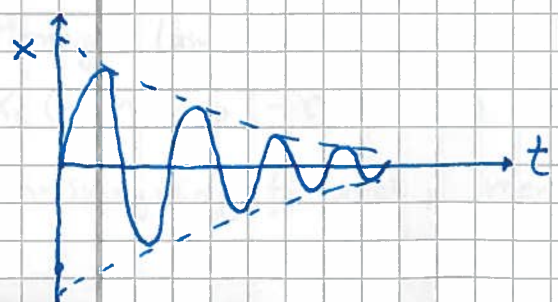
$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

med $\gamma \equiv b/2m$, $\omega_0^2 \equiv k/m$; $[\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$

[Matte 3; $x \sim \exp(zt)$; karakteristisk ligning; imaginære, komplekse, reelle røtter...]

Underkritisk demping, $\gamma < \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$



Dempet svingning med eksp. avtagende amplitude, $A \exp(-\gamma t)$; dvs redusert til $A/e \simeq 0.37 A$ etter tid $1/\gamma$

Overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

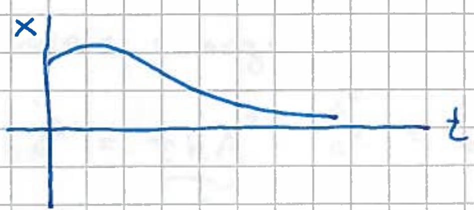
$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$ $\quad (\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma)$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$

Eks: Støtdempere med $\gamma \approx \omega_0$ gir god kjørekomfort.

Merk at $\gamma \geq \omega_0$ gir ikke svingninger:



Her er $x(0) > 0$ og $\dot{x}(0) > 0$

Tvungen svingning og resonans

[YF 14.8 ; LL 9.9]

$F(t) = F_0 \cos \omega t$ = ytre harmonisk kraft

N2: $-kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \qquad (2\gamma \equiv b/m, \ \omega_0^2 \equiv k/m)$$

Generell løsning: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Homogen løsning:

$x_h(t) \sim \exp(-\gamma t) \approx 0$ når $t \gg 1/\gamma$; relevant for innsvingningsforløpet, men dør ut (eksponentielt)

Vi antar $t \gg 1/\gamma$

$$\Rightarrow x(t) = x_p(t) = A(\omega)\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$; innsetting i N2 gir

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2\}^{1/2}} \quad ; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\gamma\omega}\right\}$$

Resonans: Svært stor A hvis $\omega \approx \omega_0$ og $\gamma \ll \omega_0$ (svak demping).

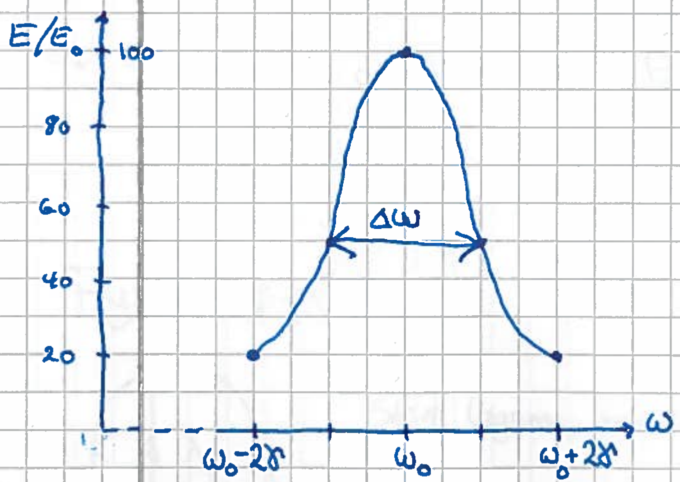
$$A(\omega_0) = \frac{F_0}{2m\gamma\omega_0} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\cdot\frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{F_0}{k}\cdot\frac{\omega_0}{2\gamma} = A_0\frac{\omega_0}{2\gamma} \gg A_0 \; (=A(0))$$

[Tacoma bridge, 1940; "torsjonsvridning" med periode ca 5 s]

Oscillatorens energi:

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \underbrace{\frac{1}{2}kA_0^2}_{E_0}\cdot\frac{A^2}{A_0^2} = E_0\cdot\frac{(F_0/m)^2/(F_0/k)^2}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega)^2} = \underline{\underline{E_0\cdot\frac{\omega_0^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}}$$

Eks: $\omega_0/\gamma = 20$



Resonanskurvens halvverdibredde:

$$\Delta\omega \approx 2\gamma$$

Oscillatorens Q-faktor:

$$Q \equiv \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Skarp resonans $\Rightarrow$ stor Q-faktor

Her er $Q = 10$. Redusert demping γ gir smalere og høyere resonans.

Exp: Stav med messinglodd. Plotter $E/E_0 = A^2/A_0^2$ vs f.

$T_0 \approx 0.65$ s $\quad f_0 \approx 1.55$ Hz $\quad \Delta f \approx 0.15$ Hz

$$\Rightarrow \underline{Q \approx 10}$$