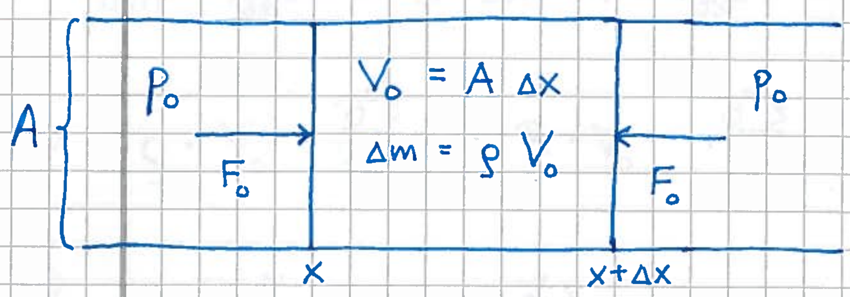
Longitudinale mekaniske bølger. Lyd

[YF 16.1, 16.2 ; LL 10.6]

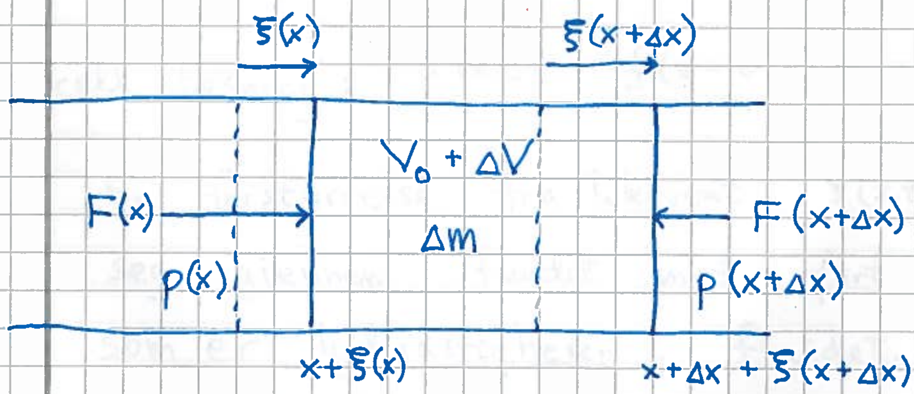
Ser på rør med fluid.

I likevekt:



ρ = masse pr volumenhet

Forstyrrelse (Kompresjon eller utvidelse):



$p(x) = p_0 + \Delta p(x)$

$p(x+\Delta x) = p_0 + \Delta p(x+\Delta x)$

$\xi = \xi(x,t)$ = midlere utsving fra likevekt for molekyler med likevektsposisjon x

N2 for massen Δm:

$$\Delta m \cdot \ddot{\xi} = F(x) - F(x+\Delta x)$$

$$= \left[p(x) - p(x+\Delta x) \right] \cdot A$$

$$= \left[\Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x) \right] \cdot A$$

Fra s. 63: $B = -\dfrac{\Delta p}{\Delta V / V_0} \Rightarrow \Delta p = -B \dfrac{\Delta V}{V_0}$

Fra figuren ser vi:

$$\Delta V = A \cdot \left[\xi(x+\Delta x) - \xi(x) \right] = A \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = V_0 \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x) = -B \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x - \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} \right] = B \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \Delta m \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = B \cdot \Delta x \cdot A \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \rho \cdot V_0 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = B \cdot V_0 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad ; \quad v = \sqrt{B/\rho}}$$

Generell løsning: $\xi(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$

Dvs: En forstyrrelse fra likevekt $\xi(x,t)$ forplanter seg gjennom fluidet med fart $v = \sqrt{B/\rho}$, som er <u>lydhastigheten</u> i fluidet.

Eks:

Luft. $\rho = 1.29 \text{ kg/m}^3$, $B = 1.42 \cdot 10^5$ Pa $\left(= \text{N/m}^2 = \frac{\text{kg m/s}^2}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2}\right)$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{1.42 \cdot 10^5 \text{ kg/m} \cdot \text{s}^2}{1.29 \text{ kg/m}^3}} \approx 332 \text{ m/s}$$

Vann. $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $B = 2.2 \cdot 10^9$ Pa

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2.2 \cdot 10^9}{1000}} \text{ m/s} \approx 1.5 \text{ km/s}$$

(B øker forholdsvis mer enn ρ $\Rightarrow$ større v i ~~luft~~ vann enn i luft)

Mekaniske bølger i faste stoffer:

Tynn stang:

Longitudinale bølger; E erstatter B; $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$; $v = \sqrt{E/\rho}$

Eks: Stål. $\rho = 7800\ \text{kg/m}^3$, $E = 200\ \text{GPa}$ $\Rightarrow$ $v \approx 5.1\ \text{km/s}$

Generelt:

Forstyrrelse fra likevekt $\Rightarrow$ Både normalspenning og skjærspenning

$\Rightarrow$ Både longitudinale og transversale bølger

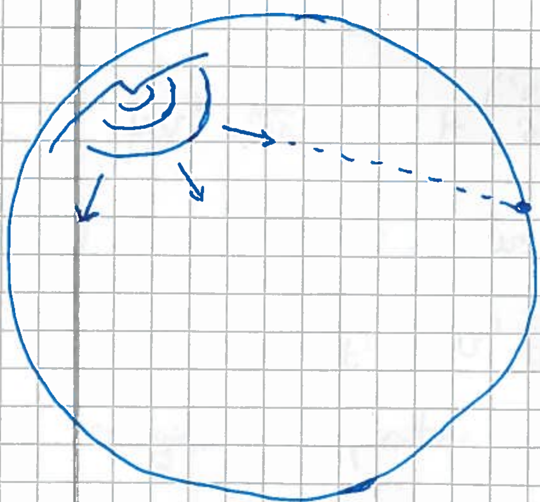
L: $v = \sqrt{(B + \frac{4}{3}G)/\rho}$

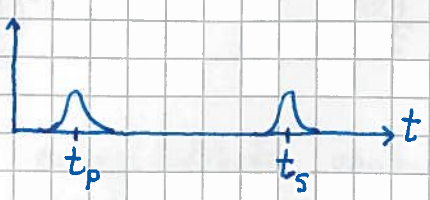
T: $v = \sqrt{G/\rho}$

Eks: Seismiske bølger og jordskjelv

Primærbølge (L) $v_p = \sqrt{(B + \frac{4}{3}G)/\rho} \sim 5.5 - 13.7\ \text{km/s}$

Sekundærbølge (T) $v_s = \sqrt{G/\rho} \sim 3.0 - 7.3\ \text{km/s}$

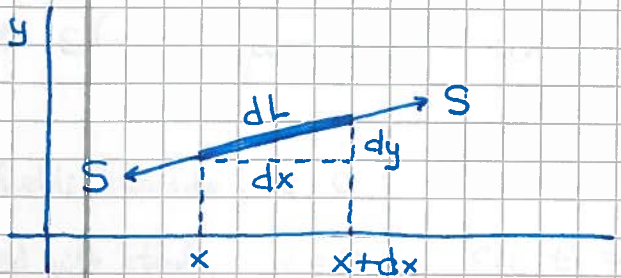




Måling av $t_s - t_p$ på diverse steder gjør det mulig å lokalisere hvor (og når) jordskjelvet skjedde.

Energi transportert med bølger [YF 15.5 ; LL 10.5]

Bruker transv. bølge på streng som eksempel.



Likevekt : $K = 0, \quad U = 0$

Forstyrrelse fra likevekt gir strengelementet hastighet $(\partial y/\partial t)$ og forlengelse $(dL - dx)$

Kin. energi : $dK = \frac{1}{2}\, dm\, v_y^2 = \frac{1}{2}\, \mu\, dx \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$

Pot. energi : $dU = S \cdot (dL - dx)$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2} \approx dx\left(1 + \frac{1}{2}\left(\partial y/\partial x\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow dU = \frac{1}{2}\, S\, dx \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Mekanisk energi pr lengdeenhet (energitetthet) : $[\varepsilon] = J/m$

$$\varepsilon = dE/dx = dK/dx + dU/dx$$

$$= \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

Siden $y(x,t) = y(x \pm vt)$, er $\frac{\partial y}{\partial t} = \pm v \frac{\partial y}{\partial x}$.

Har også $v = \sqrt{S/\mu}$, dvs $S = \mu v^2$

Dermed :

$$\varepsilon = \mu v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \pm \mu v \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$\varepsilon(x,t) = \varepsilon(x \pm vt)$, dvs energitettheten oppfyller bølgeligningen

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2},$$

dvs energien forplanter seg med hastighet v (her: $\sqrt{S/\mu}$) i bølgens forplantningsretning.

Eks: Harmonisk bølge, $y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t)$.

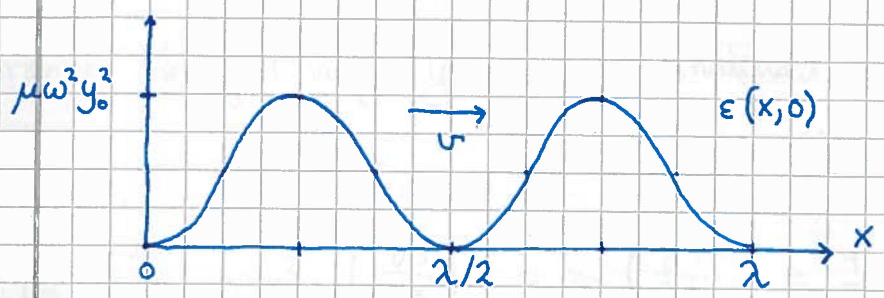
$k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi/T$, $v = \lambda/T = \omega/k$

$$\partial y/\partial x = -k y_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \varepsilon(x,t) = \mu v^2 k^2 y_0^2 \sin^2(kx-\omega t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2(kx-\omega t)$$

Øyeblikksbilde, $t=0$: $\varepsilon(x,0) = \mu\omega^2 y_0^2 \sin^2 kx$

Ved gitt sted, $x=0$: $\varepsilon(0,t) = \mu\omega^2 y_0^2 \sin^2 \omega t$



Midlere energitetthet i harmonisk bølge:

Romlig middelverdi: $$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\lambda \varepsilon(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \varepsilon(x,t)\,dx$$

Tidsmiddel:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\int_0^T \varepsilon(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T \varepsilon(x,t)\,dt$$

Vi ser fra figuren ovenfor: $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_0^2$

Tilsvarende er også $\langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{2}\mu\omega^2 y_0^2$

Matematisk: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, og vi må ha $\langle\sin^2\varphi\rangle = \langle\cos^2\varphi\rangle$,

slik at $\langle\sin^2\varphi\rangle = \langle\cos^2\varphi\rangle = 1/2$.

Evt: $\overline{\sin^2\varphi} = \overline{\cos^2\varphi} = 1/2$

Utledningene blir tilsvarende for en plan longitudinal bølge (dvs lydbølge) i et fluid.

$\Rightarrow$ Vi kan "oversette" resultatene direkte:

1D $\rightarrow$ 3D

$\mu \rightarrow \rho$ = masse pr volumenhet

$\varepsilon = dE/dx \longrightarrow dE/dV$ = energi pr volumenhet (J/m^3)

transv. strengutsving $y \rightarrow$ longitudinalt (midlere) molekylutsving ξ fra likevekt

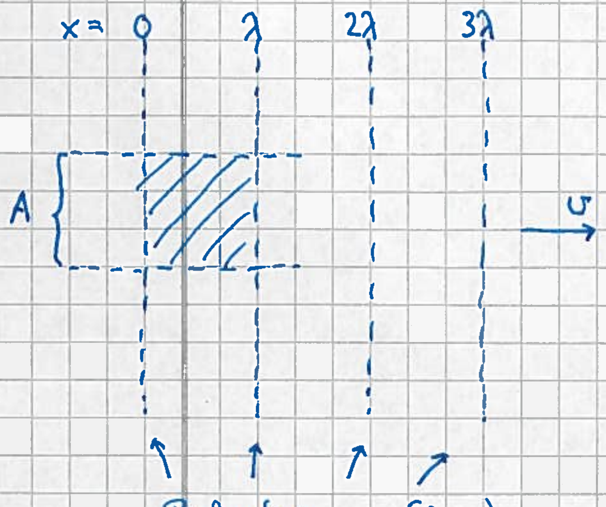
$$\Rightarrow \varepsilon(x,t) = \rho v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 = \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 = \pm \rho v \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

med $v = \sqrt{B/\rho}$

Bølgens intensitet [YF 16.3 ; LL 10.5]

I = midlere overført effekt pr flateenhet $\Rightarrow [I] = W/m^2$

Eks: Plan harmonisk lydbølge



(Bølgefronter: Flater med konstant fase.) (lik)

Energiinnhold i skravert volum:

$\bar{\varepsilon} \cdot A \cdot \lambda$

Denne energien passerer flaten med areal A ved $x = \lambda$ i løpet av en periode T

$$\Rightarrow I = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{\bar{\varepsilon} A \lambda / T}{A} = \underline{\underline{\bar{\varepsilon} \cdot v}}$$

$(v = \lambda/T)$

Desibel (dB)

Stort tallmessig spenn i lydintensiteter:

Knapt hørbar lyd: $I = 10^{-12}\ W/m^2 = I_0 =$ "referanseverdi"

Smertegrense: $I = 1\ W/m^2$

$\Rightarrow$ Bruker gjerne en logaritmisk skala:

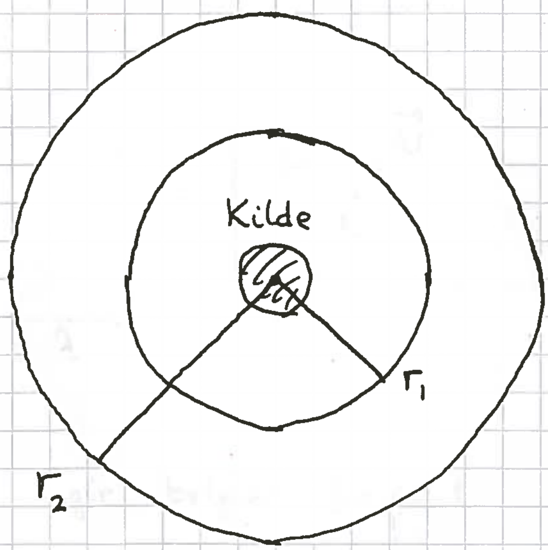
$\boxed{\beta = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$ = lydtrykksnivå målt i dB (desibel)

Eks: Høregrensen $\beta = 10 \log \frac{10^{-12}}{10^{-12}} = 10 \log 1 = \underline{0\ dB}$

Smertegrensen $\beta = 10 \log \frac{1}{10^{-12}} = 10 \cdot 12 = \underline{120\ dB}$

Kulebølger

Kuleformet bølgekilde $\Rightarrow$ Bølge radielt utover med lik intensitet i alle retninger.



Kuleformede bølgefronter forplanter seg radielt utover.

Energibevarelse $\Rightarrow$

Like stor effekt passerer vilkårlig kuleflate

$\Rightarrow \langle P_1 \rangle = \langle P_2 \rangle \Rightarrow 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$

$\Rightarrow I_2 / I_1 = r_1^2 / r_2^2 \Rightarrow$ $\boxed{I(r) \sim 1/r^2 \text{ for kulebølger}}$

Eks: $\beta = 110$ dB 2 m unna kuleformet høyttaler.

Hvor langt unna er $\beta = 80$ dB ?

Løsn: $I(2m) = I_0 \cdot 10^{11} = A/2^2$; $I(r) = I_0 \cdot 10^{8} = A/r^2$

$\Rightarrow r = 2 \cdot (10^{11-8})^{1/2}$ m $= 2 \cdot 10^{3/2}$ m $\approx \underline{2 \cdot 31.6\text{m}} = \underline{\underline{63\text{ m}}}$

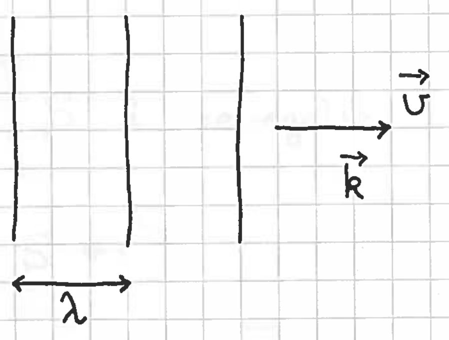
Sylinderformet bølgekilde $\Rightarrow$ Sylinderbølger med lik effekt gjennom areal $L \cdot 2\pi r \sim r$

$\Rightarrow \underline{I(r) \sim 1/r}$

Plan bølgekilde $\Rightarrow$ Plane bølger med lik effekt gjennom areal uavhengig av r (som nederst s. 70)

$\Rightarrow \underline{I(r) = \text{konst.}}$

Plan harmonisk bølge i vilkårlig retning :



$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$

$\vec{k}$ = bølgetallsvektoren

$k = |\vec{k}| = 2\pi/\lambda$; $\hat{k} = \hat{v}$

$\vec{k}$ angir bølgens forplantningsretning

$\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$, $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$

Eks: Forplantning i z-retning betyr at $k_x = k_y = 0$ og $k = k_z$

$\Rightarrow \vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}_0 \sin(kz - \omega t)$

Hvis L-bølge : $\vec{\xi}_0 = \xi_0 \hat{z}$.   Hvis T-bølge : $\vec{\xi}_0$ i xy-planet

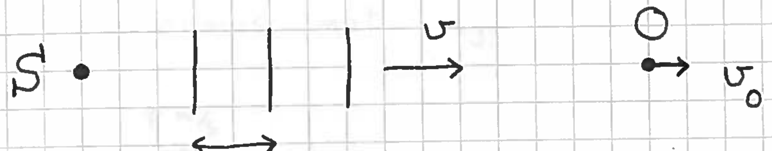
Dopplereffekt [YF 16.8 ; LL 10.8]

Relativ bevegelse mellom bølgekilde S og observatør O (langs forbindelseslinjen)

$\Rightarrow$ Observert frekvens $f_O \neq$ Utsendt frekvens f_S

① S i ro, O i bevegelse

[Velger positive v mot høyre]

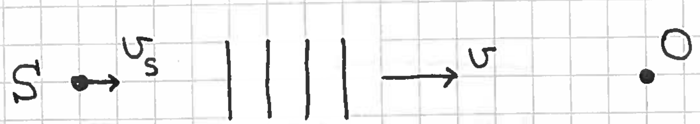


Bølgefarten relativt O : $v - v_O$

$\Rightarrow$ Frekvens målt av O :

$$f_O = \frac{v - v_O}{\lambda} = \frac{v - v_O}{v} \cdot f_S < f_S \quad \text{når } v_O > 0$$

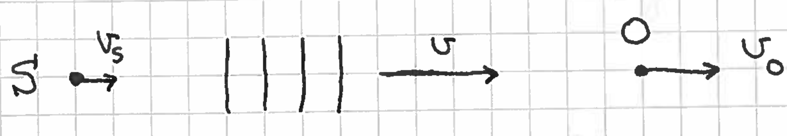
② S i bevegelse, O i ro



$\lambda = (v - v_S)/f_S$ (målt av både S og O)

$$\Rightarrow f_O = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v - v_S} \cdot f_S > f_S \quad \text{når } v_S > 0$$

③ Begge i bevegelse



$$\Rightarrow f_O = \frac{v - v_O}{\lambda} = \frac{v - v_O}{v - v_S} \cdot f_S$$

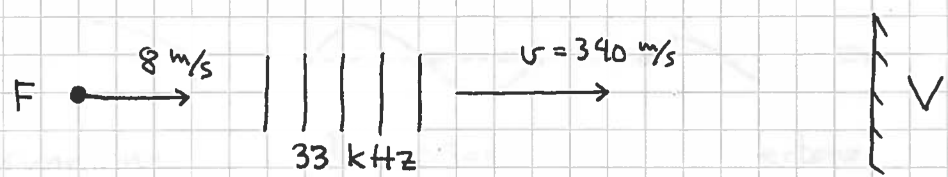
④ Mediet i bevegelse; vind!

v_m = lufthastigheten $\Rightarrow$ v erstattes av $v + v_m$

$$\Rightarrow \boxed{f_o = \frac{v + v_m - v_o}{v + v_m - v_s} \cdot f_s}$$

Se youtube for diverse eksempler med tog og biler.

Eks: Flaggermus mot vegg.



Hvilken frekvens hører flaggermusen (F) på ekkoet fra veggen (V)?

Løsn: F er først kilde og V er observatør.

Frekvens "observert" av V: $f_V = \frac{v}{v - v_F} \cdot f_F$

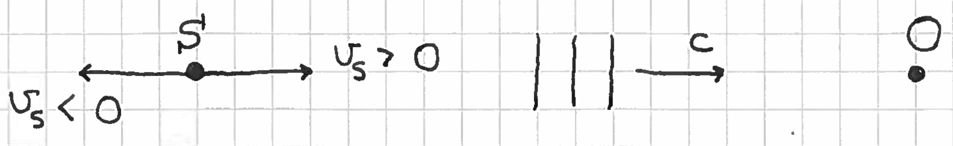
V sender lyd med samme frekvens f_V tilbake.

F er nå observatør, på vei mot kilden V: ($f_E = f_{Ekko}$)

$$f_E = \frac{v + v_F}{v} \cdot f_V = \frac{v + v_F}{v - v_F} \cdot f_F = \frac{348}{332} \cdot 33\,\text{kHz} = \underline{\underline{34.6\,\text{kHz}}}$$

Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$v \rightarrow c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s



$$f_o \approx \frac{c}{c - v_s} \cdot f_s \quad (\text{så lenge } |v_s| \ll c)$$

"Rød-skift" når S på vei bort fra O (oss), dvs $v_s < 0$, og $f_o < f_s$, dvs endring av f_s i retning mindre frekvens ($f_{Rød} < f_{Blå}$)