

**TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.**  
**Løsningsforslag til øving 12.**

1) Med isoterme forhold og ideell gass blir bulkmodulen

$$B = -V(\partial p/\partial V)_T = -V(\partial(Nk_B T/V)/\partial V)_T = Nk_B T/V,$$

slik at  $v = \sqrt{(Nk_B T/V)/(mN/V)} = \sqrt{k_B T/m}$ . Riktig svar: B.

2) Med adiabatisk forhold og ideell gass er  $pV^\gamma$  konstant, dvs vi kan skrive  $p(V) = AV^{-\gamma}$ . Bulkmodulen blir da

$$B = -V \cdot A \cdot (-\gamma)V^{-\gamma-1} = \gamma p,$$

og siden  $p = Nk_B T/V$ , har vi  $v = \sqrt{\gamma k_B T/m}$ . Riktig svar: A.

3) Molar masse 29 gram gir molekylmasse  $m = 0.029/6.022 \cdot 10^{23} \text{ kg} = 4.82 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ . Med  $T = 293 \text{ K}$  gir dette  $v = 290 \text{ m/s}$ . Riktig svar: A.

4) Luft er nesten utelukkende en toatomig gass, slik at  $\gamma \simeq 1.4$ . Dette gir  $v = 343 \text{ m/s}$ . Riktig svar: D.

5) I en ideell gass er det ingen vekselvirkning mellom molekylene, slik at indre energi  $U$  er lik molekylenes kinetiske energi  $K$ . Toatomige molekyler har 5 kvadratiske ledd i energifunksjonen:  $K = (m/2)(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + (I_0/2)(\omega_x^2 + \omega_y^2)$  (når vi velger  $z$ -aksen langs molekylets akse; null treghetsmoment med hensyn på rotasjon omkring molekylets akse for lineære molekyler; intet bidrag fra kinetisk vibrasjonsenergi, da tilgjengelig termisk energi ved normale temperaturer er for liten til å eksitere vibrasjonsbevegelse i toatomige molekyler (utover laveste vibrasjonsenergitilstand, den såkalte grunntilstanden)). Ekvipartisjonsprinsippet sier at hvert kvadratiske ledd i energifunksjonen gir et bidrag  $k_B T/2$  til indre energi  $U$  pr molekyl når systemets temperatur er  $T$ . Dermed er  $U(T) = 5Nk_B T/2$  for en ideell toatomig gass. Da er  $C_V = (dQ/dT)_V = (dU/dT)_V$  (siden  $dW = p dV = 0$  når eksperimentet foretas ved konstant volum), dvs  $C_V = 5Nk_B/2$ . Hvis eksperimentet foretas ved konstant trykk, er  $C_p = (dQ/dT)_p = (dU/dT)_p + p(dV/dT)_p = 5Nk_B/2 + p \cdot Nk_B/p = 7Nk_B/2$ . Riktig svar: C.

6) Arbeid utført pr syklus er gitt ved arealet som omslutes av kurven  $p(V)$ . Her blir da  $W = (5p_0 - p_0) \cdot (4V_0 - V_0) = 12p_0 V_0$ . Riktig svar: C.

7) La oss nummerere de fire hjørnene av den rektangulære  $p(V)$ -kurven fra 1 til 4, med klokka, og med tilstand 1 oppe til venstre, dvs  $p_1 = 5p_0$  og  $V_1 = V_0$ . Ideell gass tilstandsligning gir da  $T_1 = p_1 V_1 / Nk_B = 5p_0 V_0 / Nk_B$ ,  $T_2 = p_2 V_2 / Nk_B = 20p_0 V_0 / Nk_B$ ,  $T_3 = p_3 V_3 / Nk_B = 4p_0 V_0 / Nk_B$ , og  $T_4 = p_4 V_4 / Nk_B = p_0 V_0 / Nk_B$ . I stigende rekkefølge, og i enheten  $p_0 V_0 / Nk_B$  blir dette  $T_4 = 1$ ,  $T_3 = 4$ ,  $T_1 = 5$  og  $T_2 = 20$ . Riktig svar: D.

8) Varme som overføres fra omgivelsene til gassen er  $C_p \Delta T$  for de to isobare delprosessene (12 og 34), og  $C_V \Delta T$  for de to isokore delprosessene (23 og 41). Siden temperaturen i gassen avtar fra tilstand 2 til tilstand 3, og fra tilstand 3 til tilstand 4, er dette delprosesser der varme *avgis* fra gassen til omgivelsene. Dette er ikke varme som vi må betale for, og skal dermed ikke regnes med når virkningsgraden skal beregnes. I den isobare utvidelsen fra 1 til 2 og i den isobare trykkøkningen fra 4 til 1, derimot, øker temperaturen i gassen. Dette gir positiv varmeoverføring fra omgivelsene til gassen, slik at  $Q_{12}$  og  $Q_{41}$  skal regnes med ved beregning av  $\eta$ . Her blir  $Q_{12} = (7Nk_B/2) \cdot (T_2 - T_1) = 105p_0 V_0/2$  og  $Q_{41} = (5Nk_B/2) \cdot (T_1 - T_4) = 10p_0 V_0$ . I alt blir  $Q_{\text{inn}} = 125p_0 V_0/2$ , slik at virkningsgraden er

$$\eta = W/Q_{\text{inn}} = 12/(125/2) = 24/125 \simeq 0.19.$$

Riktig svar: A.

Kommentar: En Carnot-prosess med isotermer ved høyeste ( $T_2$ ) og laveste ( $T_4$ ) temperatur i den aktuelle

prosessen ville hatt virkningsgrad  $\eta_C = 1 - T_4/T_2 = 1 - 1/20 = 0.95$ . Dette er en øvre teoretisk grense, og vi ser at vår kretsprosess har virkningsgrad (0.19) betydelig mindre enn dette.

9) Isobar utvidelse fra  $a$  til  $b$  betyr at  $T_a < T_b$ . Isoterm utvidelse fra  $b$  til  $c$  betyr at  $T_b = T_c$ . Adiabatisk kompresjon fra  $d$  til  $a$  betyr at  $T_d < T_a$  (siden en adiabat er brattere enn en isoterm i et  $pV$ -diagram). Dermed er  $T_d < T_a < T_b = T_c$ . Riktig svar: B.

10) Isobar kompresjon fra  $a$  til  $b$  betyr at  $T_a > T_b$ . Isoterm utvidelse fra  $b$  til  $c$  betyr at  $T_b = T_c$ . Adiabatisk kompresjon fra  $d$  til  $a$  betyr at  $T_d < T_a$  (siden en adiabat er brattere enn en isoterm i et  $pV$ -diagram). Dermed er  $T_b = T_c < T_d < T_a$ . Riktig svar: D.

11) En Carnot-varmepumpe har effektfaktor

$$\varepsilon_V^C = |Q_2/W| = |Q_2/(Q_2 + Q_1)| = |1/(1 + Q_1/Q_2)| = |1/(1 - T_1/T_2)| = T_2/(T_2 - T_1).$$

Her er  $T_2$  temperaturen til det varme reservoaret, dvs inne i stua, og  $T_1$  er temperaturen til det kalde reservoaret, dvs ute. Din venn hevder at han oppnår  $Q_2 = 10$  kW med  $W = 1$  kW når  $T_1 = 253$  K. Dette høres veldig mye ut: Hvis vi går ut fra at din venn i hvert fall har 15 varmegrader inne i stua, dvs minst  $T_2 = 288$  K, vil en Carnot-varmepumpe ikke kunne levere mer enn  $Q_2 = W \cdot T_2/(T_2 - T_1) = 1 \cdot 288/35 = 8.2$  kW. Mer enn dette vil det ikke være mulig å få ut av en reell varmepumpe, og i praksis vil nok effektfaktoren være en god del mindre enn som så. Men du kan trygt gratulere din venn med en god investering – en god varmepumpe kan gi god fyringsøkonomi i dag. Du kan tillate deg alternativ C, eventuelt alternativ B, hvis du ikke er av den snakkesalige typen. Men A og D vil ikke se bra ut.

12) En Carnot-kjølemaskin har effektfaktor

$$\varepsilon_K^C = |Q_1/W| = |Q_1/(Q_1 + Q_2)| = |1/(1 + Q_2/Q_1)| = |1/(1 - T_2/T_1)| = T_1/(T_2 - T_1).$$

Dermed:  $W = Q_1 \cdot (T_2 - T_1)/T_1 = 500 \cdot 33/255 = 65$  W. Riktig svar: B.