TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.
Løsningsforslag til Test 12.

Oppgave 1
Tyngdekraften har komponent $mg \sin \alpha$ nedover parallelt med skråplanet. Normalkraften fra underlaget er lik tyngdekraftens normalkomponent $mg \cos \alpha$, siden det ikke er noen akselerasjon normalt på skråplanet. Når klossen glir, er det kinetisk friksjon, med friksjonskraft $f = \mu N = \mu mg \cos \alpha$. Med konstant hastighet er $f = mg \sin \alpha$, dvs $\mu = \tan \alpha$. Riktig svar: D.

Oppgave 2
Klossen starter med mekanisk energi

$$E = mgh + mv_0^2/2 = mgL \sin \alpha + mv_0^2/2.$$

Den har mistet all denne mekaniske energien, dvs E tilsvarer friksjonsarbeidet

$$W_f = fL = \mu mgL \cos \alpha.$$

Dermed er

$$\mu = E/mgL \cos \alpha = \tan \alpha + v_0^2/2gL \cos \alpha.$$

Riktig svar: E.

Oppgave 3
Total impuls er bevart i kollisjonen: $mv_0 = 2mv$, dvs $v = v_0/2$. Riktig svar: A.

Oppgave 4
$|\Delta K| = mv_0^2/2 - 2mv^2/2 = mv_0^2/2 - mv_0^2/4 = mv_0^2/4$. Riktig svar: C.

Oppgave 5
De to massene snur i høyden $h = L(1 - \cos \beta)$. Der er potensiell energi lik $2mgh$ og kinetisk energi null. Energibevarelse etter at kollisjonen er over gir da

$$mv_0^2/4 = mgh = mgL(1 - \cos \beta) \quad \Rightarrow \quad \beta = \arccos(1 - v_0^2/8gL).$$

Riktig svar: B.

Oppgave 6
Matematisk pendel med lengde L og små utsving: $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, dvs $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$. Riktig svar: A.

Oppgave 7
De fire punktmassene er alle i avstand d fra aksen, med $d^2 = (a/2)^2 + (a/2)^2 = a^2/2$. Dermed er $I_0 = 4ma^2/2 = 2ma^2$. Riktig svar: B.

Oppgave 8
Steiners sats, med en parallellforskyvning av aksen en lengde $a/2$, gir $I_1 = I_0 + 4m(a/2)^2 = 2ma^2 + ma^2 = 3ma^2$. Riktig svar: C.

Oppgave 9
Steiners sats, med en parallellforskyvning av aksen en lengde $a/\sqrt{2}$, gir $I_2 = I_0 + 4m(a/\sqrt{2})^2 = 2ma^2 + 2ma^2 = 4ma^2$. Riktig svar: D.

Oppgave 10
Energibevarelse gir

$$mgh = mv^2/2 + MV^2/2 = mv_x^2/2 + mv_y^2/2 + MV^2/2,$$

og impulsbevarelse horisontalt gir

$$mv_x = MV.$$

I ligningene over er v_x og v_y klossens hastighetskomponenter målt i labsystemet. Klossens hastighet relativt skråplanet blir ikke den samme som den vi måler i labsystemet, dvs y-komponentene blir like store, $v_y' = v_y$, siden skråplanet bare beveger seg horisontalt, men x-komponentene blir forskjellige, $v_x' = v_x + V$. Klossen befinner seg hele tiden *på* skråplanet, og med 45 graders helningsvinkel er det klart at $v_y' = v_x'$. Med andre ord, $v_y = v_x + V$. Nå har vi 3 ligninger for 3 ukjente, v_x, v_y og V. Vi kan eliminere v_y i energibevarelsesligningen med $v_y = v_x + V = (M/m + 1)V$, og deretter eliminere v_x med $v_x = MV/m$. Den resulterende ligningen for V er

$$mgh = M^2V^2/2m + m(M/m+1)^2V^2/2 + MV^2/2 = \frac{1}{2}mV^2(1 + 3M/m + 2M^2/m^2)$$

med løsning

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{1 + 3M/m + 2M^2/m^2}}.$$

Riktig svar: C.

Oppgave 11
Løsningen her følger i stor grad samme spor som i oppgave 10, men nå har m (ringen) kinetisk energi

$$K_m = mv^2/2 + I_0\omega^2/2 = mv^2/2 + (mr^2)(v'/r)^2/2 = mv^2/2 + m(v')^2/2.$$

Her har vi brukt rullebetingelsen *i skråplanets referansesystem*, $\omega = v'/r$. Sammenhengen mellom ringens hastighet v i labsystemet og v' i skråplansystemet blir som for klossen i oppgave 10, så vi har:

$$\begin{aligned} v_x' &= v_x + V, \\ v_y' &= v_y = v_x' = v_x + V. \end{aligned}$$

Kombinert med (pga impulsbevarelse horisontalt) $v_x = MV/m$ gir dette

$$\begin{aligned} v_x' &= v_y' = v_y = (M/m+1)V, \\ v^2 &= v_x^2 + v_y^2 = (MV/m)^2 + (M/m+1)^2V^2, \\ (v')^2 &= (v_x')^2 + (v_y')^2 = 2(M/m+1)^2V^2. \end{aligned}$$

Energibevarelse gir da

$$mgh = mv^2/2 + m(v')^2/2 + MV^2/2 = \ldots = \frac{1}{2}mV^2(3 + 7M/m + 4M^2/m^2)$$

med løsning

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{3 + 7M/m + 4M^2/m^2}}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 12
Kortvarig støtkraft F tilsier at friksjonskraften f fra underlaget kan neglisjeres gjennom støtet med varighet Δt. Newtons 2. lov gir $F\Delta t = \Delta p = p = MV_0$. Newtons 2. lov for rotasjon, om akse gjennom CM, gir $\tau\Delta t = \Delta L = I_0\Delta\omega = I_0\omega_0$. Støtkraften F angriper kuleskallet i høyde $H - R$ over sentrallinjen og virker dermed på kuleskallet med et dreiemoment $\tau = F(H - R)$ mhp aksen gjennom CM. Videre er $I_0\omega_0 = (2MR^2/3)(V_0/R) = 2MRV_0/3$ ved ren rulling. Dermed:

$$\frac{MV_0}{\Delta t} \cdot (H - R)\Delta t = 2MRV_0/3 \quad \Rightarrow \quad H - R = 2R/3,$$

dvs $H = 5R/3$. Riktig svar: E.

Oppgave 13
Indre dreieimpuls (spinn):

$$L_s = I_0\omega_0 = \frac{2}{3}MR^2 \cdot \frac{V_0}{R} = \frac{2}{3}MRV_0.$$

Banedreieimpuls:

$$L_b = |\boldsymbol{R}_{CM} \times M\boldsymbol{V}_0| = MRV_0.$$

Som vektorer peker disse to i samme retning, slik at total dreieimpuls blir $L = 5MRV_0/3$. Riktig svar: A.

Oppgave 14

$$L_b = MRV = 4.87 \cdot 10^{24} \cdot 108 \cdot 10^9 \cdot 35.2 \cdot 10^3 = 1.85 \cdot 10^{40}\,\mathrm{kgm^2/s}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 15

$$L_s \simeq \frac{2}{5}MR_0^2\omega_0,$$

som med $M = 4.87 \cdot 10^{24}$ kg, $R_0 = 6052 \cdot 10^3$ m og $\omega_0 = 2\pi/T_s = 2\pi/(243 \cdot 24 \cdot 3600)$ pr sekund gir $L_s = 2.14 \cdot 10^{31}$ kgm^2/s. Riktig svar: B.

Oppgave 16

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{10 \cdot 5.0/0.050}\,\mathrm{m/s} = 31.62\,\mathrm{m/s} \\ v_2 &= \sqrt{20 \cdot 6.0/0.050}\,\mathrm{m/s} = 48.99\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Prosentvis økning:

$$\frac{v_2 - v_1}{v_1} = 0.55 = 55\%.$$

Riktig svar: C.

Oppgave 17
Akkurat i det brannbilen passerer der du står på fortauet, har den null hastighetskomponent langs forbindelseslinjen mellom deg og brannbilen. Dermed null dopplerskift i dette øyeblikket. Riktig svar: A.

Oppgave 18
$\eta_{\max} = 1 - 277/295 = 0.061 \simeq 6\%$. Riktig svar: A.

Oppgave 19
$Q_{\min} = W/\eta_{\max} = 1/0.061 = 16.39$ GW. Dermed:

$$m = \frac{Q_{\min}}{c\Delta T} = \frac{16.39 \cdot 10^9}{4000 \cdot 18} \simeq 228 \text{ tonn/s}.$$

Riktig svar: E.

Oppgave 20
Med $\eta = 1 - T_c/T_h$ og $\eta = W/Q_2 = (Q_2 + Q_1)/Q_2 = 1 + Q_1/Q_2 = 1 + (T_1 - T_c)/(T_2 - T_h)$ har vi $T_c/T_h = (T_c - T_1)/(T_2 - T_h)$, som løst mhp T_c gir $T_c = T_1 T_h/(2T_h - T_2)$. Riktig svar: A.

Oppgave 21
$P = (Q_1 + Q_2)/\Delta t = K(T_1 - T_c + T_2 - T_h)$, som med T_c fra oppgave 20 gir $P = K(T_1 + T_2 - T_h - T_1 T_h/(2T_h - T_2))$. Riktig svar: C.

Oppgave 22
Vi deriverer P mhp T_h og setter den deriverte lik null. Den resulterende 2.gradsligningen gir de to løsningene

$$T_h = \frac{T_2 \pm \sqrt{T_1 T_2}}{2},$$

der vi velger positivt fortegn foran kvadratroten. (Negativt fortegn her vil f eks gi negativ verdi for T_c i oppgave 20.) Riktig svar: E.

Oppgave 23
Med T_h fra oppgave 22 finner vi

$$T_c = \frac{T_1 + \sqrt{T_1 T_2}}{2}.$$

Virkningsgraden blir da

$$\eta = 1 - T_c/T_h = \ldots = 1 - \sqrt{T_1/T_2}.$$

Riktig svar: D.

Oppgave 24

$$\Delta S = -3\,\mathrm{J/K} + 5\,\mathrm{J/K} = 2\,\mathrm{J/K}.$$

Riktig svar: C.

Oppgave 25
Vi har $S = k_B \ln \Omega$ slik at

$$\Omega_2/\Omega_1 = \exp(\Delta S/k_B) \simeq \exp(-1.5 \cdot 10^{25}).$$

Riktig svar: E.