**TFY4106 Fysikk. Institutt for fysikk, NTNU.**
**Løsningsforslag til Test 5.**

**Oppgave 1**
Med all masse på aksen blir treghetsmomentet mhp aksen null. Riktig svar: A.

**Oppgave 2**
Med to stk punktmasser $16u$ i avstand 1.16 Å fra aksen blir treghetsmomentet $I_x = 2 \cdot 16u \cdot 1.16^2$ Å$^2$ $= 43.1$ uÅ$^2$. Riktig svar: D.

**Oppgave 3**
Det ene oksygenatomet ligger på aksen, de to andre er i avstand 1.28 Å $\cdot \sin 58.4° = 1.09$ Å fra aksen. Da blir $I_x = 2 \cdot 16u \cdot 1.09^2$ Å$^2$ $= 38.0$ uÅ$^2$. Riktig svar: C.

**Oppgave 4**
Tipset gikk i retning av å dele plata inn i små biter med sidekanter $dx$ og $dy$ og masse $dm = Mdxdy/L^2$, i posisjon $(x, y)$, slik at bitens kvadrerte avstand til aksen er $\rho^2 = x^2 + y^2$. Integralet over $x$ og $y$ fra $-L/2$ til $L/2$, slik at vi får med hele plata, gir det vi er ute etter:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-L/2}^{L/2}\int_{-L/2}^{L/2} (x^2+y^2)dxdyM/L^2 \\ &= (M/L)\cdot(1/3)\cdot(L/2)^3\cdot 2\cdot 2 \\ &= \frac{1}{6}ML^2 \end{aligned}$$

(Ved integrasjon av $x^2$ gir integralet over $y$ bare en faktor $L$, mens $x^3/3$ innsatt øvre og nedre grense gir $2L^3/24$. Tilsvarende for $y^2$, med ombytte av $x$ og $y$.) Riktig svar: C.

**Oppgave 5**
Tipset baserer seg på at plata ligger i $xy$-planet, med CM i origo, og med aksen langs $x$-aksen. Da kan vi dele opp plata i tynne staver parallelle med $x$-aksen, med bredde $dy$, lengde $L$, masse $dm = MLdy/L^2 = dyM/L$, og i avstand kvadrert lik $\rho^2 = y^2$ fra aksen. Da blir

$$I = \int \rho^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} y^2 dyM/L = \frac{1}{12}ML^2.$$

Alternativt kunne vi ha delt plata inn i tynne staver parellelle med $y$-aksen, med bredde $dx$, lengde $L$, masse $dm = dxM/L$, og treghetsmoment $dI = dmL^2/12$, kjent fra forelesningene. Da blir

$$I = \int dI = \int_{-L/2}^{L/2} dx \cdot ML/12 = \frac{1}{12}ML^2.$$

Samme svar, selvsagt. Riktig svar: A.

**Oppgave 6**
La oss følge tipsene i oppgaven. Trekanten i kvadranten $(x, y) = (+, +)$ har da treghetsmoment mhp $x$-aksen lik

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{L/\sqrt{2}} y^2 M dy(L/\sqrt{2} - y)/L^2 \\ &= (M/L^2)|_0^{L/\sqrt{2}} \left(\frac{Ly^3}{3\sqrt{2}} - \frac{y^4}{4}\right) \\ &= ML^2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{16}\right) \\ &= \frac{1}{48}ML^2. \end{aligned}$$

Dermed $ML^2/12$ for hele plata, siden de fire trekantene bidrar like mye til totalt treghetsmoment.
I likhet med forrige oppgave kan tynne staver legges andre veien, på tvers av $x$-aksen. Riktig svar: A.

**Oppgave 7**
Total kinetisk energi er summen av translasjons- og rotasjonsenergi ($c = 2/5$):

$$K = (1+c)MV^2/2 = (7/10) \cdot 0.130 \cdot 0.50^2 \simeq 0.023\,\mathrm{J} = 23\,\mathrm{mJ}.$$

Riktig svar: C.

**Oppgave 8**
Snookerkulas spinn:

$$L_s = I_0\omega = \frac{2}{5}MR^2 \cdot \frac{V}{R} = \frac{2}{5}MRV = 0.4 \cdot 0.130 \cdot \frac{52.5 \cdot 10^{-3}}{2} \cdot 0.50 \simeq 6.8 \cdot 10^{-4} = 0.68\,\mathrm{mJs}.$$

Riktig svar: B.

**Oppgave 9**
Vinkelen mellom en langside og diagonalen er

$$\alpha = \arctan(1778/3569) = 26.48^\circ.$$

Da er avstanden fra diagonalen til et midthull

$$d = (3569/2)\,\mathrm{mm} \cdot \sin 26.48^\circ \simeq 796\,\mathrm{mm}.$$

Banedreieimpulsen relativt et midthull er derfor

$$L_b = MVd = 0.130\,\mathrm{kg} \cdot 0.50\,\mathrm{m/s} \cdot 0.796\,\mathrm{m} \simeq 52\,\mathrm{mJs}.$$

Riktig svar: D.

**Oppgave 10**
La oss si at de fleste voksne mennesker har masse mellom 50 og 100 kg. Hvis vi deretter skriver treghetsmomentet på formen $I_0 = MR_0^2$, med såkalt "treghetsradius" $R_0$, koker dette ned til å anslå et rimelig intervall som dekker treghetsradien for de fleste voksne mennesker. Tja ... la oss satse på at $R_0$ er minst 10-15 cm og maksimalt 25-30 cm, kanskje? Da vil $I_0$ ligge mellom

$$I_0^{\mathrm{min}} = 50 \cdot 0.10 \cdot 0.10 = 0.5\,\mathrm{kgm}^2$$

og

$$I_0^{\mathrm{max}} = 100 \cdot 0.30 \cdot 0.30 = 3\,\mathrm{kgm}^2.$$

Alternativ B passer best med dette estimatet. Riktig svar: B.

**Oppgave 11**
Total kinetisk translasjonsenergi:

$$K_{\mathrm{trans}} = \frac{1}{2}MV^2.$$

Hjulenes rotasjonsenergi:

$$K_{\mathrm{rot}} = 4 \cdot \frac{1}{2}I_0\omega^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{V^2}{r^2} = mV^2.$$

Dermed:

$$\frac{K_{\mathrm{rot}}}{K_{\mathrm{trans}}} = \frac{m}{M/2} = \frac{2m}{M} = \frac{30}{1000}.$$

Riktig svar: C.

**Oppgave 12**
N2 for rotasjon om aksen gjennom CM: $\tau = \Delta L/\Delta t$, med dreiemoment $\tau = FR$. Her er videre $\Delta L = L_s = I_0\omega$. Dermed:

$$\omega = \frac{L_s}{I_0} = \frac{\tau \Delta t}{MR^2} = \frac{F\Delta t}{MR} = \frac{45 \cdot 0.5}{5 \cdot 0.3} = 15 \,\text{radianer/sekund}.$$

Riktig svar: C.

**Oppgave 13**
N2 for rotasjon om akse gjennom CM:

$$fR = \tau = I_0\alpha = MR^2 A/R = MRA \quad \Rightarrow \quad f = MA = 0.1 \cdot 0.6 = 0.06\,\text{N}.$$

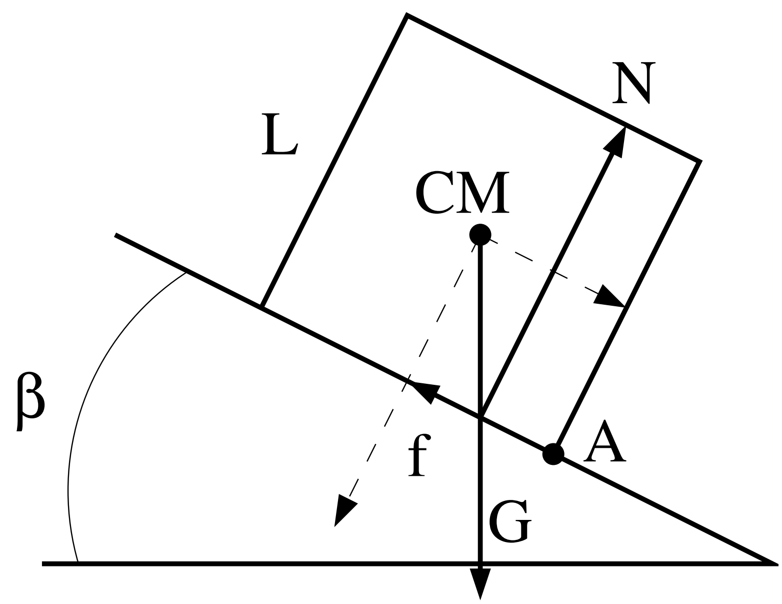
Riktig svar: A.

**Oppgave 14**
N2 nedover langs skråplanet: $Mg\sin\beta - f = MA$, der $\beta$ er helningsvinkelen. Dermed:

$$\beta = \arcsin\frac{f + MA}{Mg} = \arcsin\frac{2MA}{Mg} = \arcsin\frac{1.2}{9.8} \simeq 7^\circ.$$

Riktig svar: A.

**Oppgave 15**




I figuren er kreftene som virker på kassa tegnet inn: Friksjonskraften $f$, normalkraften $N$ og tyngdekraften $G = Mg$. Stiplede piler angir komponenter av $G$ langs og normalt på skråplanet.
La oss først anta at kassa ikke velter og bestemme ved hvilken helningsvinkel den da vil begynne å gli. Kassa begynner å gli hvis tyngdens komponent langs skråplanet, $Mg\sin\beta$ overstiger maksimal statisk friksjonskraft $\mu_s N = \mu_s Mg\cos\beta$, der $\beta$ er helningsvinkelen; dvs når $\beta = \arctan\mu_s$, som her er ca 52 grader.
I neste omgang vil vi argumentere for at kassa velter akkurat i det $\beta$ overstiger 45 grader. Anta at $\beta < 45$ grader (f eks som i figuren) og velg nedre fremre hjørne, merket A i figuren, som referansepunkt. Vi vet at $G$ angriper i CM (massesenteret). Da ser vi at $G$ gir et dreiemoment på kassa som alene ville gi rotasjon mot klokka. Videre vet vi at $f$ er tangentiell til grenseflaten mellom skråplan og kasse, slik at $f$ har null arm mhp det valgte referansepunktet A, og dermed null dreiemoment mhp A. Da gjenstår normalkraften $N$. Vi vet ikke uten videre hvor $N$ angriper, men la oss i første omgang anta at $N$ angriper lenger til venstre enn

slik den er tegnet inn i figuren. Da vil $N$ gi et dreiemoment på kassa som tilsvarer rotasjon med klokka, og som i absoluttverdi er større enn det motsatt rettede dreiemomentet pga $G$. Hvis dette er tilfelle, vil altså kasse begynne å rotere med klokka, dvs den vil begynne å velte. Men da vil jo angrepspunktet til $N$ straks flytte seg til A, siden A blir eneste kontaktpunkt mellom skråplan og kassa! Men da vil $G$ sørge for å rotere kassa mot venstre og tilbake i posisjon som i figuren. Konklusjon: Så lenge $\beta < 45$ grader, må kassa bli liggende i ro uten å velte! Med $\beta > 45$ grader gir $G$ et dreiemoment som fører til rotasjon om A med klokka. Normalkraften $N$ kan umulig angripe til høyre for A og motvirke dette. Konklusjon: Med $\beta > 45$ grader må det uansett bli et netto dreiemoment som gir rotasjon med klokka, og kassa må velte. Riktig svar: D.

**Oppgave 16**

N2: $Ma = Mg - S$, der $S$ er snordraget. N2, rotasjon om CM: $\tau = SR = I_0\alpha = I_0 a/R$. Her er $\alpha$ jojoens vinkelakselerasjon. Siste ligning gir $S = I_0 a/R^2$, som innsatt i N2 gir $a = g/(1 + I_0/MR^2)$. Riktig svar: C.

**Oppgave 17**

Når stanga har rotert en vinkel $\phi$ virker tyngdekraften på stanga med et dreiemoment relativt akslingen A lik $\tau = Mg(L/2)\sin\phi$, og i følge N2 for rotasjon om A skal dette være lik $I_A\alpha$, der $I_A = ML^2/3$ (oppgitt) og $\alpha$ er vinkelakselerasjonen, som vi skal bestemme. Dermed, $\alpha = (3g/2L)\sin\phi$. Riktig svar: E.

**Oppgave 18**

Her bør vi umiddelbart forvente at $a = V^2/R$, dvs sentripetalakselerasjonen: Hjulet beveger seg med konstant hastighet mot høyre, som ikke bidrar til dets akselerasjon, samtidig som det roterer med vinkelhastighet $\omega = V/R$, noe som gir akselerasjon $V^2/R$, med retning inn mot hjulets sentrum, for alle punkter på periferien. Med rett fram regning:

$$\begin{aligned} v_x &= V - R\omega\cos\omega t \ \ , \ \ v_y = R\omega\sin\omega t \\ a_x &= R\omega^2\sin\omega t \ \ , \ \ a_y = R\omega^2\cos\omega t \\ a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = R\omega^2 = V^2/R. \end{aligned}$$

Riktig svar: A.

**Oppgave 19**

Konstant hastighet betyr null nettokraft. Dermed $f = 0$. Riktig svar: E.

**Oppgave 20**

Hastigheten $V$ avtar. Da avtar også vinkelhastigheten $\omega = V/R$. Da må det være et netto ytre dreiemoment mhp en akse gjennom CM konsistent med dette, og det er det bare friksjonskraften som kan klare. Og da må denne virke *oppover* skråplanet. Riktig svar: A.