

KLASSISK DYNAMIKK

[YF 1-10 ; LL 1-6]

Størrelser og enheter. SI-systemet [YF 1]

Eks: Tid; $\tau = 84.7$ ps

↑ størrelse ↑ symbol ↑ måltall ↑ dekadisk prefiks (1 ps = 1 piko-sekund = 10^{-12} s)

↑ enhet

Notasjon: $[\tau] = s$ ("enheten til tid er sekund")

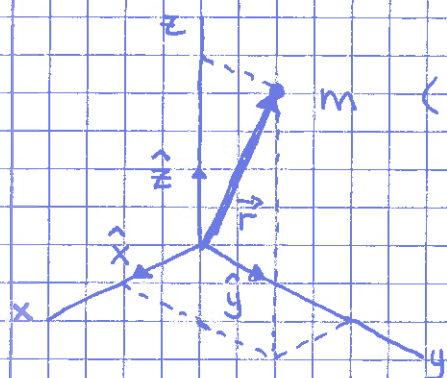
Størrelse	Vanlige symboler	Enhet	
lengde	$l, s, x, \Delta x \dots$	m	} Mekanikk
tid	$t, T, \tau \dots$	s	
masse	$m, M \dots$	kg	
temperatur	T	K	} Termisk fysikk
stoffmengde	n	mol	
elektrisk strømstyrke	I	A	} Grunn- enheter
(lysstyrke)	I	cd	
hastighet	v, V	m/s	} sammensatte
akselerasjon	a, A	m/s^2	
kraft	F, f	$kg \cdot m/s^2 \equiv N$	} arbeidete
energi	$E, W, K, U \dots$	$N \cdot m \equiv J$	
effekt	P	$J/s \equiv W$	
⋮			

Ek: Hvor lang tid bruker lys i vakuum på å gå en tomme? (2)

Løsn: $v(\text{lys}) = c = 299792458 \text{ m/s}$, $l = 1 \text{ in} = 25.4 \text{ mm} = 25.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
 $\tau = l/c = 25.4 \cdot 10^{-3} \text{ m} / 299792458 \text{ m/s} \approx 8.47 \cdot 10^{-11} \text{ s} = \underline{84.7 \text{ ps}}$

Kinematikk [YF 2, 3 ; LL 1]

= beregelsesbeskrivelse



m (punktmasse, evt. et legemes massesenter)

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

= posisjonen til m ved tid t ,

i kartesiske koordinater

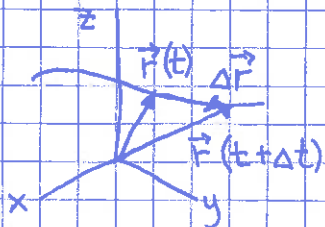
Enhetsvektorer: $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$

$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dvs dimensjonsløse})$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1; \quad \hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

Beskriver bevegelsen til m ved banen $\vec{r}(t)$:



$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

= forflytning i løpet av tid Δt

Hastighet ^(def) = forflytning pr tidsenhet:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Δt er skalar ($\Delta t > 0$) $\Rightarrow \vec{v} \parallel \Delta \vec{r} \Rightarrow \vec{v}$ er tangentiell til banen

Akselerasjon = hastighetsendring pr tidsenhet:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Notasjon (standard): $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ osv
 $\Rightarrow \vec{v} = \dot{\vec{r}}$, $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

Komponenter (kartesiske):

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} \text{ osv}$$

Tilsvarende: $a_x = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ osv

Dvs: $\vec{r} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{v} \xrightarrow{\text{derivasjon}} \vec{a}$

\Rightarrow Forrenter: $\vec{a} \xrightarrow{\text{integrasjon}} \vec{v} \xrightarrow{\text{integrasjon}} \vec{r}$

Stemmer:

$$v_x = dx/dt \Rightarrow dx = v_x dt \Rightarrow \int_{x(t_0)}^{x(t)} dx = \int_{t_0}^t v_x(t) dt$$

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t v_x(t) dt$$

Tilsvarende:

$$a_x = dv_x/dt \Rightarrow dv_x = a_x dt \Rightarrow \dots \Rightarrow v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^t a_x(t) dt$$

Generalisering til 3 dimensjoner (3D):

$$\vec{v} = d\vec{r}/dt \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

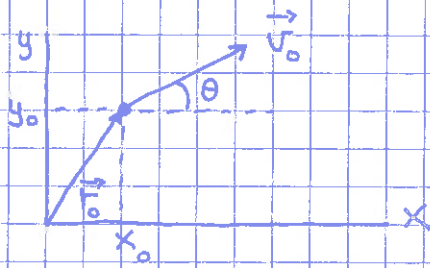
$$\vec{a} = d\vec{v}/dt \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt \Rightarrow \dots \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt$$

Eks (enkelt!): konstant \vec{a} , $t_0 = 0$, $\underbrace{\vec{r}(0) = \vec{r}_0, \vec{v}(0) = \vec{v}_0}_{\text{initialbetingelser}}$ gitt

$$\text{Dermed: } \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t, \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2$$

Eks: Kast (i tyngdefeltet)

Ved $t_0 = 0$:



$$\vec{a} = -g \hat{y} \quad (g = 9.8 \text{ m/s}^2)$$

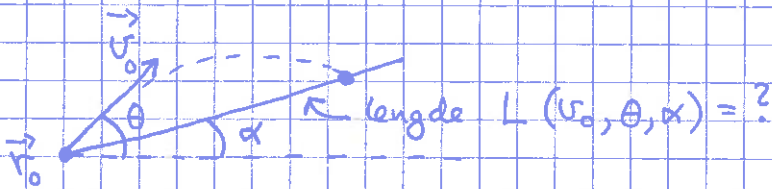
- Finn $\vec{r}(t)$
- Vis at banen er parabel

$$\text{Løsn: } x(t) = x_0 + \underbrace{v_{0x}}_{=v_0 \cos \theta} \cdot t + \frac{1}{2} \underbrace{a_x}_{=0} \cdot t^2 = x_0 + v_0 t \cos \theta$$

$$y(t) = y_0 + \underbrace{v_{0y}}_{=v_0 \sin \theta} \cdot t + \frac{1}{2} \underbrace{a_y}_{=-g} \cdot t^2 = y_0 + v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2$$

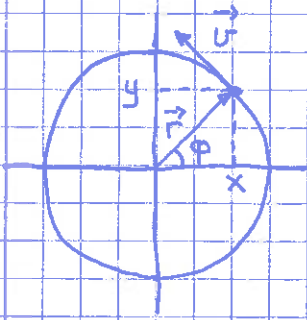
Eliminasjon av $t \Rightarrow y(x)$ er parabel (Vis selv!)

Øving 1: Kast i motbakke



Øving 1: Gitt $a = a(v)$, bestem $v(t)$ (Gitt $v(0) = v_0$)

Tips: $a = dv/dt \Rightarrow dt = dv/a \Rightarrow t = \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{a(v)} = \dots$



⇒ Lurt med polarkoord (r, φ) , der
 r = afstand fra origo
 φ = vinkel mellem x-aksen og \vec{r}
 ($\varphi > 0$ mot klokka)

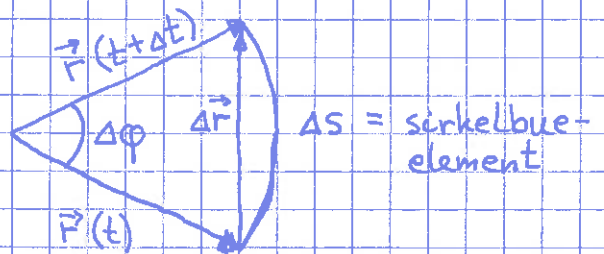
Fra figur: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $\tan \varphi = y/x$,
 $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (= konst.)
 $\vec{r} = r \cos \varphi \hat{x} + r \sin \varphi \hat{y}$

Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet :

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

Vinkel = buelengde / radius :

$$\Delta \varphi = \Delta s / r$$



Enheter:

$$[\varphi] = [s/r] = m/m = 1$$

$$[\omega] = [\varphi/t] = 1/s = s^{-1}$$

Når $\Delta t \rightarrow 0$: $\Delta \varphi \rightarrow 0$, $\Delta r = |\Delta \vec{r}| \rightarrow \Delta s = r \Delta \varphi$
 $\Delta \vec{r} \perp \vec{r}$

Dermed:

$$\underline{\underline{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta \varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = \underline{\underline{r \omega}}$$

Retning på $\underline{\underline{v}}$: $\underline{\underline{v}} \parallel \Delta \vec{r}$ og $\Delta \vec{r} \perp \vec{r} \Rightarrow \underline{\underline{v}} \perp \vec{r}$

Uniform sirkelbevegelse: $v = |\vec{v}| = \text{konst.}$, $\omega = \text{konst.}$

6

$$\omega = d\varphi/dt \Rightarrow \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)} d\varphi = \omega \int_0^t dt \Rightarrow \varphi(t) = \varphi(0) + \omega t = \omega t$$

↑
anta $\varphi(0) = 0$

Dermed:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} = r \cos \omega t \hat{x} + r \sin \omega t \hat{y}$$

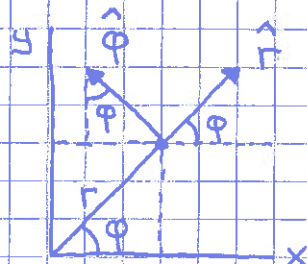
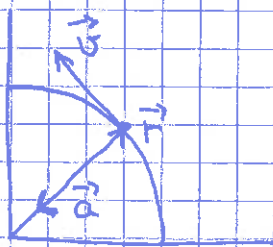
$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} = -r\omega \sin \omega t \hat{x} + r\omega \cos \omega t \hat{y}$$

$$\vec{a}_\perp(t) = \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} = -r\omega^2 \cos \omega t \hat{x} - r\omega^2 \sin \omega t \hat{y}$$

Dvs:

$$\vec{a}_\perp = -\omega^2 \vec{r}$$

Sentripetalakselerasjon



$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$$

= enhetsvektor radiekt

$$\hat{\varphi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

= enhetsvektor "angulært"

$$(\hat{r} \cdot \hat{\varphi} = 0, \hat{r} \cdot \hat{r} = \hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi} = 1)$$

$$\Rightarrow \text{Vi kan skrive: } \vec{r} = r \hat{r}, \vec{v} = v \hat{\varphi} = r\omega \hat{\varphi}, \vec{a}_\perp = -\omega^2 r \hat{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$$

Baneakselerasjon: $a_{||} = \dot{v} = \frac{d}{dt}(\omega r) \stackrel{r=\text{konst.}}{=} r \frac{d\omega}{dt} = r\dot{\omega}$

Total akselerasjon: $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_{||} = -\omega^2 r \hat{r} + r\dot{\omega} \hat{\varphi}$

Vinkelakselerasjon: $\alpha = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2$; $[\alpha] = 1/s^2$

Periode: $T = \text{tid pr omløp}$; $[T] = s$

Frekvens: $f = \text{antall omløp pr tidsenhet}$; $[f] = \text{Hz} = 1/s$

$$\Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T}, T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}, f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Newtons Lover [YF 4, 5 ; LL 2, 3]

7

Empiriske (eksperimentelle) lover.

N1:
$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$$

(Null netto ytre kraft $\vec{F} \Rightarrow$ legemet forblir i ro eller i rettlinjert bevegelse med uendret hastighet \vec{v})

N2:
$$\vec{F} = m\vec{a}$$

(Netto ytre kraft $\vec{F} \Rightarrow$ legeme med masse m får akselerasjon prop. med \vec{F} ; $\vec{a} = \vec{F}/m$)

N3:
$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

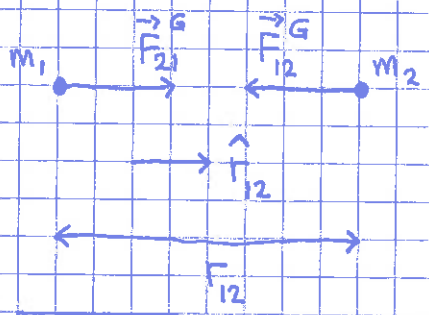
(Hvis A virker på B med kraft \vec{F}_{AB} , virker B på A med kraft $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$. A og B vekselvirker.)

Enhet: $[F] = [m \cdot a] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{N}$ (newton)

Fundamentale krefter [YF 5.5 ; LL 2.1]

- Gravitasjon: svak tiltrekning mellom legemer pga masse
- Elektromagnetisk: tiltrekning eller frastøtning pga elektrisk ladning
- [• Kjernekrefter, svake og sterke: kort rekkevidde, hvor ca 10^{-18} m og 10^{-15} m, beskriver hvor radioaktivitet og at kjernepartikler holdes sammen]

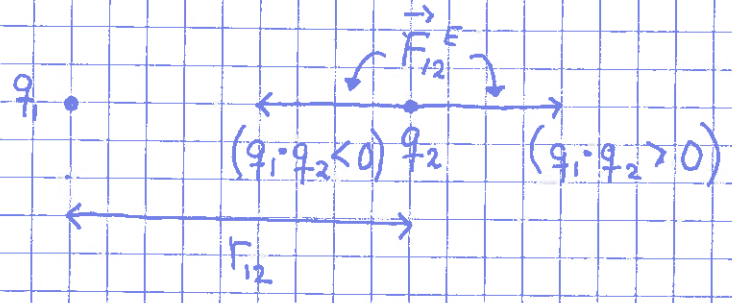
Newton's gravitasjonslov:



$$\vec{F}_{12}^G = -G \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$$

Coulombs lov:



$$\vec{F}_{12}^E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$[q] = \text{C (coulomb)}$$

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{Nm}^2$$

(vakuumpermittiviteten)

Eks: Krefter mellom 2 elektroner.

$$m \sim 10^{-30} \text{ kg}, \quad q = e \sim 10^{-19} \text{ C}$$

$$\Rightarrow \frac{F^E}{F^G} \sim 10^{43} \quad (!)$$

Mellom jorda og månen; anta netto ladning ca 10^6 C på begge

$$\frac{F^E}{F^G} \sim 10^{-15}$$

Mellom "dagligdagse" objekter er (typisk)

$F^E \gg F^G$ (selv med nesten elektrisk nøytrale objekter).

Men i tillegg kommer F^G fra jorda.

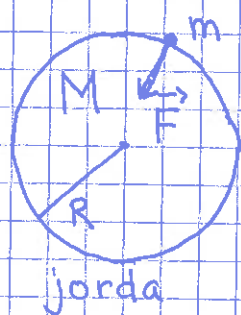
\Rightarrow Hverdagen styres av både F^G og F^E

Tungde

[YF 4.4 ; LL 2.5]

28.08.14

9



Tiltrekkende kraft på m fra jorda ($M = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $R \approx 6370$ km):

$$F = |\vec{F}| = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} = m \cdot g$$

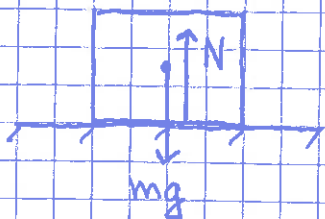
med $g = GM/R^2 = 9.8 \text{ m/s}^2 = \text{tyngdens akselerasjon}$

"Fritt fall": Hvis mg er eneste kraft, blir (N2) $mg = ma$, dvs $a = g$.

Kontaktkrefter

[YF 4.1 ; LL 3]

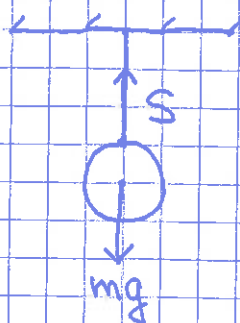
Normalkraft (trykk-kraft)



Kloss i ro $\Rightarrow N = mg$

Normalkraften N er netto frastøtende coulombkraft, fra underlaget på klossen

Snordrag (strek-kraft)



Kule i ro $\Rightarrow S = mg$

Snordraget S er netto tiltrekkende coulombkraft, fra snora på kula

[Oppg: Gjør rede for N3 i disse to eksemplene!]

Snordraget er konstant i lette ("masseløse") snorer (evt. stenger) og i snorer som er i ro (evt. $\vec{v} = \text{konst.}$):

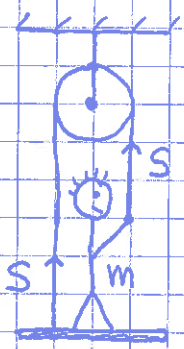
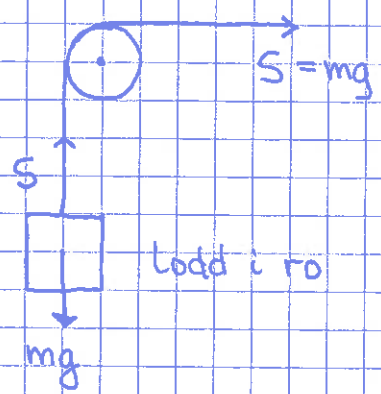


N2: $\vec{S}(x+\Delta x) + \vec{S}(x) = \Delta m \cdot \vec{a}$
 $\Rightarrow \vec{S}(x+\Delta x) = -\vec{S}(x)$

hvis $\Delta m = 0$ eller $\vec{a} = 0$

\Rightarrow konstant S langs hele snora

Retningsendring med snor og trinse (evt. sylinder):

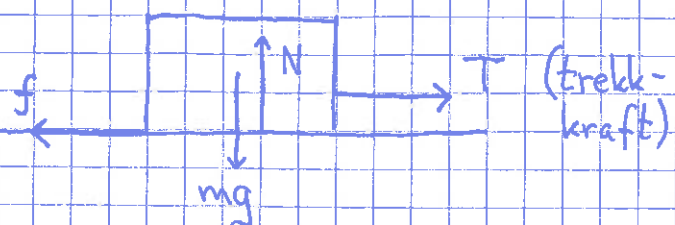


N1: $2S = mg$
 $S = mg/2$

Friksjon [YF 5.3 ; LL 3.1]

= kontaktkrefter rettet mot (potensiell) relativ bevegelse

Tørr friksjon:



Statisk (kloss i ro):

$N1 \Rightarrow f = T$

Empirisk: $f_{\text{max}} = \mu_s N$

Kinetisk (kloss i bevegelse):

$f = \mu_k N$

Friksjonskoeffisienter:

statisk : μ_s

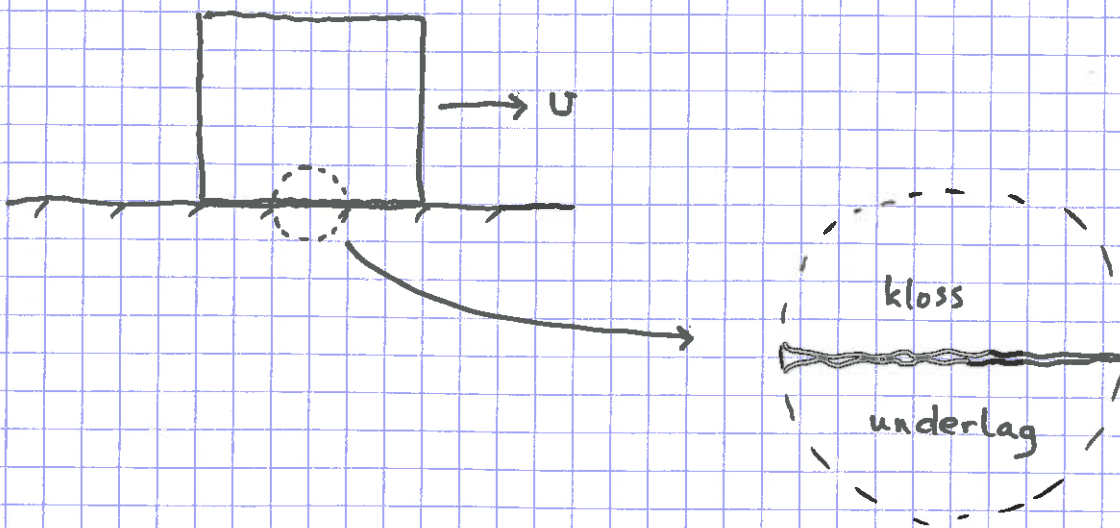
kinetisk : μ_k

Enhet: $[\mu] = 1$

Tallverdier, eks: (ca-verdier)

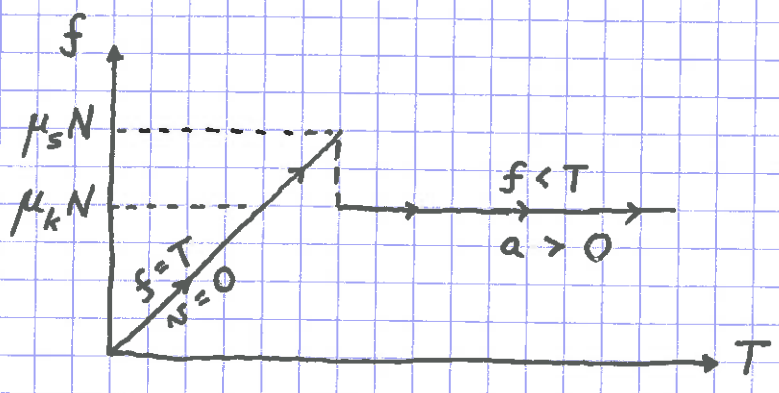
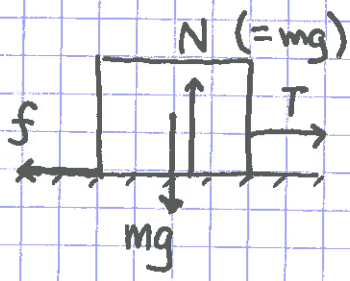
	μ_s	μ_k
tre mot tre	0.25-0.50	0.2
splvr mot splvr	1.4	0.55
gummi mot tørr asfalt	1.0	0.8
gummi mot våt asfalt	0.3	0.25

Hvorfor $\mu_s > \mu_k$?

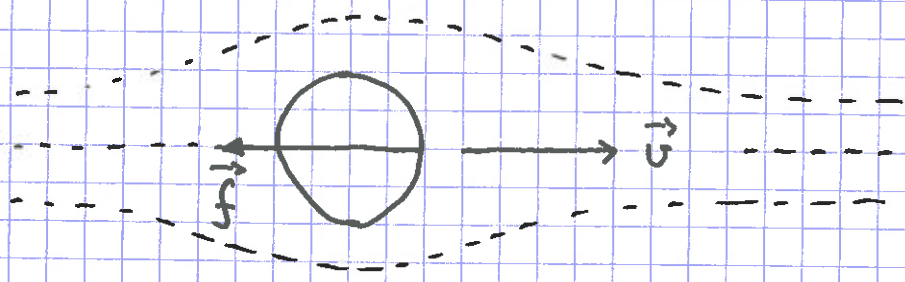


$v = 0$ (statisk): godt grep mellom flatene

$v > 0$ (kinetisk): flyter oppå



Friksjon i fluider (Våt friksjon) [YF 5.3; (LL 8)]



- liten $v \Rightarrow$ lamincær ("pen") strømning av fluidet

$$\vec{f} = -k \vec{v} = -k v \hat{v}$$

(der k avhenger av fluidets viskositet)

- stor $v \Rightarrow$ turbulent strømning

$$\vec{f} = -D v^2 \hat{v}$$

(D = "drag coefficient")

[Vis at $[k] = \text{kg/s}$ og $[D] = \text{kg/m}$]

Newtons lover, anvendelser [YF 5, LL 3]

Strategi:

- Finn alle ytre krefter \vec{F}_i som virker på legemet
- Tegn figur: "fritt-legeme-diagram"

Omgivelsene "erstattes" av krefter på legemet:

Tyngde $m\vec{g}$, snordrag \vec{S} , friksjon \vec{f} , normalkraft \vec{N}

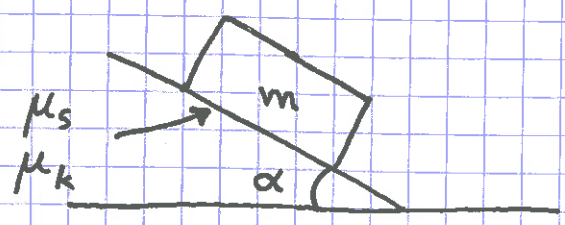
- Velg hensiktsmessig koordinatsystem.

Dekomponér.

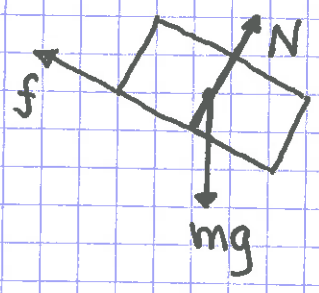
- Bruk N2, $\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m$
(evt. N1, $\sum_i \vec{F}_i = 0$)



Eks: Kloss(er) på skrånplan (Øving; Lab)

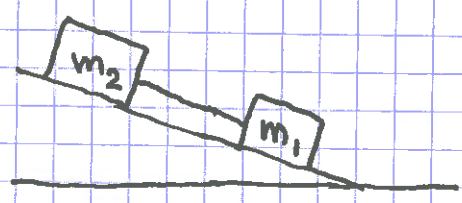
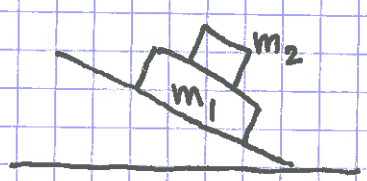


Fritt-legeme-diagram:



Lett? Mange aktuelle problemstillinger!

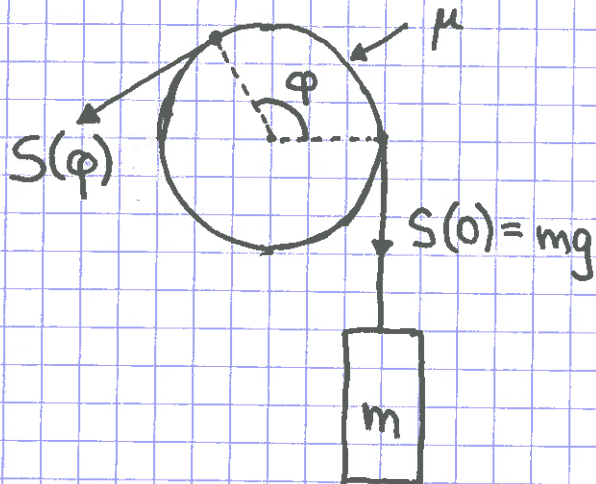
Varianter:



01.09.14

14

Eks: Snor rundt sylinder (Vanskelig!)



$S(\varphi)$ = snordrag med "kontaktvinkel" φ mellom snor og sylinder.

$S_{\min}(\varphi)$ = påkrevd snordrag for å holde lodd oppe

$S_{\max}(\varphi)$ = max snordrag uten at loddet heises opp

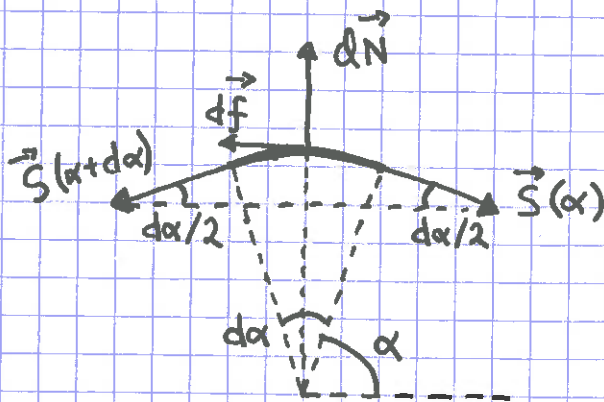
m = loddmasse

μ = statisk friksjonskoeff.

Erfaring: S_{\min} og S_{\max} avhenger sterkt av φ .

Oppgave: Bestem $S_{\min}(\varphi)$ og $S_{\max}(\varphi)$!

Strategi: Se på liten snorbit mellom α og $\alpha + d\alpha$



\vec{S} = kraft på snorbiten, fra resten av snora

dN = normalkraft fra sylinder på snorbit

df = friksjonskraft fra sylinder på snorbit; $df \leq \mu \cdot dN$;
når $S(\varphi) = S_{\min}(\varphi)$ er $df = \mu \cdot dN$

Lodd i ro når $\sum_i \vec{F}_i = 0$ (N1):

(15)

$$\vec{S}(\alpha + d\alpha) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$$

Dekomponerer:

Tangentielt: $S(\alpha + d\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cdot \cos \frac{d\alpha}{2} \pm df = 0$

Normalt: $S(\alpha + d\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \cdot \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$

Når $d\alpha \rightarrow 0$: $\cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1$, $\sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$

Dermed:

Tangentielt: $S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) \pm \mu dN = 0$

Normalt: $[S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha)] \cdot d\alpha/2 - dN = 0$

Vi har: $S(\alpha + d\alpha) - S(\alpha) = dS$

$$S(\alpha + d\alpha) + S(\alpha) \approx 2S$$

Dermed:

Tangentielt: $dS = \mp \mu dN$

Normalt: $S \cdot d\alpha = dN$

Eliminerer dN ved å dividere "T" med "N":

$$\frac{dS}{S \cdot d\alpha} = \mp \mu \Rightarrow \frac{dS}{S} = \mp \mu d\alpha$$

Integrerer: $\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = \mp \int_0^\varphi \mu d\alpha$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln S(\varphi) - \ln S(0)} = \mp \mu \varphi$$

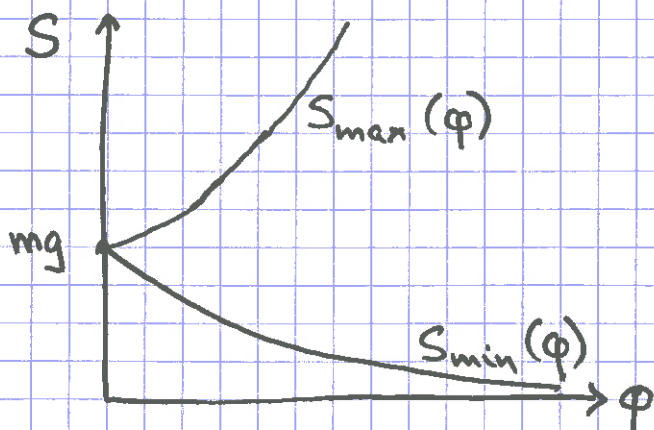
$$= \ln \frac{S(\varphi)}{S(0)}$$

$$\Rightarrow S(\varphi) = S(0) e^{\mp \mu \varphi} \quad ; \quad S(0) = mg$$

Øvre ~~grense~~ ^{fortegn}: \vec{df} som i figuren, dvs friksjonen hjelper til med å holde loddet oppe.

Nedre ~~grense~~ ^{fortegn}: \vec{df} mot høyre, dvs friksjonen motvirker vårt forsøk på å trekke loddet opp

$$\text{Dermed: } S_{\min}(\varphi) = mg \cdot e^{-\mu \varphi} \quad ; \quad S_{\max}(\varphi) = mg \cdot e^{+\mu \varphi}$$



Talleks: $\mu = 0.2$ og $2\frac{1}{4}$ omdreining, dvs

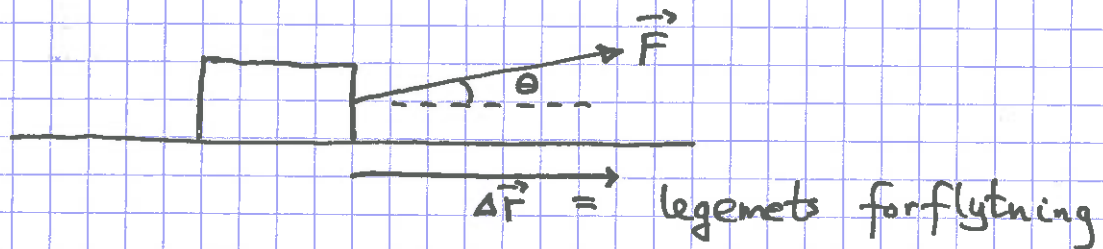
$$\varphi = 2 \cdot 2\pi + \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{2}, \text{ gir}$$

$$S_{\min} = mg \cdot e^{-0.2 \cdot 9\pi/2} \approx 0.06 mg$$

$$S_{\max} = mg \cdot e^{+0.2 \cdot 9\pi/2} \approx 17 mg$$

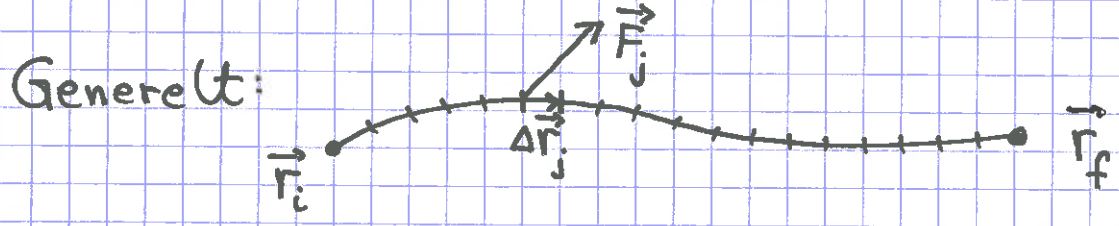
Arbeid og energi [YF 6,7 ; LL4]

Arbeid [YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]



$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = \text{arbeid utført av ytre kraft } \vec{F} \text{ på legemet}$$

$$[W] = N \cdot m = J \text{ (joule)}$$



Arbeid utført ved forflytning fra \vec{r}_i til \vec{r}_f :

$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \stackrel{\Delta r_j \rightarrow 0}{=} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

effekt = arbeid (energi) pr tidsenhet

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = J/s = W \text{ (watt)}$$

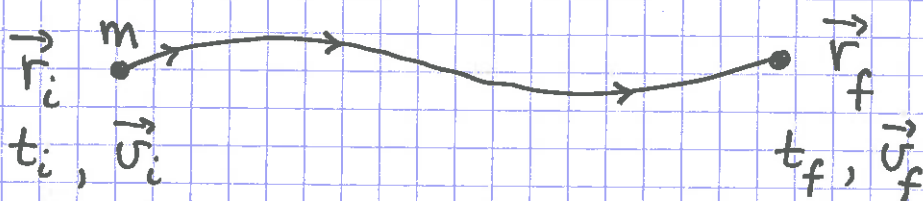
Eks: Studenthybel: ca 4 MWh el. energi pr år. $\langle P \rangle = ?$

Løsn: $\langle P \rangle = 4 \cdot 10^6 \text{ Wh} / (365 \cdot 24 \text{ h}) = 457 \text{ W} \approx 0.5 \text{ kW}$

Kinetisk energi

[YF 6.2; LL 4.2]

(18)



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{N2}{=} \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{u} dt = m \int_{\vec{u}_i}^{\vec{u}_f} \vec{u} \cdot d\vec{u}$$

$$d(u^2) = d(\vec{u} \cdot \vec{u}) = d\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot d\vec{u} = 2\vec{u} \cdot d\vec{u}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{u_i^2}^{u_f^2} d(u^2) = \frac{1}{2} m u_f^2 - \frac{1}{2} m u_i^2$$

Vi definerer: $K = \frac{1}{2} m u^2 =$ kinetisk energi

Dermed:

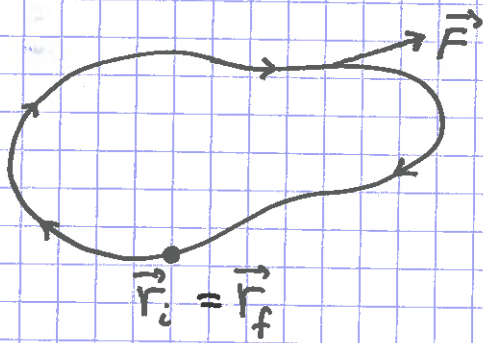
$$W = K_f - K_i = \Delta K$$

Dvs: Arbeid W utført på legemet
tilsværer endringen ΔK i legemets
kinetiske energi.

Konservativ kraft [YF 7.3; LL 4.4]

(19)

System uten tap av mekanisk energi til andre energiformer (feks. varme) er konservativt.



Hvis \vec{F} er konservativ, er $K_f = K_i$ (dvs $|v_f| = |v_i|$), dvs $W = \Delta K = 0$.

Dermed: $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ (∮... : Integral rundt lukket kurve)

Potensiell energi [YF 7.1-7.4; LL 4.3-4.4]

Med kons. kraft \vec{F} er potensiell energi

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

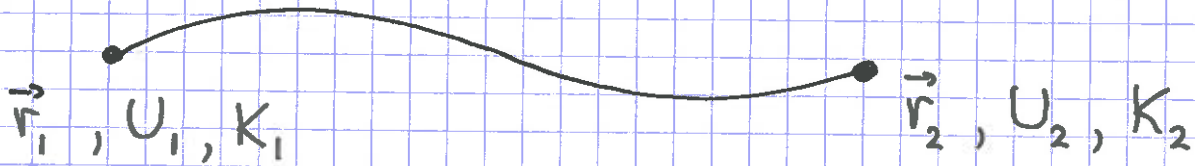
Har her valgt $U(\vec{r}_0) = 0$.

Dvs: Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

04.09.14

20

Mekanisk energibevarelse [YF 7.1-7.3; LL 4.5]



$$\begin{aligned}
 U_1 - U_2 &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W = K_2 - K_1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$

Dus: Total mekanisk energi,

$$E = K + U,$$

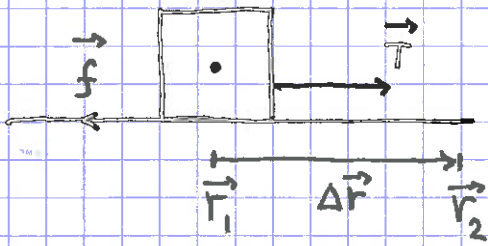
er konstant ("bevart")

for et konservativt system.

Frøksjonsarbeid

YF 7.3
[LL 4.5]

(21)

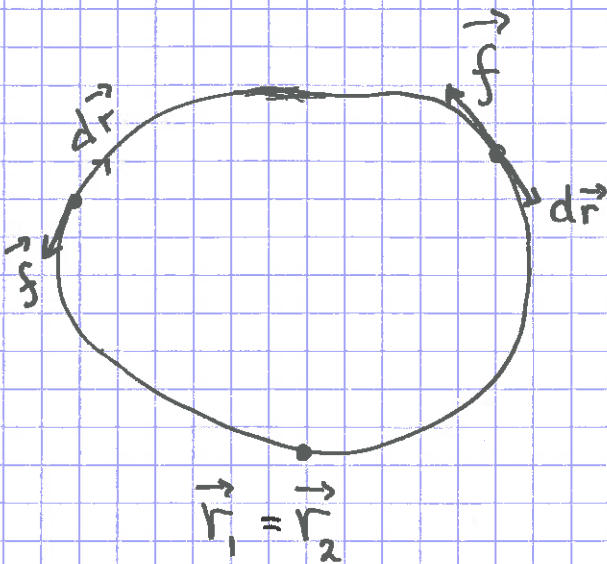


$$W_f = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$$

fordi \vec{f} alltid er rettet mot $d\vec{r}$.

Frøksjonsarbeidet W_f "går tapt":

mekanisk energi \rightarrow varme



$$\oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0$$

Dvs: Frøksjonskraft

\vec{f} er ikke

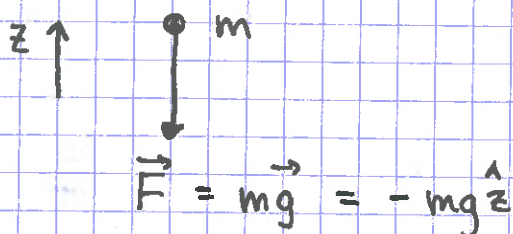
konservativ

Eks: Fritt fall

(22)

Anta $U(0) = 0$ og $v(0) = 0$

• Bestem $U(z)$ og $v(z)$ ($z < 0$)



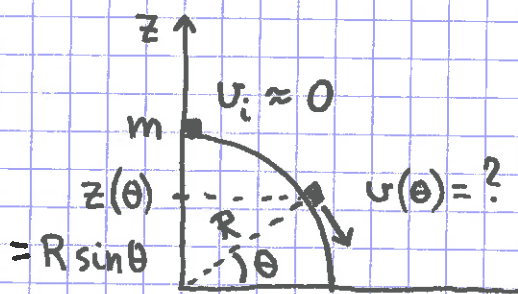
Løsning:
$$U(z) = - \int_0^z \underbrace{(-mg\hat{z})}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\hat{z} dz)}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{mgz}}$$

$$E(0) = U(0) + K(0) = 0$$

$$\Rightarrow U(z) + K(z) = mgz + \frac{1}{2}mv(z)^2 = 0$$

$$\Rightarrow v(z) = \underline{\underline{\sqrt{-2gz}}} \quad (z < 0)$$

Eks: Gli på kuleflate



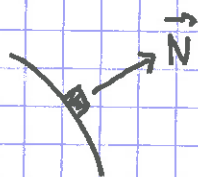
Løsning:

E er bevart

↓

$$\frac{1}{2}mv(\theta)^2 + mgz(\theta) = mgR$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(\theta) = \sqrt{2gR(1 - \sin\theta)}}}$$



• Mister kontakt med underlaget når $N = 0$;
"skrått kast" derfra. Hvor skjer dette?

• Hva med friksjon?

• Hva skjer hvis legemet kan rulle (og "skure")?

Impuls [YF 8 ; LLS]

= bevegelsesmengde = "linear momentum"

N2: $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ hvis $m = \text{konst.}$ $\frac{d(m\vec{v})}{dt}$

impuls = masse · hastighet

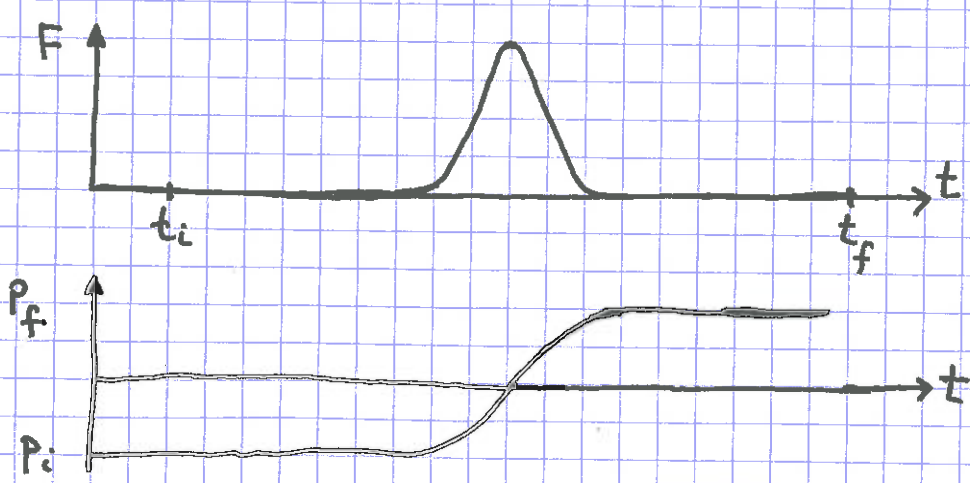
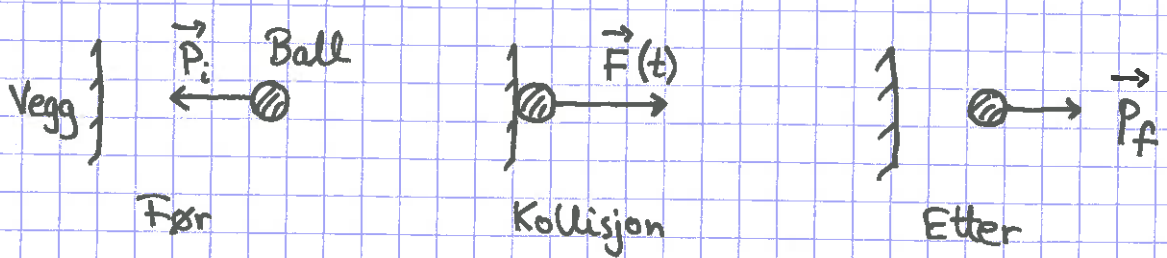
$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ [p] = kg m/s

$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$ N2

\Rightarrow Lov om impulsbevarelse:

Hvis sum av ytre krefter på et legeme er null, er legemets impuls bevart: $\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konst.}$

Ytre $\vec{F} \Rightarrow$ impulsendring:



$$\begin{aligned} \Delta \vec{p} &= \vec{p}_f - \vec{p}_i \\ &= \int_{\vec{p}_i}^{\vec{p}_f} d\vec{p} \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt \end{aligned}$$

Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5.3]

Elastisk støt : $\Delta K = 0$ (energien bevart)

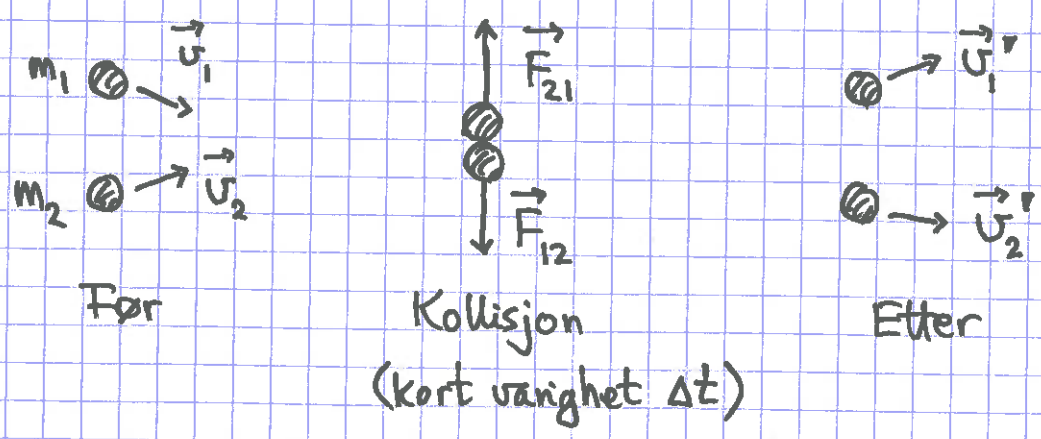
Uelastisk støt : $\Delta K < 0$ (--- ikke bevart)

Fullstendig uelastisk støt : Legemene henger sammen, med felles hastighet etter kollisjonen ; max. energitap $|\Delta K|$.

Tapt mek. energi $\Delta K \rightarrow$ deformasjon, lyd, varme...

Hvis $\vec{F}_{\text{ytre}} = 0$, er $\Delta \vec{p} = 0$ for alle typer kollisjoner.

Indre krefter \vec{F}_{ij} endrer ikke systemets totale impuls:



$$N3: \vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \xrightarrow{N2} \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{tot}} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{konst.}$$

Eks : Slag på bordtennisball ; anslå midlere kraft $\langle \vec{F} \rangle$ og sammenlign med mg .

Løsn : $m = 2.7g$, $v_i \sim 10 \text{ m/s}$, $v_f \sim 30 \text{ m/s}$, $\Delta t \sim 1 \text{ ms}$
 $\Rightarrow \langle F \rangle = m \Delta v / \Delta t \approx 2.7 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot 40 \text{ m/s} / 10^{-3} \text{ s} = \underline{\underline{108 \text{ N}}}$

$$\langle F \rangle / mg = \frac{\Delta v}{g \cdot \Delta t} = \frac{\langle a \rangle}{g} \approx \frac{40 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2}{10 \text{ m/s}^2} = \underline{\underline{4000}}$$

\Rightarrow OK å se bort fra ytre kraft mg i kollisjonen

Sentralt støt [YF 8.2-8.4 ; LL 5.3]

Før : $m \otimes \rightarrow v$ $V \leftarrow \otimes M$ (i)

Etter : $v' \leftarrow \otimes m$ $M \otimes \rightarrow V'$ (f)

[I fig. er $v, V' > 0$ og $v', V < 0$.]

$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mv + MV}_{P_i} = \underbrace{mv' + MV'}_{P_f}$$

(a) Fullstendig uelastisk støt (enklest) :

$$v' = V' = \frac{mv + MV}{m + M}$$

(b) Delvis uelastisk støt : Har kun 1 lign. ($\Delta p = 0$) for 2 ukjente (v', V'). Må ha en ekstra opplysning for å bestemme v' og V' .

(c) Elastisk støt, $\Delta K = 0$:

(26)

$$\underbrace{\frac{1}{2} m u^2 + \frac{1}{2} M V^2}_{K_i} = \underbrace{\frac{1}{2} m u'^2 + \frac{1}{2} M V'^2}_{K_f}$$

"Triks": Skriv om litt.

$$m(u + u')(u - u') = M(V' + V)(V' - V) \quad (1)$$

$$m(u - u') = M(V' - V) \quad (2)$$

Divider (1) med (2):

$$u + u' = V + V'$$

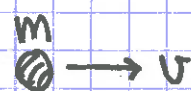
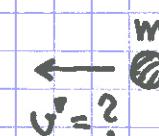
$$\Rightarrow u' - V' = -(u - V) \quad (3)$$

Fra (2) og (3) får vi:

$$u' = \frac{M}{m+M} \left(2V + u \cdot \frac{m-M}{M} \right)$$

$$V' = \frac{m}{M+m} \left(2u + V \cdot \frac{M-m}{m} \right)$$

Eks: Elastisk kollisjon mellom ball og vegg

Før:  $\left\{ \begin{array}{l} V=0 \\ M \gg m \\ (M \rightarrow \infty) \end{array} \right.$ Etter:  $\left\{ \begin{array}{l} V'=? \\ u'=? \end{array} \right.$

Sjekk om $\Delta p = 0$ og $\Delta K = 0$.

$$\text{Løsn: } \left. \begin{aligned} u^r &= \frac{M}{m+M} \left\{ 0 + u \cdot \frac{m-M}{M} \right\} \approx \frac{M}{M} \cdot u \cdot \left(\frac{-M}{M} \right) = \underline{\underline{-u}} \\ v^r &= \frac{m}{M+m} \{ 2u + 0 \} \approx \frac{m}{M} \cdot 2u \approx \underline{\underline{0}} \end{aligned} \right\} \text{Som ventet!} \quad (27)$$

Impulsbevarelse?

$$p = mu, \quad P = MV = 0, \quad p^r = mu^r = -mu,$$

$$P^r = MV^r \approx M \cdot \frac{m}{M} \cdot 2u = 2mu$$

$$\Rightarrow \Delta p = p_f - p_i = (p^r + P^r) - (p + P) = (-mu + 2mu) - mu = \underline{\underline{0}}; \quad \text{OK!}$$

Energibevarelse?

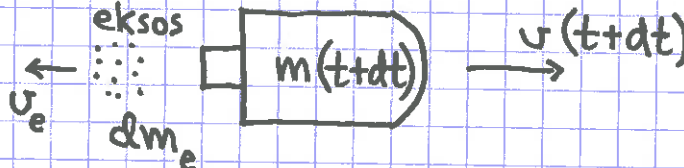
$$K_m = \frac{1}{2}mu^2, \quad K_M = \frac{1}{2}MV^2 = 0, \quad K_m^r = \frac{1}{2}mu^{r^2} = \frac{1}{2}mu^2$$

$$K_M^r = \frac{1}{2}MV^{r^2} \approx \frac{1}{2}M \cdot \left(\frac{m}{M} \cdot 2u \right)^2 = \frac{2m^2u^2}{M} \approx 0$$

$$\Rightarrow \Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}mu^2 = \underline{\underline{0}}; \quad \text{OK!}$$

Rakettprinsipp [YF 8.6; LL 5.4]

"Før" (t):  $p(t) = m(t)v(t)$

"Etter" (t+dt): 

$$p(t+dt) = \underbrace{m(t+dt)}_{m(t)+dm} \underbrace{v(t+dt)}_{v(t)+dv} + \underbrace{dm_e}_{-dm} \cdot \underbrace{v_e(t)}_{v(t)+u}$$

Her er: u = eksosens hastighet relativt raketten ($u < 0$)
 dm = rakettenes masseendring mellom t og $t+dt$ ($dm < 0$)

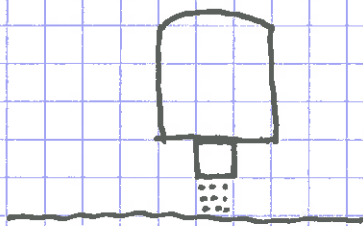
$$\Rightarrow p(t+dt) = \underbrace{m(t)v(t)}_{=p(t)} + m(t)dv + \underbrace{dm \cdot v(t) - dm \cdot v(t) - dm \cdot u}_{=0} \quad (28)$$

Hvis "outer space": $F_{\text{ytre}} = 0 \xrightarrow{N_2} p(t+dt) = p(t)$
 $\Rightarrow m(t)dv = u dm$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} = u \dot{m} (> 0)$$

$$\Rightarrow F_{\text{skjv}} = ma, \text{ med skjvkraft } F_{\text{skjv}} = u \dot{m}$$

Hvis i tyngdefeltet:



$$F_{\text{ytre}} = -mg$$

\Rightarrow Total kraft på (rest-)raketten:

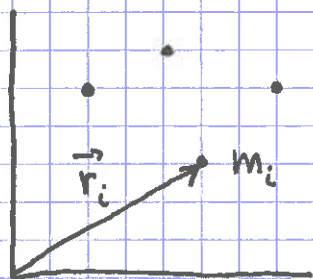
$$F_{\text{skjv}} + F_{\text{ytre}} = u \dot{m} - mg$$

$$\xrightarrow{N_2} u \dot{m} - mg = ma$$

Til nå: Punktmasser

Nå: Partikkelsystemer. Stive legemer.

Massecenter. Tyngdepunkt [YF 8.5, oppg. 8.115+8.116; LL 5.6, 5.8, b.1]



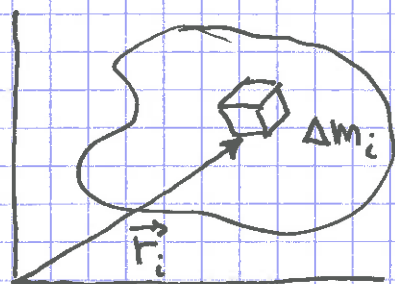
Massecenter (CM = center of mass) for

N punktmasser m_1, m_2, \dots, m_N i posisjoner $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Total masse: $M = \sum_i m_i$

Med kontinuerlig massefordeling:



$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i} \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

$$= \frac{1}{M} \int \vec{r} dm$$

↑ integral over der vi har masse

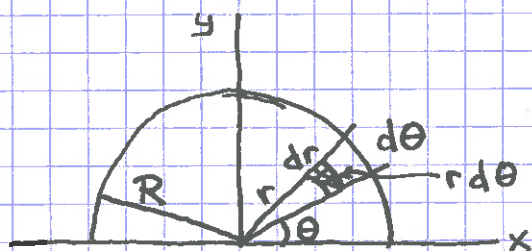
Masseelement:

$$dm = \rho dV, \quad \rho = \text{masse pr volumenhett}, \quad dV = \text{volumenelement (3D)}$$

$$dm = \sigma dA, \quad \sigma = \text{---"--- flate ---}, \quad dA = \text{flate --- (2D)}$$

$$dm = \lambda dl, \quad \lambda = \text{---"--- lengde ---}, \quad dl = \text{lengde --- (1D)}$$

Eks: Halvsirkulær tynn skive



$$dm = \sigma dA = \sigma \cdot r d\theta \cdot dr$$

$$M = \sigma \cdot \frac{1}{2} \pi R^2$$

$$\vec{r} = \hat{x}x + \hat{y}y = \hat{x} r \cos\theta + \hat{y} r \sin\theta$$

$$X_{CM} = 0 \text{ pga symmetri} \Rightarrow \vec{R}_{CM} = Y_{CM} \hat{y}$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{2}{\sigma \pi R^2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} r \sin\theta \cdot \sigma \cdot r d\theta \cdot dr$$

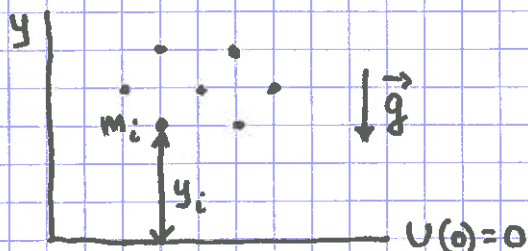
$$= \frac{2}{\sigma \pi R^2} \left\{ \int_0^R r^2 dr \right\} \cdot \left\{ \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \right\}$$

$\frac{1}{3} R^3$ $\int_0^{\pi} (-\cos\theta) = 1 + 1 = 2$

$$= \frac{4}{3\pi} R \approx \underline{\underline{0.42 R}}$$

[Vis selv: $Y_{CM} = \frac{2}{\pi} R$ for halvsirkulær bølge (1D)
 og $Y_{CM} = \frac{3}{8} R$ for kompakt halvkule (3D)]

Pot. energi U for partikkelsystem i tyngdefellet



$$U = \sum_i U_i = \sum_i m_i g y_i$$

Hvis $g = \text{konst}$:

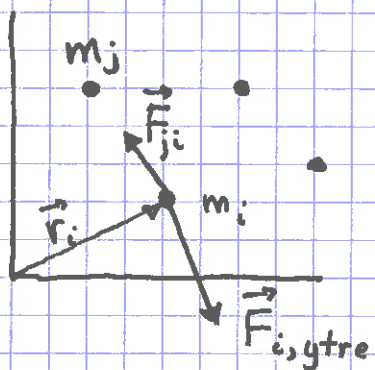
$$U = g \sum_i m_i y_i = g M Y_{CM}$$

Dvs: Som om hele massen $M = \sum_i m_i$ er samlet i høyden $Y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i$ (og da f.eks. i \vec{R}_{CM})

Tyngdepunktbevegelsen

[YF 8.5; LL 5.8]

31



System med N masser; m_1, m_2, \dots, m_N

N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{total indre kraft p\u00e5 } m_i} \quad (i=1, 2, \dots, N)$$

total ytre kraft p\u00e5 m_i

Legg sammen N2 for alle massene:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i &= \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,ytre}}_{\text{netto ytre kraft } \vec{F}_{ytre} \text{ p\u00e5 systemet}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N} = 0} \\ &= \vec{F}_{ytre} \end{aligned}$$

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \frac{d^2}{dt^2} \sum_i m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} (M \vec{R}_{CM}) = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

Dermed: $M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}$

Tyngdepunktet \vec{R}_{CM} beveger seg som om hele massen M er samlet i \vec{R}_{CM} , og ble utsatt for summen av alle ytre krefter som virker p\u00e5 systemet.

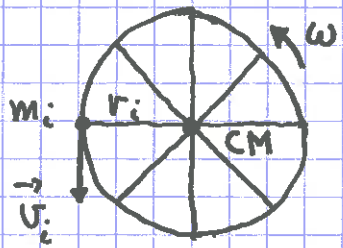
I tillegg: Rotasjon om CM.

Vibrasjon om CM.

ROTASJON [YF 9,10 ; LL 6 (5)]

Innledning:

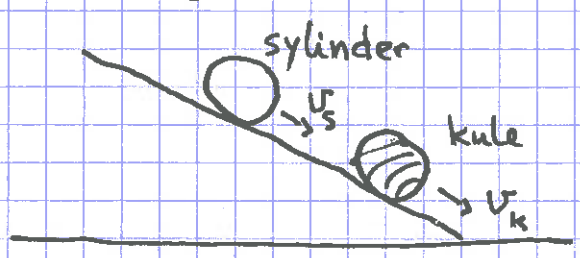
- Roterende hjul



CM i ro $\Rightarrow K_{trans} = 0$, men
 $K_{rot} \neq 0$

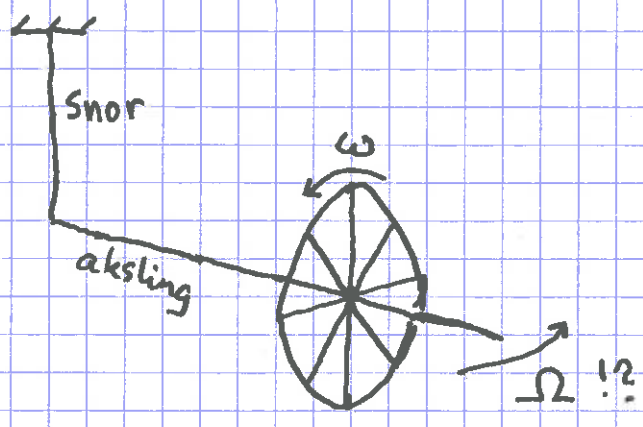
Impuls: $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$, men
dreieimpuls $\neq 0$

- Rulling



Hvor angiper kreftene?
Dreiemoment!
 Hvorfor $v_k > v_s$?
 Friksjonens rolle.

- Komplisert dynamikk



Preseksjon.
 Gyroskop.

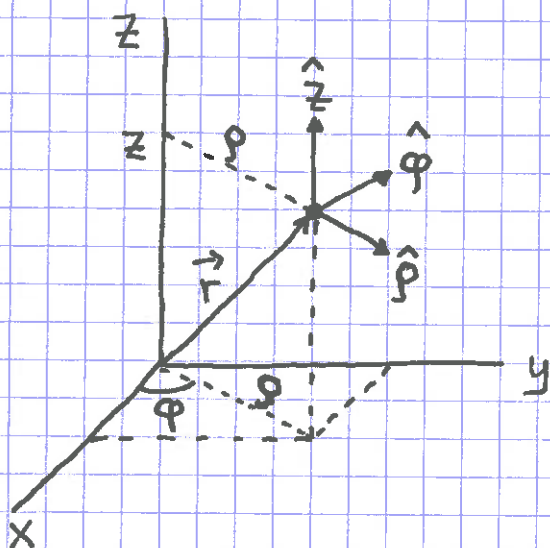
- Ser på stive legemer (= system med punktmasser i fast innbyrdes avstand)

Sirkelbevegelse [YF 9.1-9.3 ; LL 1.8]

(Repetisjon + generalisering)

Rotasjon om gitt akse, f.eks. z

\Rightarrow Lurt med synderkoord. (= polarkoord. + z)



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

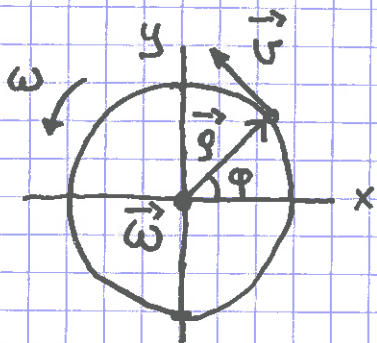
$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi, \quad z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\varphi = y/x$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

"Peker ut" rot.aksen med vinkelhastigheten:

$$\omega \longrightarrow \vec{\omega} = \omega \hat{z} \quad (= \omega \hat{\omega})$$



$$\vec{u} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{\rho d\varphi}{dt} \hat{\varphi} = \rho \omega \hat{\varphi}$$

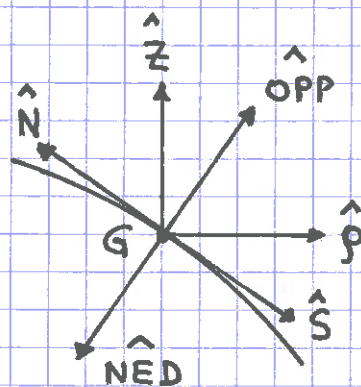
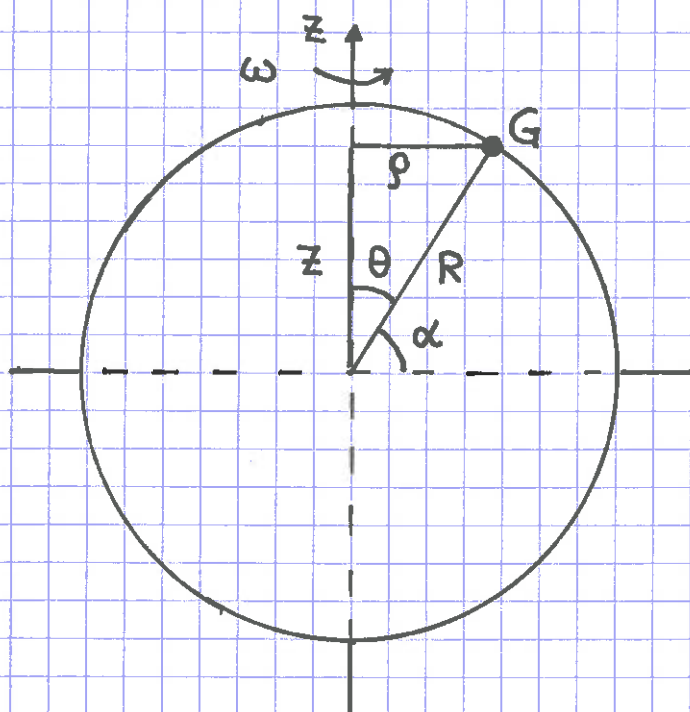
$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}, \quad \vec{\rho} = \rho \hat{\rho}$$

[Notasjon: • Vektor opp fra planet
x Vektor ned i planet]

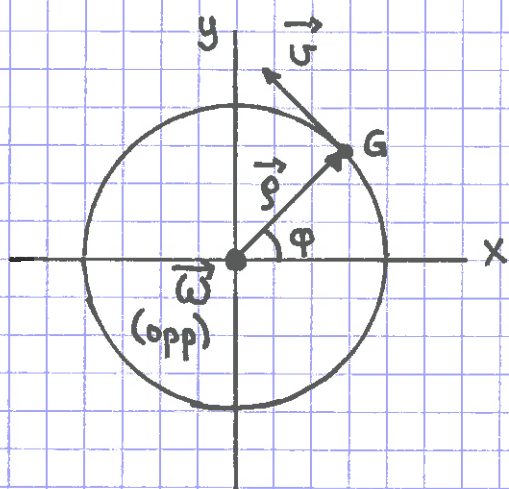
Ser at krussprodukt er skreddersydd:

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}$$

(Retning: $\hat{\varphi} = \hat{z} \times \hat{\rho}$; OK!
Abs.verdi: $u = \omega \rho$; OK!)



$$\begin{aligned} \bullet \hat{v} &= -\hat{\phi} \\ \otimes \hat{\theta} &= \hat{\phi} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \alpha &= 63.4^\circ \Rightarrow \theta = 26.6^\circ \\ R &= 6.36 \cdot 10^6 \text{ m} \\ T &= 24 \text{ h} = 8.64 \cdot 10^4 \text{ s} \\ \omega &= 2\pi/T = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \\ \rho &= R \sin \theta = 2.85 \cdot 10^6 \text{ m} \\ z &= R \cos \theta = 5.69 \cdot 10^6 \text{ m} \\ v &= \omega \rho = 207 \text{ m/s} (=746 \text{ km/h}) \end{aligned}$$

Vektorstørrelser:

$$\vec{\omega} = 7.27 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \cdot \hat{z}$$

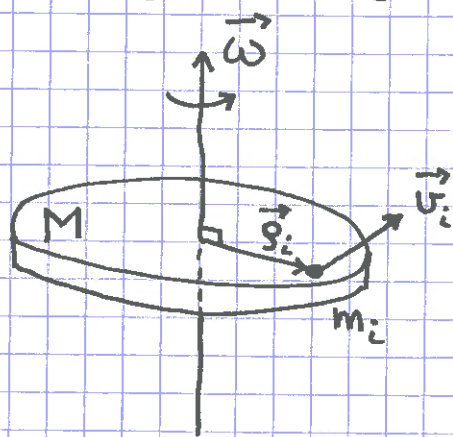
$$\vec{v} = 207 \text{ m/s} \cdot \hat{\phi}$$

$$\vec{\rho} = 2.85 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \hat{\rho}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad ; \quad v = |\vec{v}| = \omega \cdot \rho \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \omega \rho$$

$$\hat{\phi} = \hat{z} \times \hat{\rho}$$

Rotasjonsenergi [YF 9.4 ; LL 6.4]



$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$v_i = \omega r_i$$

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\omega r_i)^2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i r_i^2 \right\} \omega^2$$

Trehetsmoment [YF 9.4 ; LL 6.3]

$I \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i m_i r_i^2 =$ legemets trehetsmoment mhp gitt akse

Med kont. massefordeling:

$$m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} dm ; \quad \sum_i \rightarrow \int \text{(over legemet)}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int r^2 dm}$$

$r =$ avstand fra aksen til masselementet dm

Dermed:

$$\boxed{K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2}$$

Kin. energi for stivt legeme [YF 10.3; LL 6.6]

(36)

Generell bevegelse for stivt legeme:

Translasjon av CM + Rotasjon om akse gjennom CM

⇒ Total kin. energi:

$$K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

[Bevis: Se s. 36A]

M = legemets masse

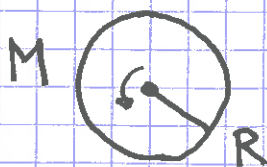
$\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{\text{cm}}$ = hastigheten til CM

I_0 = legemets treghetsmoment mhp rot.aksen gjennom CM

$\vec{\omega}$ = vinkelhastigheten for rot. omkring ——— " ———

Beregning av I [YF 9.6; LL 6.3]

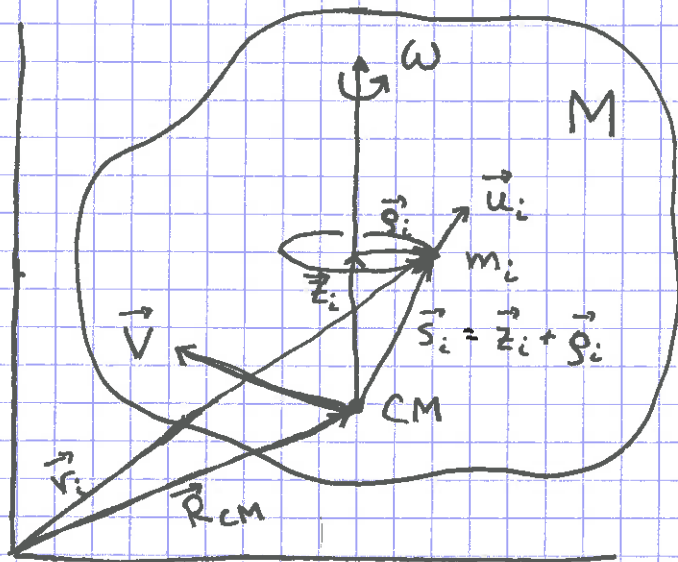
Eks 1: Ring (evt. sylinderskall)



$$I_0 = \int_{\text{ring}} r^2 dm = R^2 \underbrace{\int dm}_{=M} = \underline{\underline{MR^2}}$$

Beweis für $K = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}I_0\omega^2$ für starr legeme

36 A



$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_i$$

$$\vec{u}_i = \dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{R}}_{CM} + \dot{\vec{s}}_i = \vec{V} + \vec{u}_i$$

$$u_i^2 = V^2 + u_i^2 + 2\vec{V} \cdot \vec{u}_i$$

$$u_i^2 = (g_i \omega)^2$$

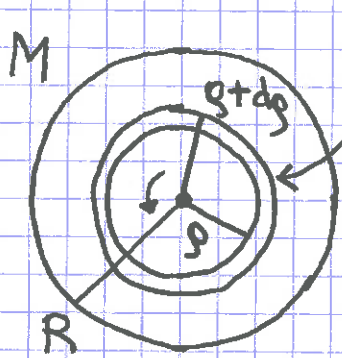
$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i u_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i u_i^2 + \vec{V} \cdot \sum_i m_i \vec{u}_i$$

$$= \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} \left\{ \sum_i m_i g_i^2 \right\} \omega^2 + \vec{V} \cdot \frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{s}_i$$

$$\sum_i m_i \vec{s}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) = M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM} = 0$$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \quad \text{qed}$$

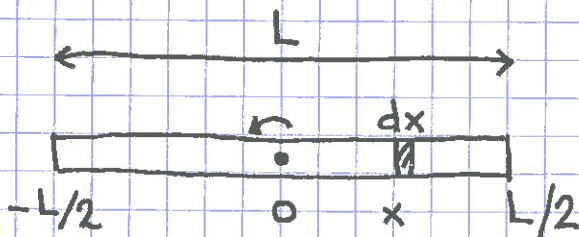
Eks 2: Sirkulær skive (evt kompakt sylinder) (37)



$$dm = M \cdot \frac{dA}{A} = M \cdot \frac{2\pi\rho \cdot d\rho}{\pi R^2}$$

$$\Rightarrow I_o = \int_0^R \rho^2 M \frac{2\rho d\rho}{R^2} = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \frac{1}{4} \rho^4$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}}$$

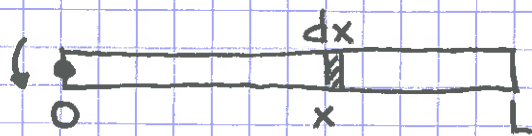
Eks 3: Tynn stang



$$\rho = x; \quad dm = M \cdot \frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow I_o = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{3} x^3 = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

Eks 4: Om akse gjennom stangas ende



$$I = \int_0^L x^2 \cdot M \cdot \frac{dx}{L} = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

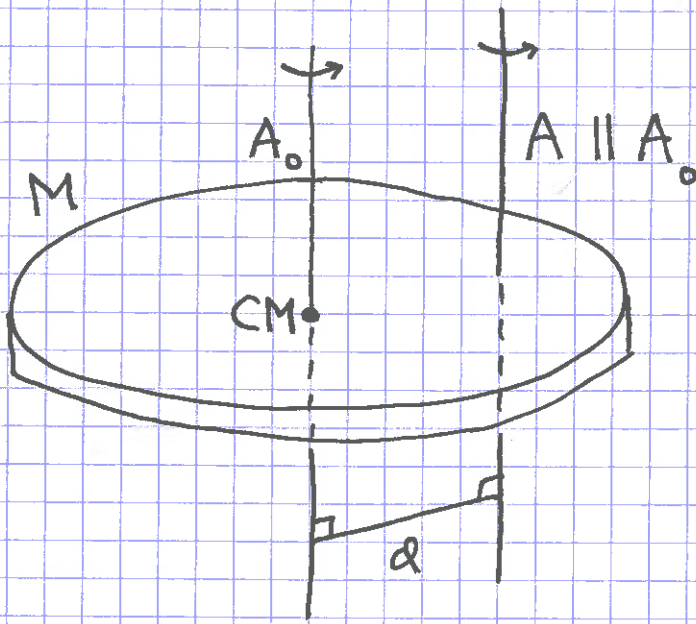
Eks 5: Kuleskall $I_o = \frac{2}{3} MR^2$

Eks 6: Kompakt kule $I_o = \frac{2}{5} MR^2$

Steiners sats (Parallellaksetheorem)

(38)

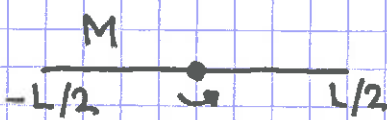
[YF 9.5 ; LL 6.3]



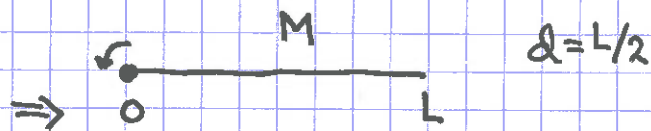
$$I = I_0 + M d^2$$

[Bevis: Se s. 38A]

Eks 1: Tynn stang

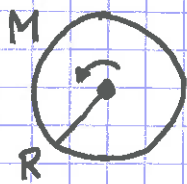


$$I_0 = \frac{1}{12} M L^2$$



$$I = I_0 + M \cdot (L/2)^2 = \frac{1}{3} M L^2$$

Eks 2: Kompakt kule

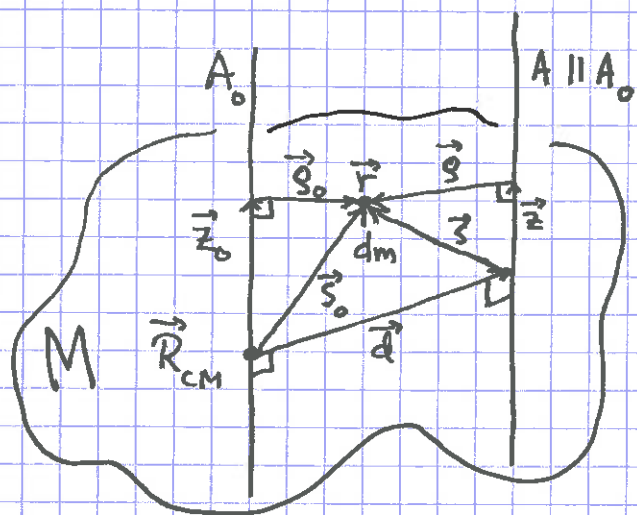


$$I_0 = \frac{2}{5} M R^2$$



$$I = I_0 + M \cdot R^2 = \frac{7}{5} M R^2$$

Bevis Steiners sats



Fra figur: (dm er i pos. \vec{r})

$$\vec{r} = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_0$$

$$\vec{s}_0 = \vec{z}_0 + \vec{s}$$

$$\vec{s} = \vec{z} + \vec{s}_0$$

$$\vec{z} = \vec{z}_0$$

(fordi $\vec{d} \perp \hat{z}$)

$$\Rightarrow \vec{s} - \vec{s}_0 = \vec{z} - \vec{z}_0 = -\vec{d} \Rightarrow \vec{s} = \vec{s}_0 - \vec{d}$$

$$\Rightarrow s^2 = (\vec{s}_0 - \vec{d}) \cdot (\vec{s}_0 - \vec{d}) = s_0^2 + d^2 - 2\vec{d} \cdot \vec{s}_0$$

$$\Rightarrow I = \int s^2 dm = \underbrace{\int s_0^2 dm}_{I_0} + d^2 \underbrace{\int dm}_M - 2 \int \vec{d} \cdot \vec{s}_0 dm$$

$$\vec{d} \cdot \vec{s}_0 = \vec{d} \cdot (\vec{s}_0 - \vec{z}_0) = \vec{d} \cdot \vec{s}_0 = \vec{d} \cdot (\vec{r} - \vec{R}_{CM})$$

$$\Rightarrow \int \vec{d} \cdot \vec{s}_0 dm = \vec{d} \cdot \underbrace{\int \vec{r} dm}_{M\vec{R}_{CM}} - \vec{d} \cdot \vec{R}_{CM} \underbrace{\int dm}_M = 0$$

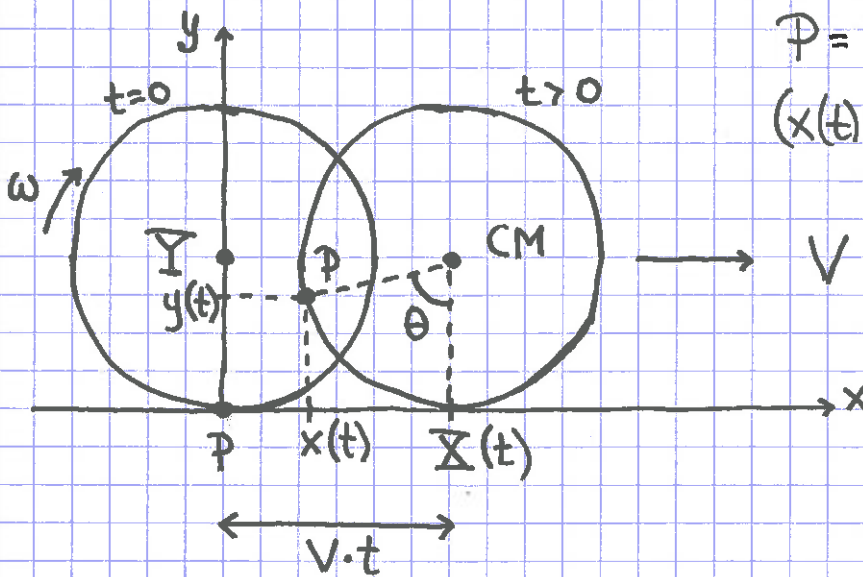
$$\Rightarrow I = I_0 + Md^2 \quad \text{qed}$$

Rulling og sluring

[YF 10.3 ; LL 6.7]

39

Ren rulling



P = punkt på periferien
 $(x(t), y(t))$ = banen til P

$$V = \dot{R}_{CM} = \dot{X} ; Y = R$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

$$X = V \cdot t = R \cdot \theta$$

$$V = \dot{X} = R \dot{\theta} = R \omega$$

$$A = \ddot{X} = \dot{V} = R \ddot{\theta} = R \dot{\omega} = R \alpha$$

Rullebetingelser:

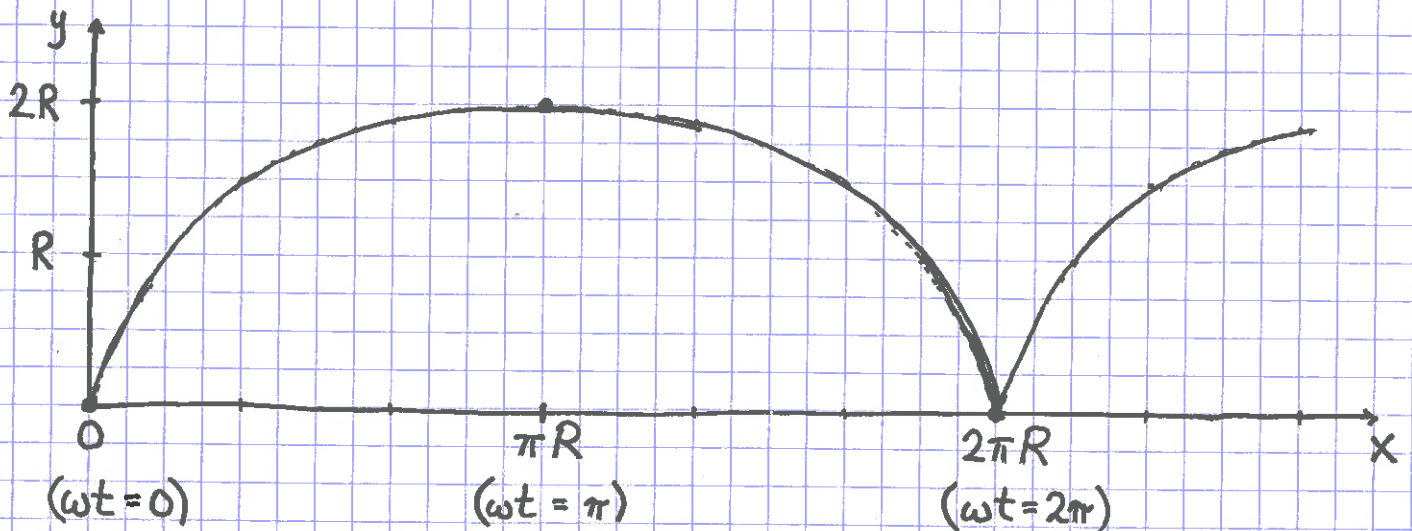
$$V = R\omega, \quad A = R\alpha$$

Banen til \mathcal{P} (anta $\omega = \text{konst}$, dvs $\theta = \omega t$): (40)

$$x(t) = \underline{X}(t) - R \sin \theta = V \cdot t - R \sin \omega t$$

$$y(t) = \underline{Y} - R \cos \theta = R - R \cos \omega t$$

Sykloide:

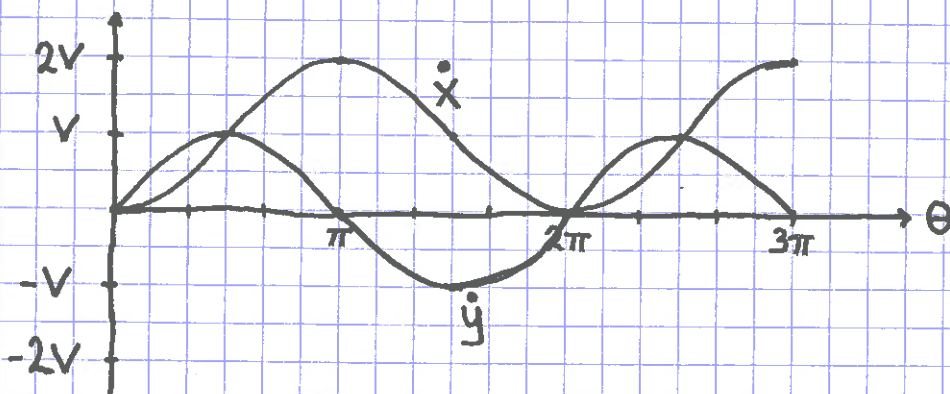


Hastigheten til \mathcal{P} :

$$\dot{x} = V - \omega R \cos \omega t = V(1 - \cos \omega t)$$

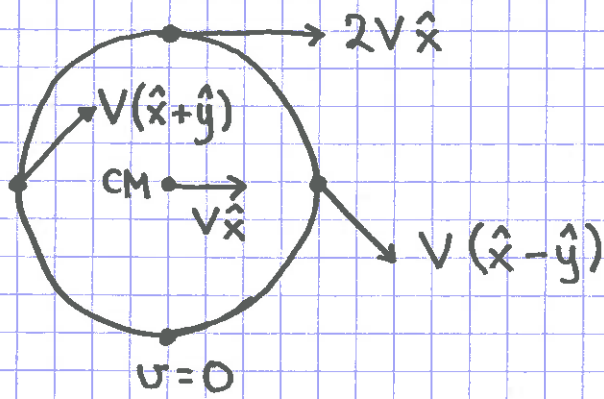
$$\dot{y} = \omega R \sin \omega t = V \sin \omega t$$

dvs: $\vec{v}(\theta) = \hat{x} V \cdot (1 - \cos \theta) + \hat{y} V \sin \theta$



18.09.14

41



Dvs: Ingen relativ bevægelse i kontaktpunktet ved ren rulling!

Kin. energi ved ren rulling:

$$K = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$I_0 = c \cdot M R^2 \quad (\text{ring: } c=1, \text{ kompakt kule: } c=\frac{2}{5} \text{ osv})$$

$$\omega = V/R \quad (\text{rullebetingelse})$$

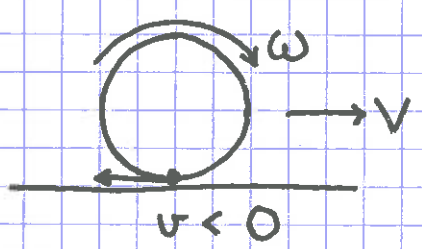
$$\Rightarrow \boxed{K = (1+c) \cdot \frac{1}{2} M V^2}$$

Sluring

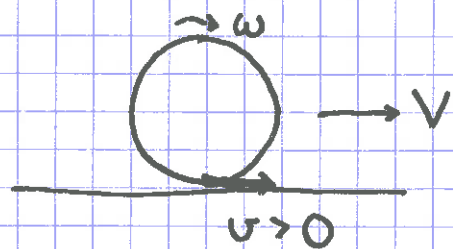
Hvis $\omega \neq \frac{V}{R}$: Relativ hastighet $v = V - \omega R \neq 0$ mellom legeme og underlag i kontaktpunktet.

Legemet roterer og glir samtidig; det slurer.

$\omega > V/R$:

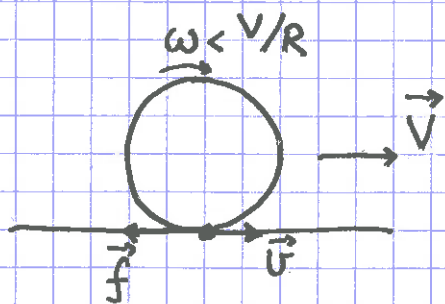
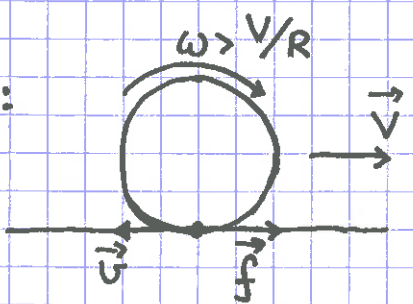


$\omega < V/R$:



Friksjonens rolle

Sluring:



Friksjonskraft \vec{f} rettet mot \vec{v} ; $f = |\vec{f}| = \mu_k \cdot N$

Effekttap : $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0 \Rightarrow$ redusert mekanisk energi

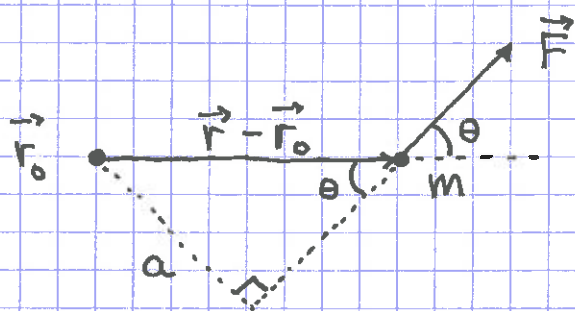
Ren rulling:

$v = 0 \Rightarrow P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$ mek. energi bevart

Statisk friksjon: $f \leq \mu_s \cdot N$. Retning på \vec{f} mot "tenkt relativhastighet" \vec{v} hvis det ikke var friksjon.

Dreiemoment

[YF 10.1 ; LL 5.5, 6.4]



$$\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$$

$\vec{\tau}$ er \vec{F} sitt dreiemoment på m, relativt et valgt referansepunkt \vec{r}_0 .

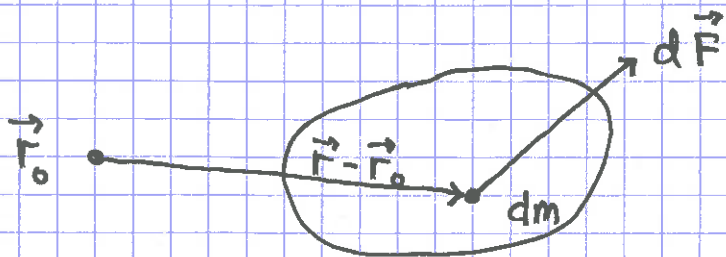
Retning: $\vec{\tau} \perp \vec{F}$ og $\vec{\tau} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$

($\vec{\tau}$ opp av planet i figuren ; h.h. regel)

Abs.verdi: $|\vec{\tau}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin\theta$

$= a \cdot F$ ("arm · kraft")

For partikkelsystem:



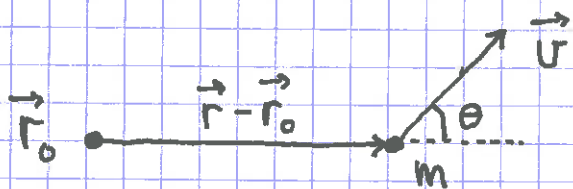
$$d\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F} = \text{totalt dreiemoment på legemet, relativt } \vec{r}_0$$

Dreieimpuls

[YF 10.5; LL 6.6]

44



$$\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p} = m (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$$

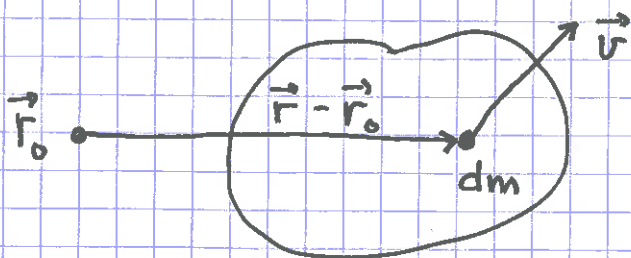
\vec{L} er dreieimpulsen til m , relativt \vec{r}_0 .

Retning: $\vec{L} \perp \vec{p}$ og $\vec{L} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$.

(\vec{L} opp i fig. over)

Abs.verdi: $|\vec{L}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin\theta$
 $= a \cdot p$ ("arm · impuls")

For partikkelsystem:



$$d\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{p} \\ = dm \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v}$$

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int dm \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} = \text{total dreieimpuls} \\ \text{for legemet,} \\ \text{relativt } \vec{r}_0$$

N2 for rotasjon [YF 10.5 ; LL 6.6]

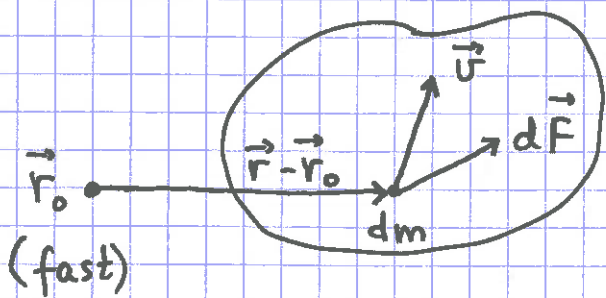
("Spinnsatsen")

$$N2: \vec{F} = m\vec{a} = m\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{p}}$$

Anta fast \vec{r}_0 , dvs $\dot{\vec{r}}_0 = 0$. (Evt. $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$)

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} \{ m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \} \\ &= m \underbrace{\vec{v} \times \vec{v}}_{=0} + m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a} \\ &= (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F} = \vec{\tau} \end{aligned}$$

For partikkelsystem:



$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \frac{d}{dt} \int d\vec{L} = \frac{d}{dt} \int dm(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \\ &= \int dm (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a} = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F} = \int d\vec{\tau} = \vec{\tau} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}} \quad N2 \text{ for rotasjon}$$

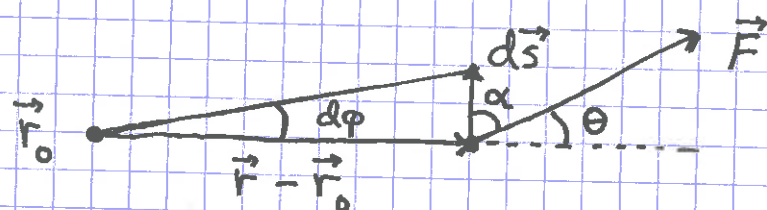
$\vec{\tau}$ = dreiemoment (netto, ytre!) på legemet

\vec{L} = legemets dreieimpuls

Arbeid ved rotasjon

[YF 10.4 ; LL 6.4]

(46)



$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$$
$$\cos \alpha = \sin \theta$$

Arb. utført av \vec{F} ved rotasjon $d\varphi$:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F \cdot ds \cdot \cos \alpha$$
$$= |\vec{F}| \cdot |r - r_0| \cdot d\varphi \cdot \sin \theta = \tau \cdot d\varphi$$

Tilført effekt:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\tau \cdot d\varphi}{dt} = \tau \cdot \omega$$

Altså:

$$dW = \tau d\varphi$$

$$P = \tau \cdot \omega$$

3f. arbeid og effekt ved translasjon (s. 17):

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

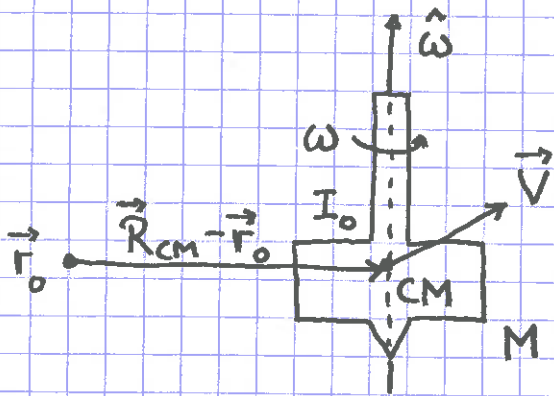
$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

\vec{L} for stivt legeme [YF 10.5; LL 6.6]

47

22.09.14

Forbehold: Legeme med ~~synders~~refleksjons-symmetri om rotasjonsaksen.



Fra s. 36: $K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$

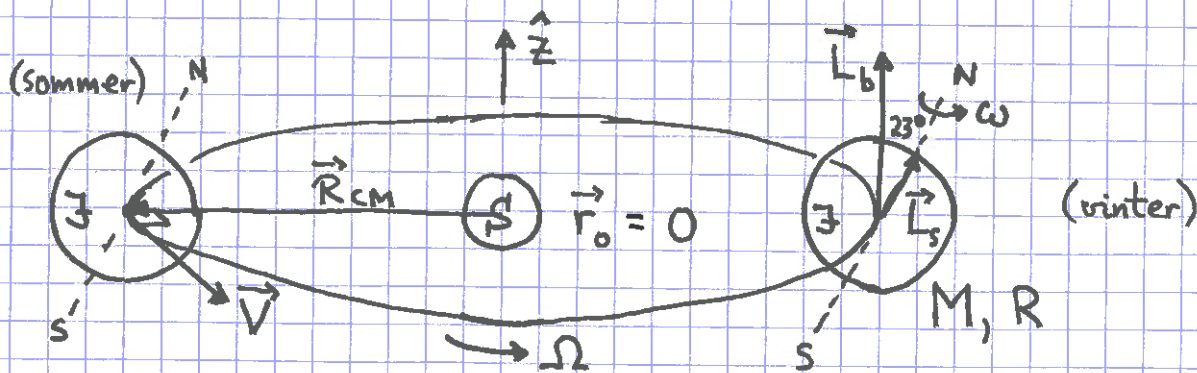
Tilsvarende: $\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{R}_{\text{CM}} - \vec{r}_O) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$

[Basis: s. 47A, 47B]

Banedreieimpuls, relativt \vec{r}_O : $\vec{L}_b = M(\vec{R}_{\text{CM}} - \vec{r}_O) \times \vec{V}$

Indre dreieimpuls, spinn, uavh. av \vec{r}_O : $\vec{L}_s = I_0 \vec{\omega}$

Eks 1: \vec{L} til Jorda (J) relativt Sola (S)



$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{\text{CM}} \times M \vec{V} + I_0 \vec{\omega} = R_{\text{CM}} M V \hat{z} + I_0 \vec{\omega}$$

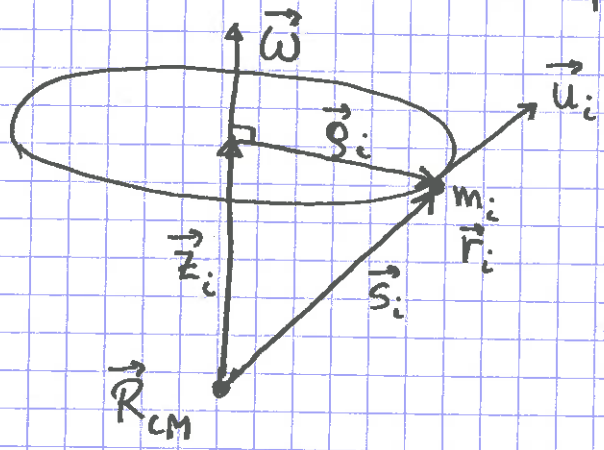
$R_{\text{CM}} \sim 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, $M \sim 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $V = R_{\text{CM}} \Omega$; $\Omega = 2\pi / 1 \text{ år}$

$I_0 \sim \frac{1}{3} M R^2$; $R \sim 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$, $\omega = 2\pi / 1 \text{ døgn}$

$\Rightarrow L_b \sim 2.7 \cdot 10^{40} \text{ Js}$; $L_s \sim 6 \cdot 10^{33} \text{ Js} \Rightarrow L_b \gg L_s$

Bewis for $\vec{L} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$

for stivt legeme med sylindersymmetri om rotasjonsaksen
refleksjons-



$$\vec{r}_i = \vec{R}_{CM} + \vec{s}_i$$

$$\vec{v}_i = \vec{V} + \vec{u}_i$$

$$\vec{s}_i = \vec{z}_i + \vec{\rho}_i$$

$$\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i \quad (\text{siden } \vec{\omega} \times \vec{z}_i = 0)$$

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_0) \times \vec{v}_i \\ &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0 + \vec{s}_i) \times (\vec{V} + \vec{u}_i) \\ &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} \\ &\quad + \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i + \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i \end{aligned}$$

1. sum: $\sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = M(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} = \vec{L}_b$

2. sum: $\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{V} = \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = (M\vec{R}_{CM} - M\vec{R}_{CM}) \times \vec{V} = 0$

3. sum: $\begin{aligned} \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{u}_i &= \sum_i m_i (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i) \\ &= (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times (\vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{s}_i}_{=0}) = 0 \end{aligned}$

4. sum: $\sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i =$ dreieimpuls pga masselementenes bevegelse relativt CM

(Til nå: Helt generelt!)

Stivt lagema : $\vec{u}_i = \vec{\omega} \times \vec{s}_i$

$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times \vec{u}_i = \sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i)$

Vektoridentitet: $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_i m_i \vec{s}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{s}_i) &= \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega} s_i^2 - \vec{s}_i (\vec{s}_i \cdot \vec{\omega}) \right\} \\
&= \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega} (z_i^2 + \rho_i^2) - (z_i + \vec{\rho}_i) z_i \vec{\omega} \right\} \\
&= \sum_i m_i \left\{ \vec{\omega} (z_i^2 + \rho_i^2) - z_i^2 \vec{\omega} - z_i \omega \vec{\rho}_i \right\} \\
&= \sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i \\
&= \underbrace{I_0}_{L_s} \vec{\omega} - \omega \sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i
\end{aligned}$$

Med ~~refleksions-~~ refleksions-symmetri om $\hat{\omega}$, dvs om \hat{z} :

$\sum_i m_i z_i \vec{\rho}_i = \sum_i m_i z_i (x_i \hat{x} + y_i \hat{y}) = 0$

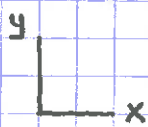
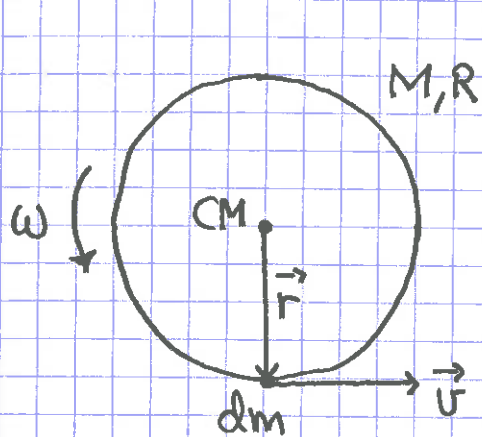
fordi bidraget fra (x_i, y_i) kanselleres ar bidraget fra $(-x_i, -y_i)$!

Dermed:

$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M (\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0) \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$ qed

Eks 2: Ring; ren rotasjon om CM.

(48)



$$\vec{R}_{CM} = \vec{r}_0 = 0 \quad (\text{velges})$$

$$\vec{\omega} = \omega \hat{z}$$

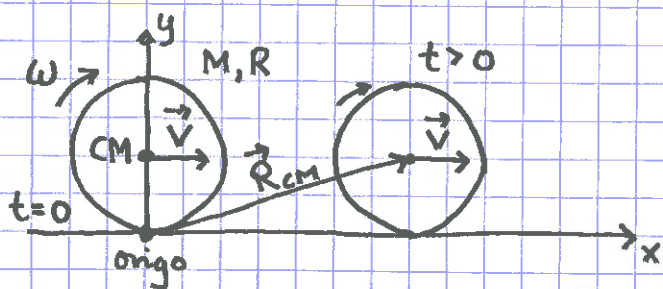
$$d\vec{L} = \vec{r} \times d\vec{p} = \vec{r} \times dm \cdot \vec{v}$$

$$= R \cdot dm \cdot \omega R \cdot \hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \left(\int dm \right) R^2 \omega \hat{z} = MR^2 \omega \hat{z} = \underline{\underline{I_0 \vec{\omega}}}$$

$$\text{Dvs: } \vec{L} = \vec{L}_s ; \quad \vec{L}_b = M \underbrace{(\vec{R}_{CM} - \vec{r}_0)}_{=0} \times \underbrace{\vec{V}}_{=0} = 0$$

Eks 3: Rullende ring ($V = \omega R$)



$$(a) \vec{r}_0 = \vec{R}_{CM} ; \quad \vec{L}_{CM} = ?$$

$$(b) \vec{r}_0 = 0 ; \quad \vec{L}_0 = ?$$

Løsn:

$$(a) \text{ Som over, med } \vec{\omega} = -\omega \hat{z} \Rightarrow \vec{L}_{CM} = I_0 \vec{\omega} = \underline{\underline{-MR^2 \omega \hat{z}}}$$

$$(b) \vec{L}_0 = M \vec{R}_{CM} \times \vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

$$= -MRV \hat{z} - MR^2 \omega \hat{z}$$

$$= \underline{\underline{-2MR^2 \omega \hat{z}}}$$

Bevaringslover, oppsummert

49

- For isolert system (dvs ingen ytre krefter) er total energi, impuls og dreieimpuls bevart.
- Mekanisk energi $E = K + U$ er bevart for konservativt system (dvs ingen dissipasjon pga friksjonsarbeid etc)
- Impuls \vec{p} er bevart for system som ikke påvirkes av netto ytre kraft \vec{F} :
N2, $\vec{F} = d\vec{p}/dt \Rightarrow d\vec{p} = 0$ hvis $\vec{F} = 0$
- Dreieimpuls \vec{L} er bevart for system som ikke påvirkes av netto ytre dreiemoment $\vec{\tau}$:
N2, rotasjon, $\vec{\tau} = d\vec{L}/dt \Rightarrow d\vec{L} = 0$ hvis $\vec{\tau} = 0$

Mekanisk likevekt [YF 11.1-11.3; LL 7.1]

Et stivt legeme er i ro,

$$\vec{p} = 0 \quad \text{og} \quad \vec{L} = 0,$$

bare dersom

$$\underbrace{\sum_i \vec{F}_i}_{\text{Netto ytre kraft}} = 0 \quad \text{og} \quad \underbrace{\sum_i \vec{\tau}_i}_{\text{Netto ytre dreiemoment}} = 0$$

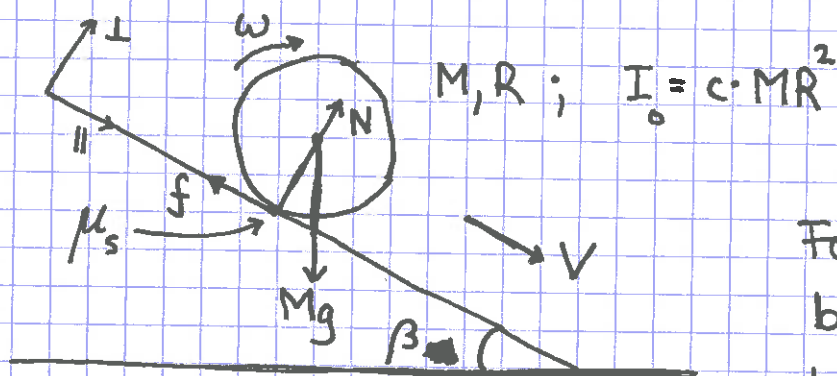
Netto ytre kraft

Netto ytre dreiemoment

Rotasjonsdynamikk, eksempler

50

Eks 1: Rulling på skråplan [YF 10.3; LL 6.8]



For ren rulling ($V = \omega R$),
bestem \dot{V} , og minste
tillatte verdi for μ_s .

Løsning:

Ser at V og ω må øke; må ha dreiemoment τ om CM i tråd med det. Kun friksjonskrafta f har "arm" mhp CM. Da må f ha retning oppover skråplanet for å gi $\dot{\omega} > 0$.

$$N2, \parallel: Mg \sin \beta - f = M \dot{V}$$

$$N1, \perp: N = Mg \cos \beta$$

$$N2, \text{rot. om CM}: f \cdot R = I_0 \dot{\omega} = c M R^2 \cdot \frac{\dot{V}}{R} = c M R \dot{V}$$
$$f = c M \dot{V}$$

$$\Rightarrow Mg \sin \beta - c M \dot{V} = M \dot{V} \Rightarrow \underline{\underline{\dot{V} = g \cdot \frac{\sin \beta}{1+c}}}$$

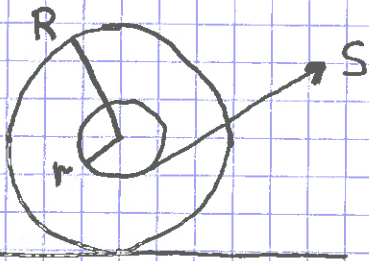
$$f \leq f_{\max} = \mu_s N = \mu_s Mg \cos \beta$$

$$\Rightarrow c M g \sin \beta / (1+c) \leq \mu_s Mg \cos \beta \Rightarrow \underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c} \tan \beta}}$$

$$\text{Ring, Syinderskall: } c=1 \Rightarrow \dot{V} = \frac{1}{2} g \sin \beta, \mu_s^{\min} = \frac{1}{2} \tan \beta$$

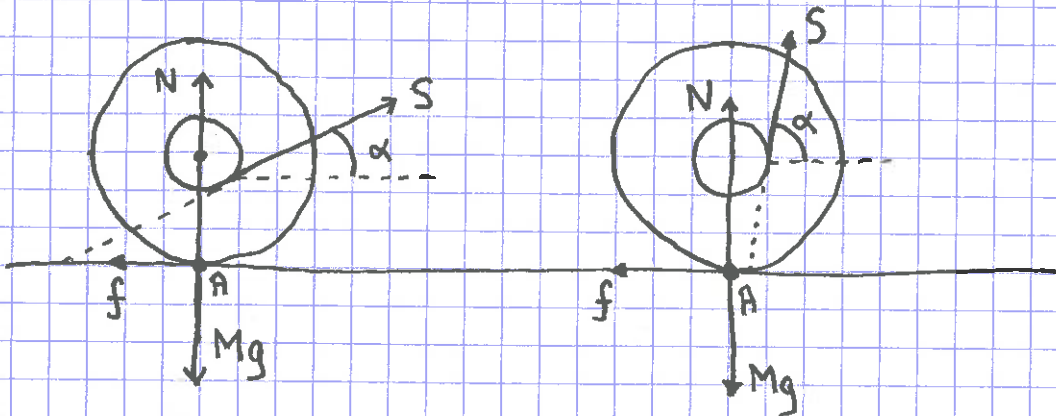
$$\text{Kompakt kule: } c=2/5 \Rightarrow \dot{V} = \frac{5}{7} g \sin \beta, \mu_s^{\min} = \frac{2}{7} \tan \beta$$

Eks 2: Snelle, Fojo



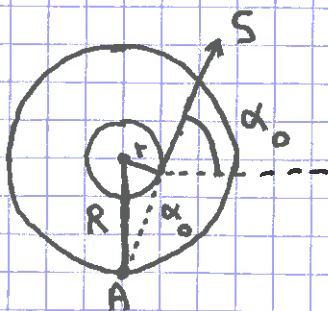
Hvilken vei ruller snella?
(Anta ren rulling.)

Løsning:



N_2 , rot. om kontaktpunktet A: Kun snordraget S har en arm mhp A. Liten $\alpha \Rightarrow$ Rot. med klokka \Rightarrow Ruller mot høyre. Stor $\alpha \Rightarrow$ Rot. mot klokka \Rightarrow Ruller mot venstre.

Hvilken retning på S gir statisk likevekt?



Ingen arm mhp A for S når $\alpha = \alpha_0$, gitt ved

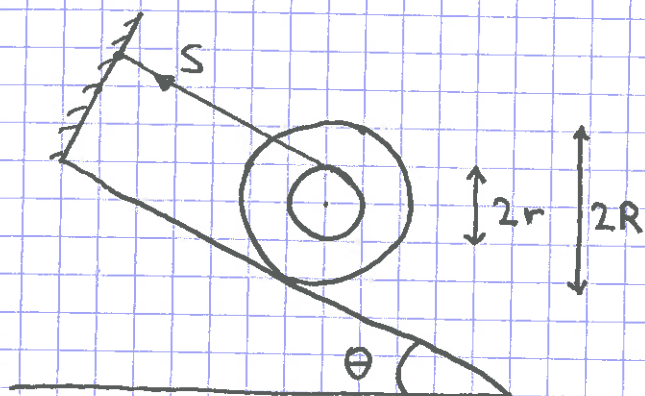
$$\underline{\underline{\cos \alpha_0 = \frac{r}{R}}}$$

[Kan selvsagt ikke trekke for hardt! Med $\alpha = \alpha_0$ må S være mindre enn $\mu_s Mg / (\frac{r}{R} + \mu_s \sqrt{1 - r^2/R^2})$ for at snella skal ligge i ro. Vis dette!]

Eks 3: Sluresnelle (demo + øving)

25.09.14

52



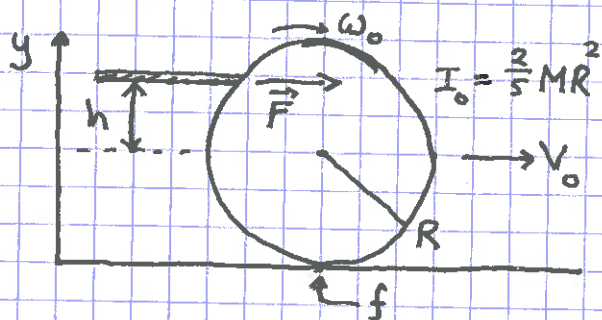
Finn $\theta_0 = \text{max vinkel uten at snella glir (slurer) nedover skråplanet.}$
 Hva er snordraget S da ?

Tips: $N1, \parallel$; $N1, \text{rot. om CM}$; $f = f_{\text{max}} = \mu_s N$ når $\theta = \theta_0$

Finn snellas akselerasjon $a = \ddot{r} = r \ddot{\omega}$ når $\theta > \theta_0$.

Tips: $N2, \parallel$; $N2, \text{rot. om CM}$; $f = \mu_k N$

Eks 4: Snooker ( ving) [LL 6.7]



Kort st t:

$$F \cdot \Delta t = \Delta p = M v_0 \quad (N2)$$

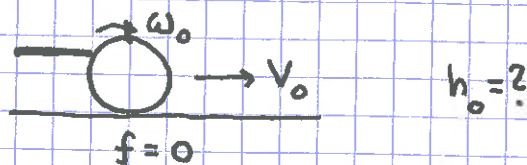
$$\tau \cdot \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0 \quad \left. \begin{array}{l} (N2, \text{rot. om CM}) \end{array} \right\}$$

$$\tau = F \cdot h$$

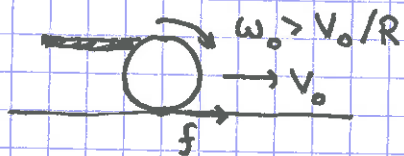
($F \gg f$ i støtet)

Etter støtet:

Ren rulling hvis $h = h_0$, $v_0 = \omega_0 R$:



Hvis $h > h_0$:



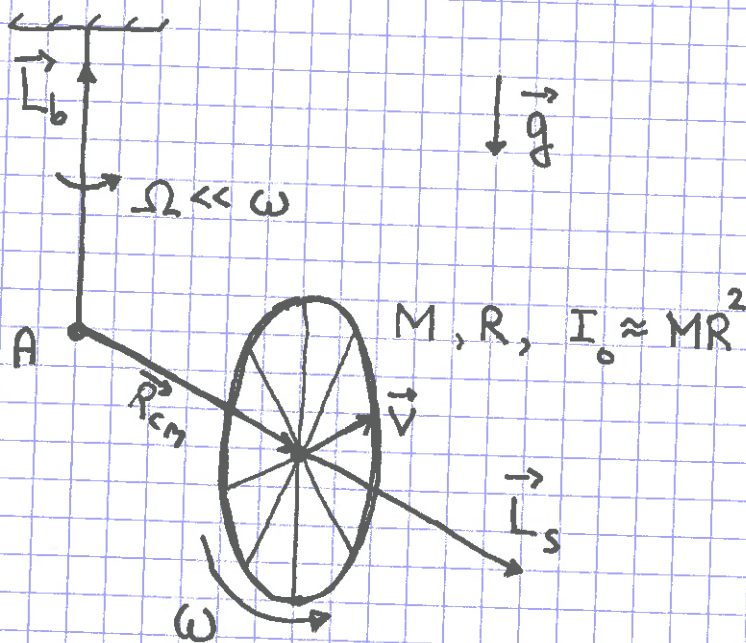
Sluring

Hvis $h < h_0$:



Sluring

Etter hvert:
Ren rulling!



Målte verdier:

$$M \approx 5 \text{ kg}$$

$$R \approx 0.3 \text{ m}$$

$$R_{CM} \approx 0.2 \text{ m}$$

$$T_{\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 4.25 \text{ s}$$

Beregn ω Løsning: $A =$ valgt ref. punkt

$$\vec{L}_A = \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{CM} \times M\vec{V} + I_0 \vec{\omega}$$

$$L_b = R_{CM} M V \ll L_s = MR^2 \omega$$

$$(\vec{L}_b \approx \text{konst.})$$

Tyngden $M\vec{g}$ har arm \vec{R}_{CM} relativt A , og dermed dreiemomentet

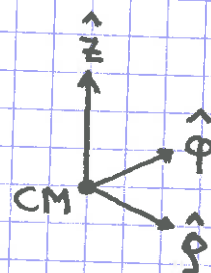
$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{CM} \times M\vec{g}$$

med abs.verdi

$$\tau_A = R_{CM} Mg$$

og retning som \vec{V} , dvs

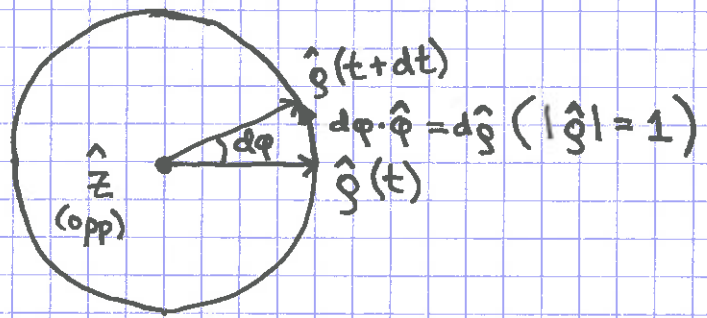
$$\vec{\tau}_A = R_{CM} Mg \hat{\phi}$$



$$N_2, \text{ rot. mhp A: } \vec{\tau}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d\vec{L}_s}{dt} = I_0 \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad (54)$$

$$\vec{\omega}(t) = \omega \cdot \hat{g}(t)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\omega}}{dt} &= \omega \frac{d\hat{g}}{dt} = \omega \frac{d\varphi}{dt} \hat{\varphi} \\ &= \omega \Omega \hat{\varphi} \end{aligned}$$



$$\text{Dermed: } R_{cm} Mg = I_0 \omega \Omega = MR^2 \omega \Omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{R_{cm} g}{R^2 \Omega}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{(2\pi R)^2}{R_{cm} g T_\Omega}}}$$

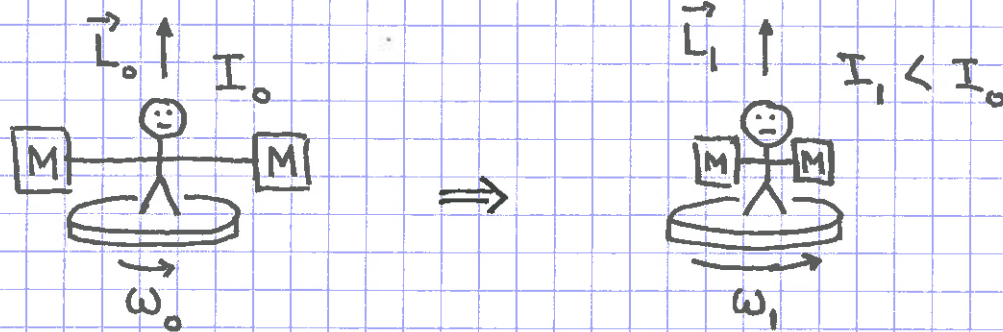
Tallverdier ($g \approx 10 \text{ m/s}^2$):

$$T_\omega = \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot 4.25} \text{ s} \approx \underline{\underline{0.42 \text{ s}}}$$

Høres vel rimelig ut!? (Ca to og en halv omdreining pr sekund.)

Eks 6: Piruett (demo)

[YF 10.6; LL 6.5]



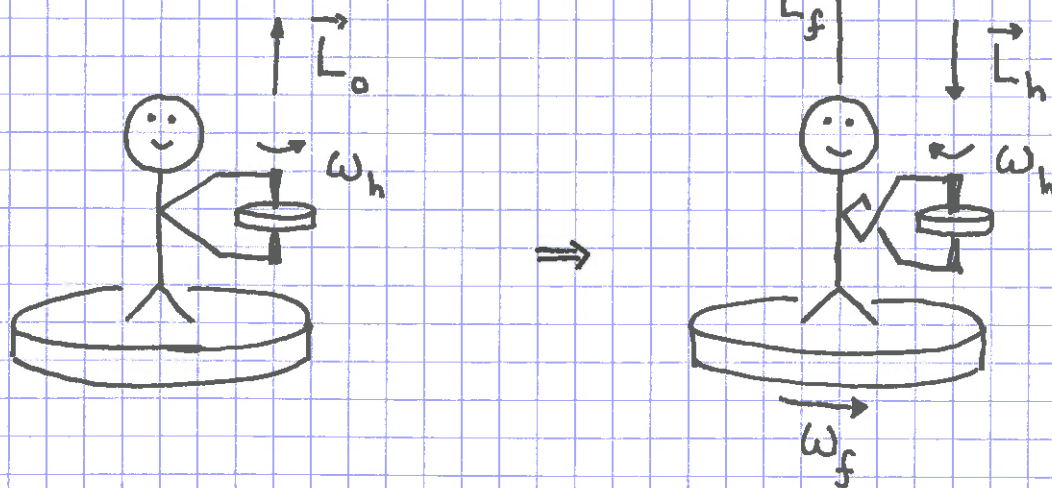
$$\tau_{\text{ytre}} = 0 \Rightarrow \vec{L} \text{ er bevart} \Rightarrow \vec{L}_0 = \vec{L}_1$$

$$\Rightarrow I_0 \omega_0 = I_1 \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{I_0}{I_1} \omega_0 > \omega_0$$

Vis at mekanisk energi øker: $K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 > \frac{1}{2} I_0 \omega_0^2 = K_0$

Forklar hvorfor!

Eks 7: Bevaring av \vec{L} for hjul + foreleser (demo) (+stol)



h: hjul
f: foreleser

$$\tau_{\text{ytre}} = 0 \Rightarrow \Delta \vec{L} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{L}_f + \vec{L}_h = \vec{L}_0$$

$$|\vec{L}_0| = |\vec{L}_h| ; \quad \vec{L}_f = 2\vec{L}_0$$

SVINGNINGER

[YF 14; LL 9]

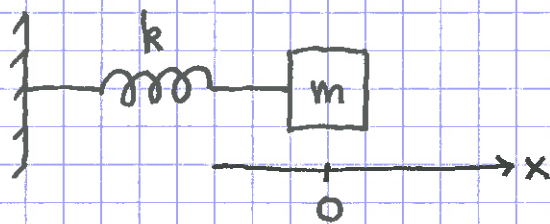

= oscillasjoner

= periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: masse/fjær, pendel, gitarstreng, luft i orgelpipe, atomer i molekyler og krystaller

Harmonisk oscilator

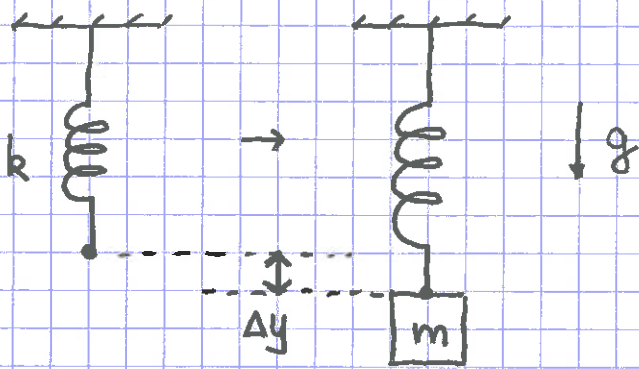
[YF 14.2; LL 9.1-9.3]

Likevekt ($F=0$) med m i $x=0$ (evt. CM i $x=0$)Strukket fjær, $x > 0$: Sammenpresset fjær, $x < 0$: Hookes lov (ideell fjær): $|F| \sim |x|$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -k \times \hat{x}}$$

Fjærkonstanten: k $[k] = \text{N/m}$

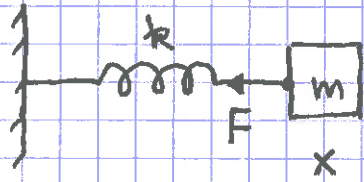
Vertikalt i tyngdefeltet:



Likevekt:

$$k \cdot \Delta y = mg$$

$$\Rightarrow \Delta y = mg/k$$



$$N2: -kx = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Innfør $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

$$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Beregningsslikning
for enkel harmonisk
oscillator, i en dimensjon

Løsning [TMA4110, øving 3]: Frie svingn. uten demping.

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{ert.} \quad x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$$

der A og φ , ert. B og C, fastlegges via

2 initialbetingelser, f.eks. $x(0) = x_0$ og $\dot{x}(0) = v_0$

[Bruk $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ til å
finne sammenhengen mellom A, φ og B, C!]

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

A = amplitude = max utsving fra likevekt; [A] = [x]

ω_0 = vinkelfrekvens; [ω_0] = s^{-1}

T = $2\pi/\omega_0$ = periode = tid pr svingning; [T] = s

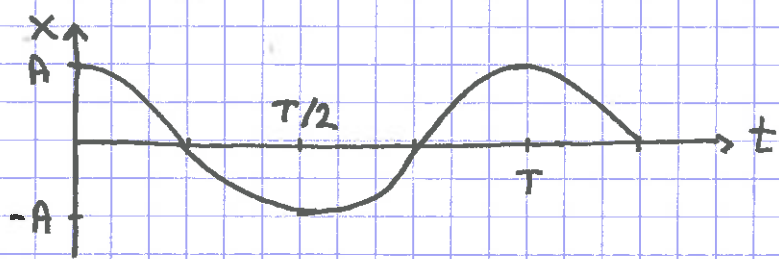
f = $1/T$ = frekvens = antall svingninger pr tidsenhet; [f] = Hz = s^{-1}

$\omega_0 t + \varphi$ = svingningens fase

φ = fasekonstant; [φ] = 1

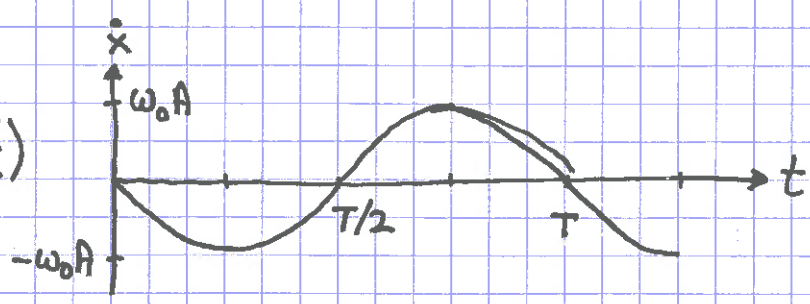
Anta $\varphi = 0, A > 0$:

$$x(t) = A \cos \omega_0 t$$



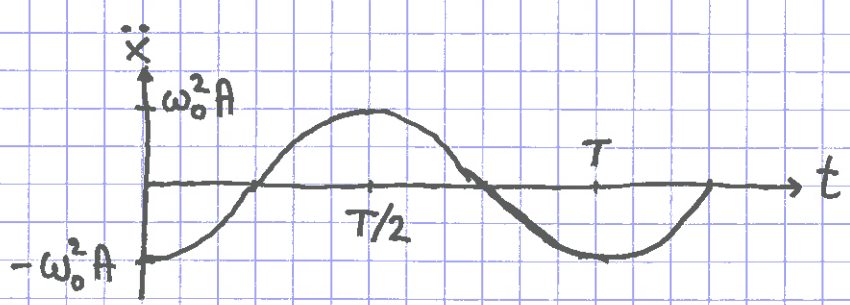
$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t$$

$$= \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$$



$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t$$

$$= \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \pi)$$



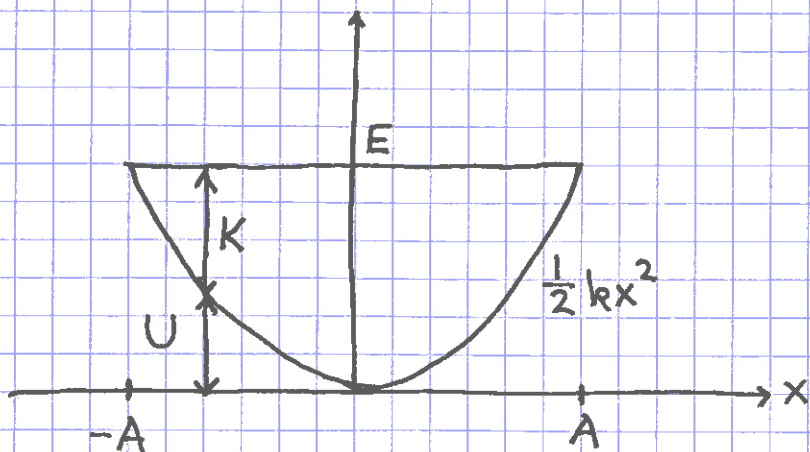
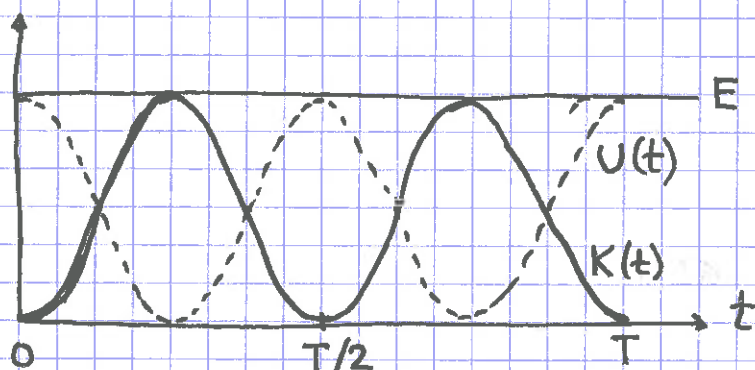
Energi i harmonisk oscillator [YF 14.3; LL 9.4] (59)

$$K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$U(t) = - \int_0^x F[x(t)] dx = - \int_0^x [-kx(t)] dx = \frac{1}{2} k x(t)^2$$
$$= \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$\Rightarrow E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 = \text{konstant}$$

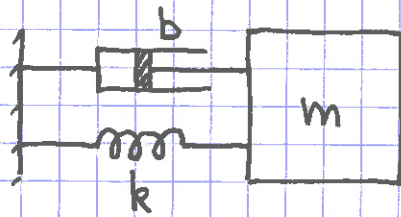
Dvs: Konservativt system (mek. energi E er bevart)



Dempet fri svingning [YF 14.7; LL 9.7]

(60)

Anta friksjon som for langsom bevegelse i fluid (s.12):



$$f = -b\dot{x}$$

$$\text{Netto kraft p\u00e5 } m: -kx - b\dot{x}$$

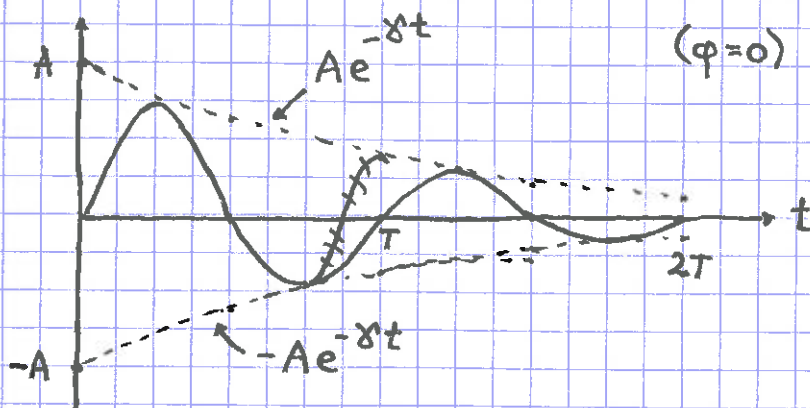
$$N2: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0; \quad \gamma = \frac{b}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$
$$[\gamma] = [\omega_0] = s^{-1}$$

L\u00f8sning [TMA 4110, \u00f8ving 3]:

Underkritisk demping, $\gamma < \omega_0$ ($b < 2\sqrt{k \cdot m}$)

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$$

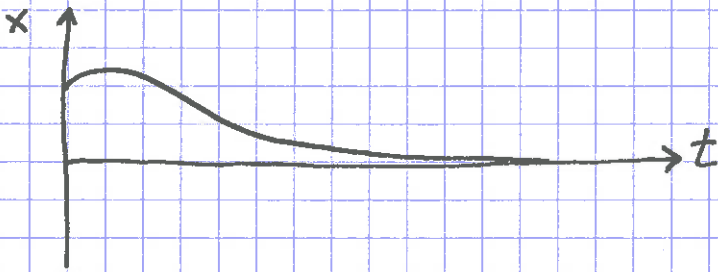


Amplituden $Ae^{-\gamma t}$ avtar eksponentielt med t

Overkritisk demping, $\gamma > \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\alpha_1 t} + B e^{-\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

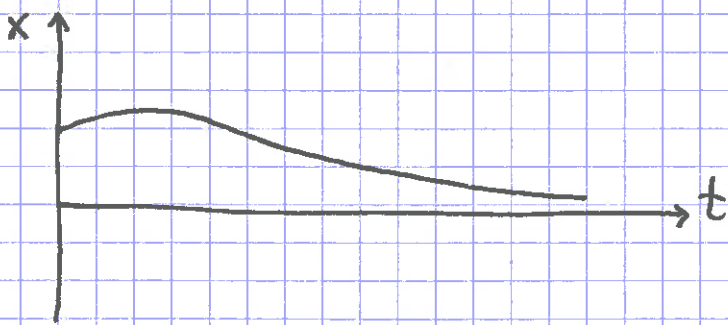


Ingen svingninger

Kritisk demping, $\gamma = \omega_0$

$$x(t) = A e^{-\gamma t} + B t e^{-\gamma t}$$

(“Dobbel rot”,
 $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma$)



Eks: Støtdempere i bil.

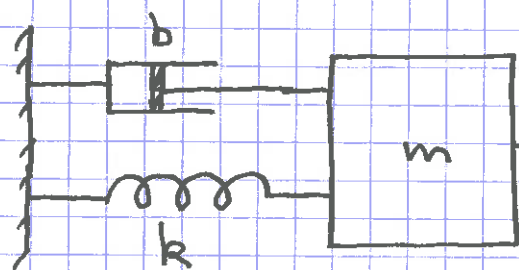
Mest behagelig på humpete veier.

Tvingen svingning. Resonans

[YF 14.8; LL 9.9]

(62)

02.10.14



$$F_y(t) = F_0 \cos \omega t$$

= ytre kraft, antas harmonisk

$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

Løsning:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

der homogen løsn. x_h oppfyller $\ddot{x}_h + 2\gamma\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$

og partikulærløsn. x_p oppfyller $\ddot{x}_p + 2\gamma\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$

I starten (før $e^{-\gamma t} \ll 1$) bidrar både x_h og x_p til innsvingningsforløpet.

Etter hvert blir $\gamma t \gg 1$, $e^{-\gamma t} \approx 0$ og $x_h(t) \rightarrow 0$, slik at $x(t) = x_p(t)$.

Gjetter: $x_p(t) = A(\omega) \sin(\omega t + \varphi)$

Innsetting av x_p , \dot{x}_p og \ddot{x}_p resulterer i:

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right)$$

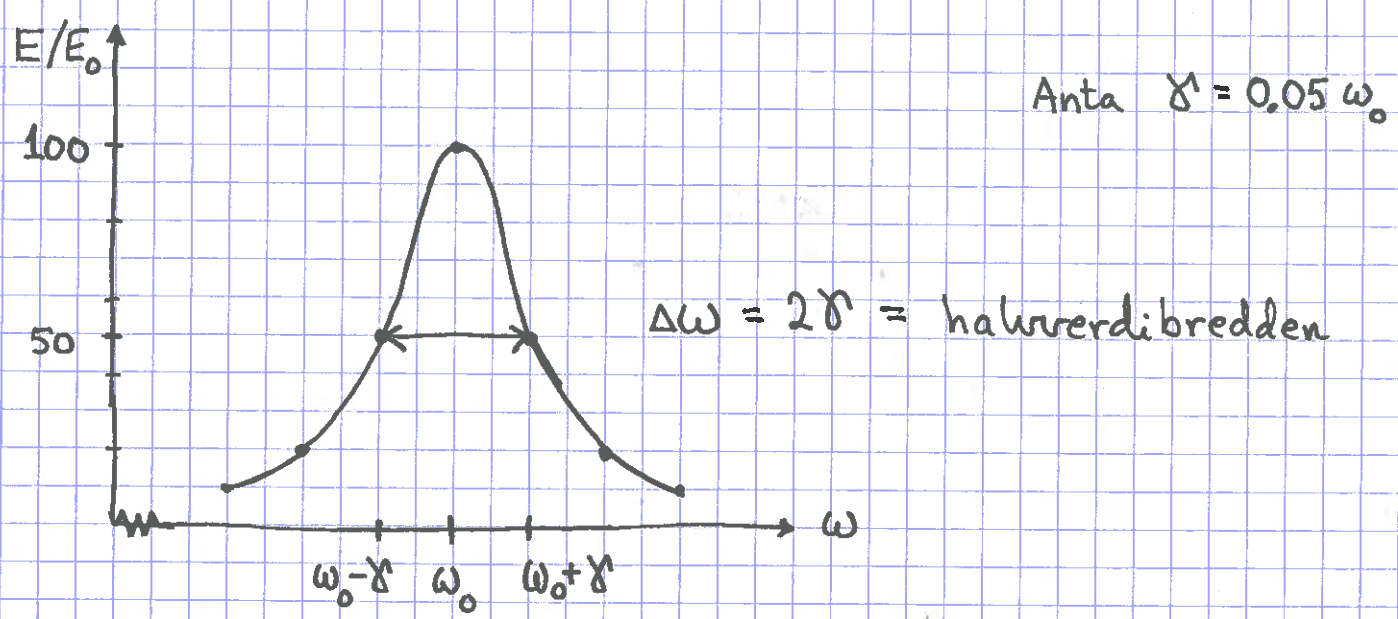
(med $\omega_0^2 = k/m$, $2\gamma = b/m$)

Resonans: Anta svak demping, $\gamma \ll \omega_0$. Ser da (63) at amplituden A blir stor hvis ytre kraft har frekvens $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ = systemets egenfrekvens (evt. resonansfrekvens): $A \rightarrow \infty$ når $\gamma \rightarrow 0$ og $\omega \rightarrow \omega_0$.

La oss plote oscillatorens energi (se s. 59):

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} k \frac{F_0^2}{m^2} \cdot \frac{1}{\omega_0^4} \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}$$

$$= \underbrace{\frac{F_0^2}{2k}}_{E_0} \cdot \underbrace{\frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}_{\text{dimensjonsløs størrelse}} \quad [\text{OK for } \omega \text{ nær } \omega_0]$$



Q-faktor: Mål for resonanstoppens grad av "skarphet"

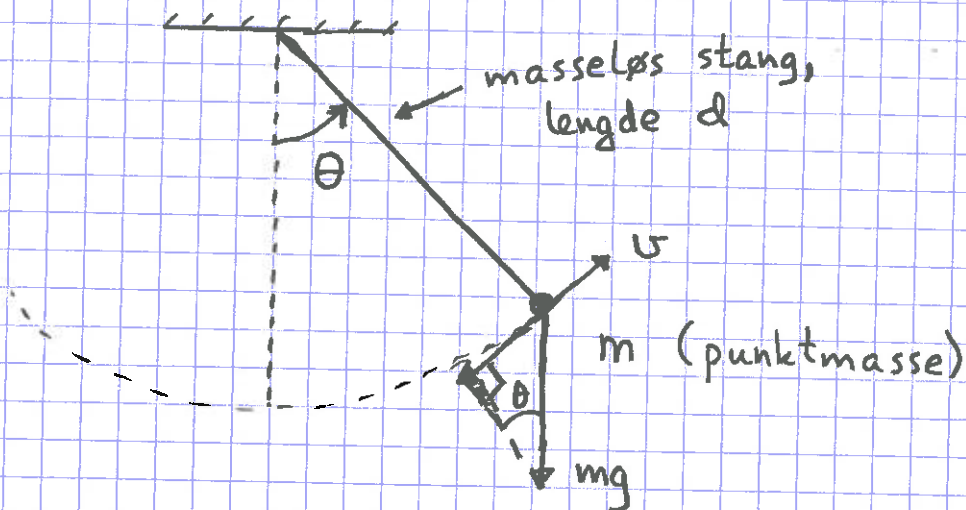
$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

Jo mindre demping, jo større verdi for Q.

(Q for "quality"!) Her: $Q = 10$

Matematisk pendel [YF 14.5; LL 9.6]

(64)



N2 || sirkelbuen:

$$-mg \sin \theta = m a_{\parallel} = m \frac{dv}{dt} = md \frac{d\omega}{dt} = md \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{d} \sin \theta = 0$$

Hvis vi hele tiden har små udsving, $|\theta| \ll 1$,
er $\sin \theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{g/d}$$

$$\Rightarrow \theta(t) = \theta_0 \cos \omega_0 t$$

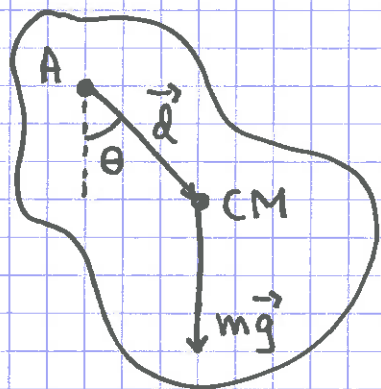
Dus enkel harmonisk oscillator, med
svingeperiode $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{d/g}$

[Øving 7: Numerisk løsning av $\ddot{\theta} + \frac{g}{d} \sin \theta = 0$. Obligatorisk!]

Fysisk pendel

[YF 14.6; LL 9.6]

(65)



Stivt legeme, masse m , svinger om akse gjennom A , treghetsmoment I mhp rot.aksen, $\vec{d} = \vec{R}_{CM}$ med A som ref.punkt

N2 for rotasjon om fast akse gjennom A :

$$\tau = I\dot{\omega} = I\ddot{\theta} \quad \text{med} \quad \tau = -d \cdot mg \cdot \sin\theta$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I} \sin\theta = 0$$

Hvis små utsving: $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

[Sjekk for punktmasse m i CM , masseløs stang med lengde d : $I = m \cdot d^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{g/d}$, som s. 64, OK!]

Steiners sats: $I = I_0 + md^2$; I_0 er tregh.mom mhp akse gjennom CM

$$\Rightarrow T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + md^2}{mgd}}$$

[$\Rightarrow T$ blir stor når $d \rightarrow 0$, som ventet]

BØLGER[YF 15, (11.4) ; LL 10 (7.2)]
16Innledning

Bølge = forplantning av forstyrrelse fra likevekt
(f.eks. en svingning)

Energi (og impuls) forplanter seg med bølgen.

Partikler svinger, men forplanter seg ikke.

Transversale bølger: partikler svinger \perp forplantningsretn.

Longitudinale " : — " — || — " —

Eksempler:

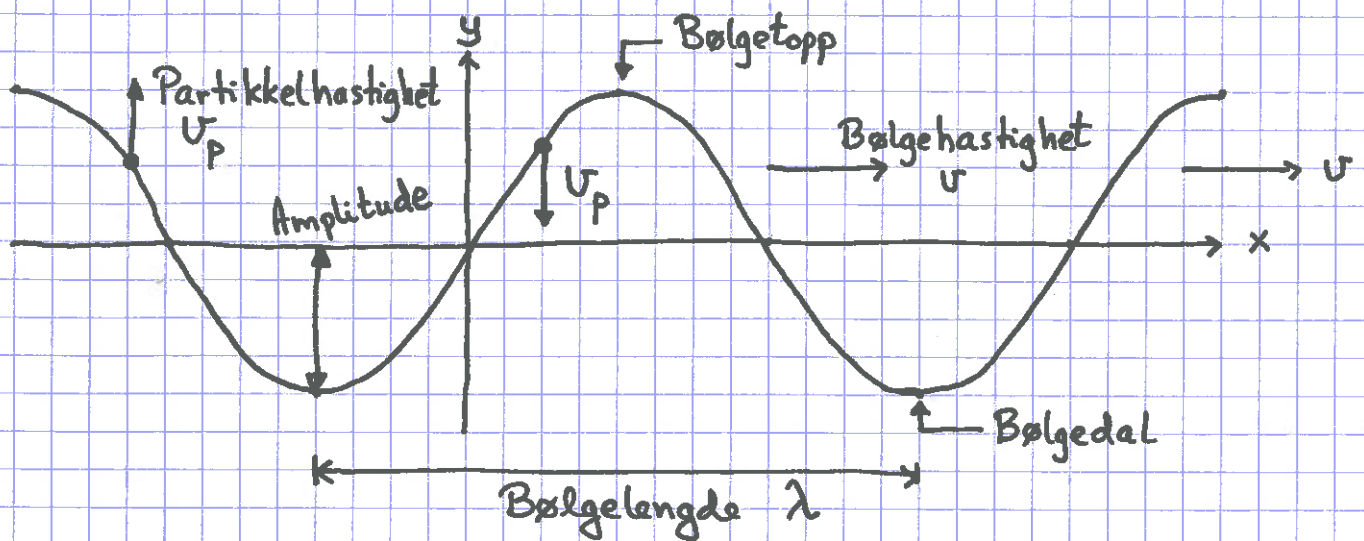
<u>Bølgetype</u>	<u>Hva svinger?</u>	<u>Transv./Longit.?</u>
Bølger på streng	Strenglementer	T
Bølger i fjær	Fjær — " —	T eller L
Lydbølger	Molekyler i mediet (gass, væske, fast stoff)	L

Ikke i TFY4106:

Overflatebølger (på f.eks vann)	Vannet	T og L (kombinert; sirkelbevegelse)
Elektromagnetiske bølger	Elektrisk felt \vec{E} og magnetfelt \vec{B}	T

Harmonisk bølge [YF 15.2, 15.3; LL 10.2] (67)

Ser på transv. bølge på (uendelig lang) streng;
 $y(x, t)$ = utsving fra likevekt ($y=0$) av strengen
i posisjon x ved tid t



T = periode = tid for bølgemønstret å bevege seg
en bølgelengde λ

\Rightarrow Bølgehastighet: $v = \lambda / T$ (Kalles også fasehastighet)

f = frekvens = antall svingninger (for gitt strengeløp)
pr tidsenhet

$$\Rightarrow f = 1/T$$

ω = vinkel frekvens = bølgens faseendring (for gitt
strengeløp) pr tidsenhet

$$\Rightarrow \omega = 2\pi f = 2\pi / T$$

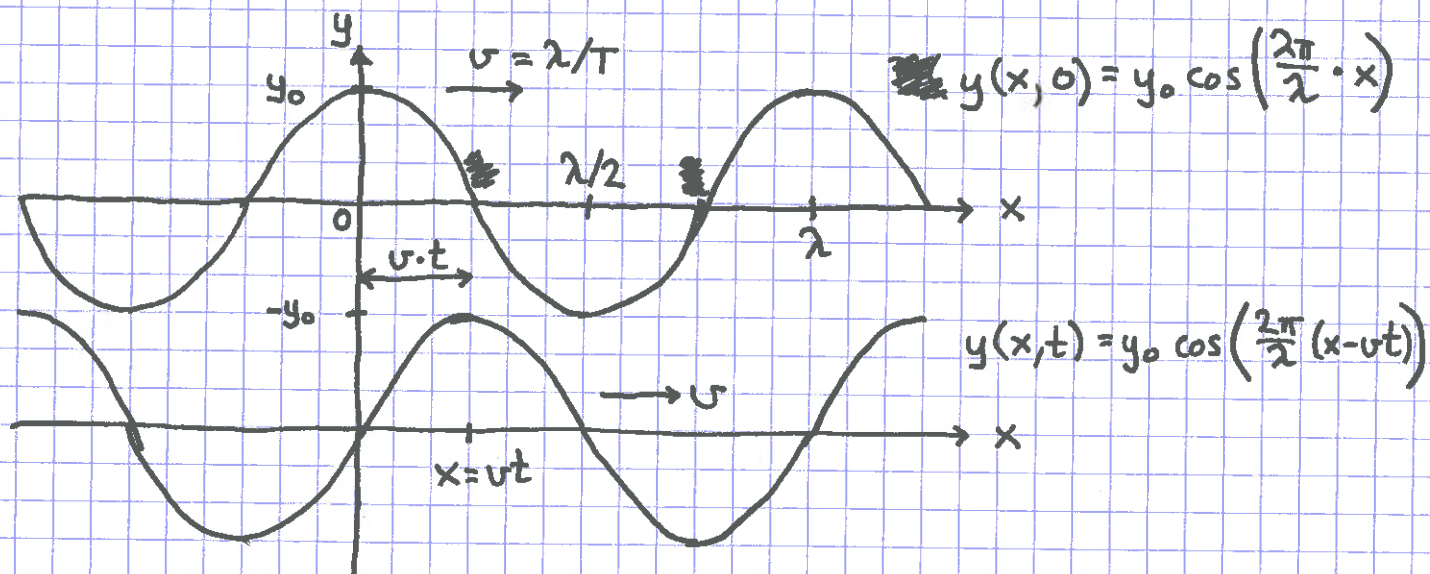
(faseendring 2π pr svingning)

Partikkelhastighet: $v_p = dy/dt$

(68)

[Med longit. bølge er $v_p = dx/dt$]

Matematisk form på $y(x, t)$:



$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v = \omega$$

Innfører bølgetallet: $k \stackrel{\text{def.}}{=} 2\pi/\lambda$ $[k] = \text{m}^{-1}$

$$\Rightarrow \boxed{y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t)}$$

Harm. bølge som forpl. seg i positiv x -retning
med hastighet $v = \lambda/T = \omega/k$

Tilsv. for forpl. i negativ x -retn: $\boxed{y(x,t) = y_0 \cos(kx + \omega t)}$

Mer generelt:

Harm. transv. bølge: $\vec{D}(x,t) = \hat{y} D_0 \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

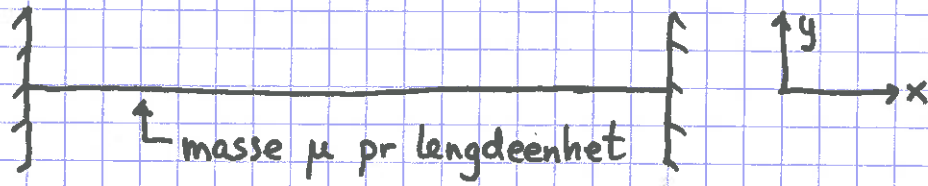
Harm. longit. bølge: $\vec{D}(x,t) = \hat{x} D_0 \cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

Forpl. i $\begin{matrix} \text{neg.} \\ \text{pos.} \end{matrix}$ x -retn. ($\varphi = \text{fasekonst.}$)

Transversal bølge på streng [YF 15.4; LL 10.1]

(69)

Likerekt: Horizontal strukket streng, utsving $y=0$ overalt, strekk-kraft $S \gg$ strengens tyngde (som neglisjeres)

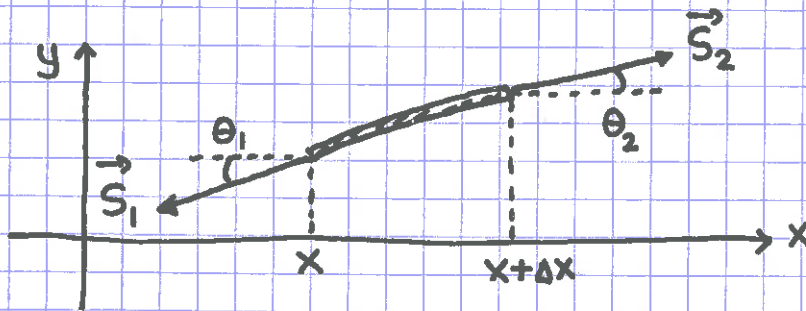


Hvordan forplanter en forstyrrelse fra likerekt seg?

Antar små utsving $y(x, t)$ og ingen horisontal bevegelse

\Rightarrow konstant horisontal strekk-kraft $S_x = S$ overalt

Bruker N2 på lite strengeløment mellom x og $x+\Delta x$, med masse $\Delta m = \mu \cdot \Delta x$:



$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \Delta m \cdot \vec{a}$$

$$\left. \begin{aligned} S_{1x} &= -S_1 \cos \theta_1 = -S \\ S_{2x} &= S_2 \cos \theta_2 = S \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_{1x} + S_{2x} = 0 \quad (\text{OK})$$

$$\left. \begin{aligned} S_{1y} &= -S_1 \sin \theta_1 \\ S_{2y} &= S_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow S_2 \sin \theta_2 - S_1 \sin \theta_1 = \Delta m \cdot \ddot{y}$$
$$S_{1y} + S_{2y} = \Delta m \cdot \ddot{y}$$

Divisjon med hvor $S = S_2 \cos \theta_2$, $S = S_1 \cos \theta_1$ og S gir: (70)

$$\underbrace{\frac{S_2 \sin \theta_2}{S_2 \cos \theta_2}}_{\tan \theta_2} - \underbrace{\frac{S_1 \sin \theta_1}{S_1 \cos \theta_1}}_{\tan \theta_1} = \frac{\Delta m}{S} \cdot \ddot{y} = \frac{\mu}{S} \cdot \Delta x \cdot \ddot{y}$$

Vi ser at $\tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x} =$ strengens helning

$$\Rightarrow \frac{1}{\Delta x} \left\{ \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x \right\} = \frac{\mu}{S} \cdot \ddot{y}$$

Når $\Delta x \rightarrow 0$, er venstre side, pr def, lik $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

Dermed:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

$$\Rightarrow \text{Bølgehast: } v = \sqrt{S/\mu}$$

Bølgelign. for transv. utsving $y(x,t)$ på streng strukket med kraft S , og med masse μ pr lengdeenhet

Lineær, 2.ordens partiell diff. ligning; beskriver også forplantning av lyd (som vi skal se) og lys etc.

Generell løsning: $\boxed{y(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)}$

[Superposisjonsprinsippet!]

[der f og g er to ganger deriverbare funksjoner]

Bevis: Innfør $z = x \pm vt$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}; & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}; & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \dots = \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial z}; & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = -v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial t} = (-v)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}; & & \\ \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} &= \dots = (+v)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} & \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}; & \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \end{aligned}$$

QED

Elastisitet [YF 11.4 ; LL 7.2]

71

Hookes lov ("linear respons"):

09.10.14

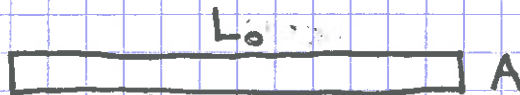
Resulterende deformasjon (dvs relativ lengde- eller volumendring) er proporsjonal med mekanisk spenning (dvs kraft pr flateenhet).

$$\text{Elastisk modul} = \frac{\text{Mek. spenning}}{\text{Relativ deformasjon}}$$

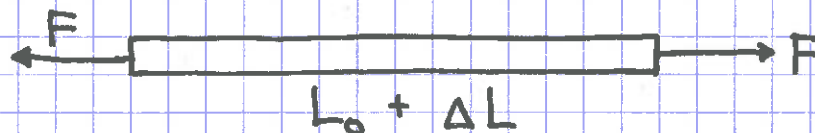
$$\left[\text{Elastic modulus} = \frac{\text{Stress}}{\text{Strain}} \right]$$

Strekking (evt. sammenpressing) av tynn stang:

Likerekt:



Med strekk:



Hookes lov:

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L_0}$$

$$E = \text{elastisitetsmodulen}; [E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \quad (\text{pascal})$$

(evt. som i YF: Youngs modul Y)

Betraktet som ideell fjær:

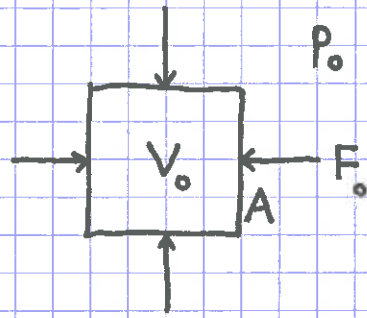
$$F = k \cdot \Delta L, \quad \text{med } k = E \cdot A / L_0$$

Eks: Stål, $E \approx 200 \text{ GPa}$ ($= 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$); Grafen, $E \approx 1050 \text{ GPa}$

Volumkompressibilitet:

(72)

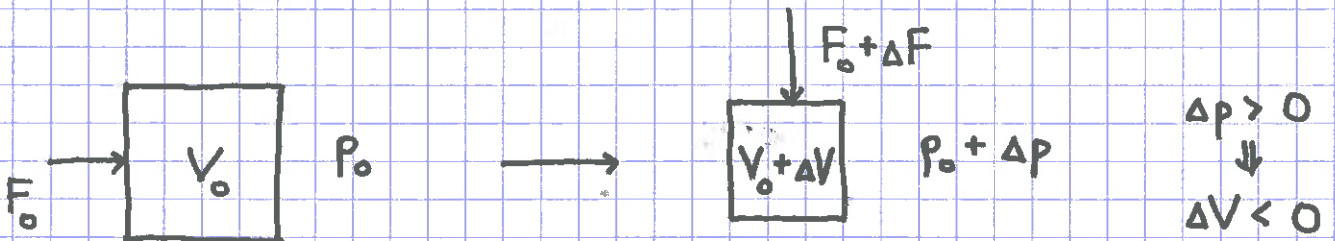
Likerekt:



$$p_0 = F_0 / A = \text{likerektstrykket (isotropt i fluid)}$$

F_0 = nettokraft på arealet A fra omgivelsene

Trykkeøkning \Rightarrow Volumreduksjon:



"Hookes lov":
$$B = - \frac{\Delta F / A}{\Delta V / V_0} = - \frac{\Delta p}{\Delta V / V_0}$$

B = bulkmodulen (B^{-1} = kompressibiliteten)

$$[B] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$$

Eks: Stål, $B \approx 160 \text{ GPa}$

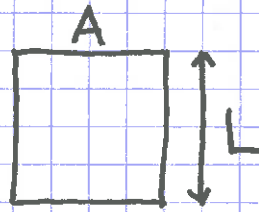
Vann, $B \approx 2 \text{ GPa}$

Luft, $B \approx 0.0001 \text{ GPa}$

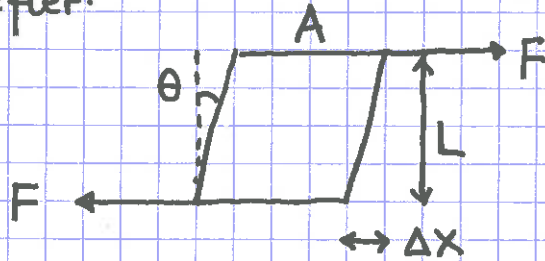
Dvs, $B_{\text{gass}} \ll B_{\text{væske}} < B_{\text{fast stoff}}$

Skjærmodul:

Likerekt:



Med skjærkrefter:



"Hookes lov":

$$G = \frac{F/A}{\Delta x/L} \quad \left(= \frac{F/A}{\tan \theta} \right)$$

$$G = \text{skjærmodulen} ; [G] = \text{Pa}$$

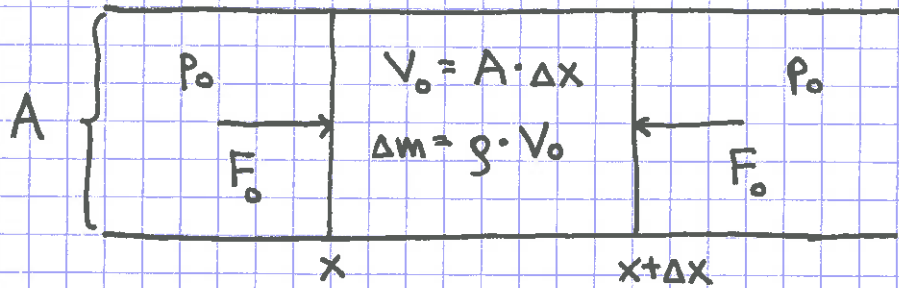
Eks: Stål, $G \approx 79 \text{ GPa}$

Dvs, $E \sim B > G$ (for de fleste faste stoffer)

Longitudinale mekaniske bølger. Lyd

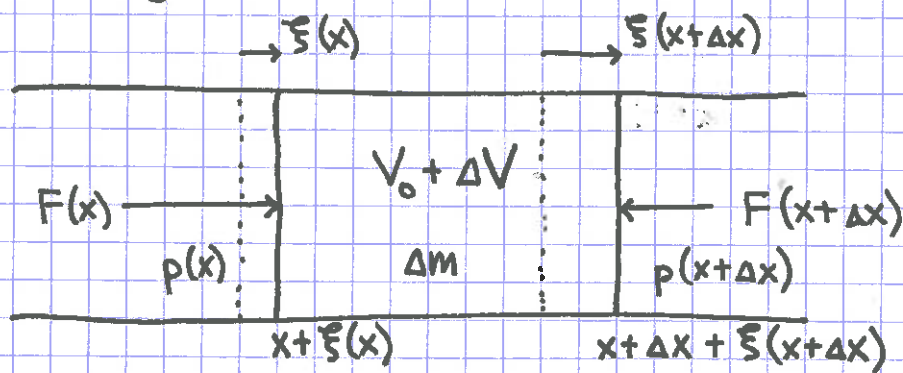
[YF 16.1, 16.2; LL 10.6]

Ser på cylinder med fluid:



Likerekt;
ρ = masse pr
volumenhet

Med forstyrrelse: [Egentlig ξ(x,t); underslår tidsafhængigheden i udtrykkene inntil videre]



$$p(x) = p_0 + \Delta p(x), \quad p(x + \Delta x) = p_0 + \Delta p(x + \Delta x)$$

$$\Delta V = [\xi(x + \Delta x) - \xi(x)] \cdot A = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \Delta x \cdot A$$

$$\Delta p(x) = \frac{F(x) - F_0}{A}, \quad \Delta p(x + \Delta x) = \frac{F(x + \Delta x) - F_0}{A}$$

Fra s. 72: $\Delta p = -B \Delta V / V_0$

$$\Rightarrow \Delta p(x) = -B \cdot (\partial \xi / \partial x)_x \cdot \Delta x \cdot A / \Delta x \cdot A$$

$$= -B \cdot (\partial \xi / \partial x)_x$$

NR for massen Δm :

$$\begin{aligned} \Delta m \cdot \ddot{s} &= F(x) - F(x+\Delta x) \\ &= [\Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x)] \cdot A \\ &= -B \cdot \left[\left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_x - \left(\frac{\partial s}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \right] \cdot A \\ &= B \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \cdot \Delta x \cdot A \end{aligned}$$

$$\Delta m = \rho \cdot A \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow \rho \cdot \ddot{s} = B \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

Dermed:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad \text{med } v = \sqrt{B/\rho}$$

- Eks:
- Luft: $\sqrt{1.42 \cdot 10^5 \text{ Pa} / 1.29 \text{ kg/m}^3} = 332 \text{ m/s}$
 - Vann: $\sqrt{2.2 \cdot 10^9 \text{ Pa} / 1000 \text{ kg/m}^3} = 1483 \text{ m/s}$
 - Stål: $\sqrt{2.65 \cdot 10^{11} \text{ Pa} / 7800 \text{ kg/m}^3} = 5832 \text{ m/s}$ [$v = \sqrt{(B + \frac{4}{3}G)/\rho}$]

Hvis tynn stang (fast stoff): E erstatter B

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad \text{med } v = \sqrt{E/\rho}$$

Seismiske bølger:

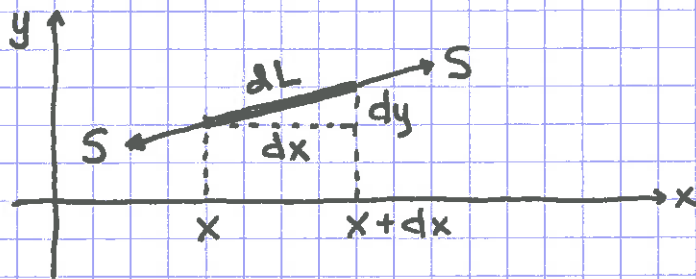
Både transv. og longit. bølger, såkalte S-bølger ("sekundære") og P-bølger ("primære").

$$v_s = \sqrt{G/\rho}, \quad v_p = \sqrt{(B + 4G/3)/\rho} > v_s$$

\Rightarrow P-bølgene ankommer først ved jordskjelv

Energi transportert med bølge [YF 15.5; LL 10.5] (76)

Ser på transv. bølge på streng:



Strengeløst med lengde dL , masse $dm = \mu dx$, strekk-kraft S .

$$\text{Kin. energi: } dK = \frac{1}{2} dm \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu dx \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

$$\text{Pot. energi: } dU = S \cdot \underbrace{(dL - dx)}_{\text{forlengelsen av strengeløstet}}$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \left(1 + (dy/dx)^2 \right)^{1/2}$$

$$\approx dx \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (\text{sidan } dy \ll dx; \text{ små utsving})$$

$$\Rightarrow dU = \frac{1}{2} S dx \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

\Rightarrow Mek. energi pr lengdeenhet:

$$\varepsilon = dE/dx = dK/dx + dU/dx$$

$$= \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} S \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

$$\text{Sidan } y(x, t) = y(x \pm vt) \text{ er } \frac{\partial y}{\partial t} = \pm v \frac{\partial y}{\partial x};$$

dessuten er $S = \mu v^2$. Dermed:

$$\varepsilon = \mu v^2 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \pm \mu v \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x}$$

Enhet: J/m

$$y(x,t) = y(x \pm vt) \Rightarrow \epsilon(x,t) = \epsilon(x \pm vt)$$

13.10.14

Dvs: energitetheten ϵ oppfyller bølgeligningen,

$$\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2},$$

som betyr at energien forplanter seg med hastighet v (her: $v = \sqrt{S/\mu}$) i bølgens forplantningsretning.

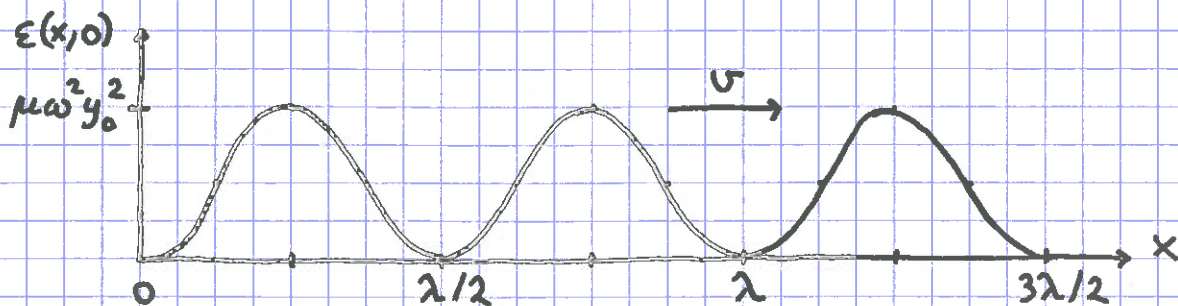
Eks: Harmonisk bølge

$$y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t) \quad (k = 2\pi/\lambda, \omega = 2\pi/T, v = \frac{\omega}{k})$$

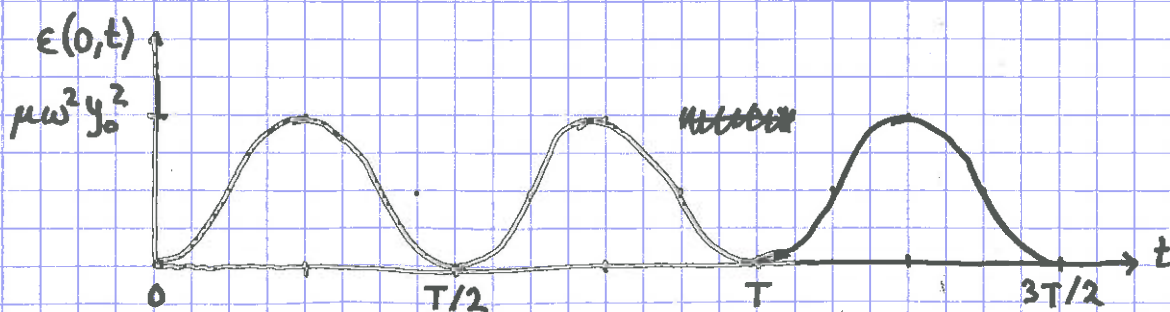
$$\partial y / \partial x = -ky_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \epsilon(x,t) &= \mu v^2 k^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t) \\ &= \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t) \end{aligned}$$

Øyeblikksbilde ($t=0$): $\epsilon(x,0) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 kx$



Fast posisjon ($x=0$): $\epsilon(0,t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 \omega t$



Med plan longitudinal bølge, dvs lydbølge:

1D \rightarrow 3D, $\mu \rightarrow \rho =$ masse pr volumenhet,

$\epsilon = dE/dx \rightarrow dE/dV =$ energi pr volumenhet

$y \rightarrow \xi =$ molekylernes (midlere) utsving fra likevekt

$$\Rightarrow \epsilon(x,t) = \rho v^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \rho \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \pm \rho v \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

Enhet: J/m³

Midlere energitetthet i harmonisk bølge:

Ser fra figuren for $\epsilon(x,0)$ på s. 77 at

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \quad (\text{romlig middelverdi})$$

og fra fig. for $\epsilon(0,t)$ at

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \quad (\text{tidsmiddel})$$

Formelt:

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^\lambda \epsilon(x,t) dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \epsilon(x,t) dx$$

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\int_0^T \epsilon(x,t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon(x,t) dt$$

Siden $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, og middelveiden av $\sin^2 \varphi$ og $\cos^2 \varphi$ må være like store, følger det at

$$\langle \sin^2 \varphi \rangle = \langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2},$$

$$\text{ert } \overline{\sin^2 \varphi} = \overline{\cos^2 \varphi} = \frac{1}{2},$$

dos, enten vi midler over en periode T for gitt posisjon eller vi midler over en bølgelengde λ for gitt tidspunkt.

Tilsvarende for plan harmonisk lydølge:

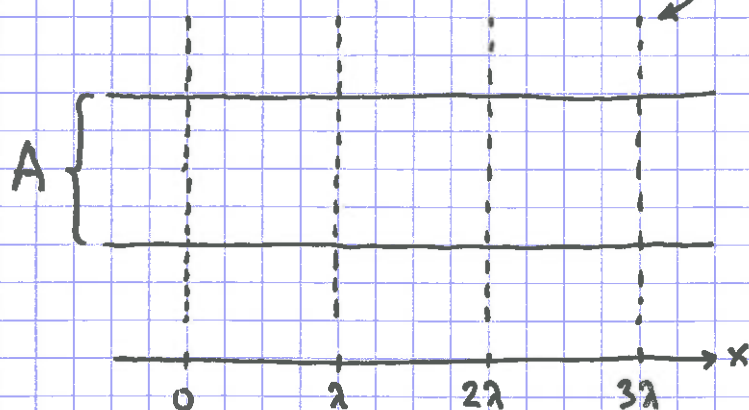
$$\bar{\epsilon} = \langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

Bølgens intensitet I [YF 16.3 ; LL 10.5]

I = overført energi pr tidsenhet og pr flateenhet
= overført effekt pr flateenhet

$$\text{Enhet: } [I] = \text{W/m}^2$$

Plan harmonisk lydølge: Bølgetopper (f.eks)



Energi mellom $x=0$ og $x=\lambda$:

$$\bar{\epsilon} \cdot A \cdot \lambda$$

Passerer $x=\lambda$ i løpet av tiden T . Dermed:

$$I = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{\bar{\epsilon} A \lambda / T}{A} = \bar{\epsilon} \cdot v$$

$$(v = \lambda / T)$$

Desibel (dB)

Såriddt hørbar lyd: $I = I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ (Standard referanse)

Smertegrense: $I = 1 \text{ W/m}^2$

Stort spenn \Rightarrow Hensiktsmessig med logaritmisk skala:

$$\# \text{ dB} \stackrel{\text{def}}{=} 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (= \text{lydtrykksnivået})$$

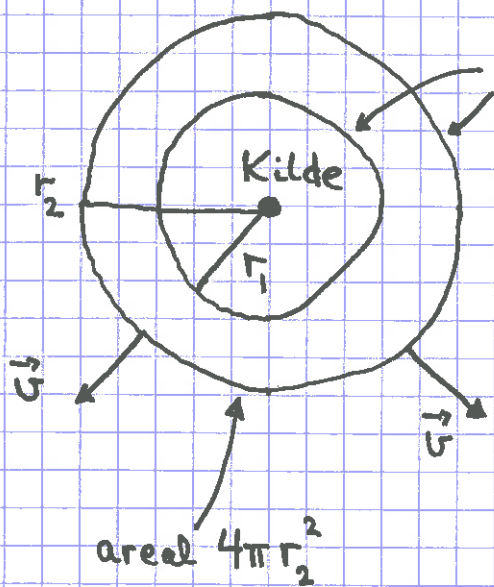
Høregrensen: $10 \log (10^{-12}/10^{-12}) = 10 \log 1 = \underline{0 \text{ dB}}$

Normal samtale: $10 \log (10^{-6}/10^{-12}) = 10 \log 10^6 = \underline{60 \text{ dB}}$

Smertegrensen: $10 \log (1/10^{-12}) = 10 \log 10^{12} = \underline{120 \text{ dB}}$

Kulebølger

Kuleformet bølgekilde \Rightarrow Forplantning av bølge med lik intensitet i alle retninger:



Kuleformede bølgefronter, dvs flater med konstant fase, forplanter seg radielt utover.

Pga energibevarelse må like mye energi, og dermed like mye effekt passere en vilkårlig valgt kuleflate.

Dermed: $\langle P_1 \rangle = \langle P_2 \rangle$

(81)

$$\Rightarrow 4\pi r_1^2 \cdot I_1 = 4\pi r_2^2 \cdot I_2$$

$$\Rightarrow I_2 / I_1 = r_1^2 / r_2^2$$

$$\Rightarrow I(r) \sim 1/r^2 \quad \text{for } \underline{\text{kulebølger}}$$

Eks: Kuleformet (evt. halvkuleformet) høytaler
læger lyd med intensitet (lydtrykksnivå)

100 dB i afstand 1 m. Hva er intensiteten

10 m fra høytaleren?

Løsn:

$$100 \text{ (dB)} = 10 \log(I(1)/I_0) \Rightarrow \frac{I(1)}{I_0} = 10^{10}$$

$$\Rightarrow I(10) = I(1) \cdot (1/10)^2 = I(1)/100 = I_0 \cdot 10^8$$

$$\Rightarrow 10 \log 10^8 = \underline{\underline{80 \text{ dB}}} \quad \text{i afstand 10 m fra høytaleren}$$

Lang sylinderformet bølgekilde \Rightarrow Sylinderformede
bølgefronter med areal prop. med avstanden r
fra kilden $\Rightarrow I(r) \sim 1/r$ for sylinderbølger

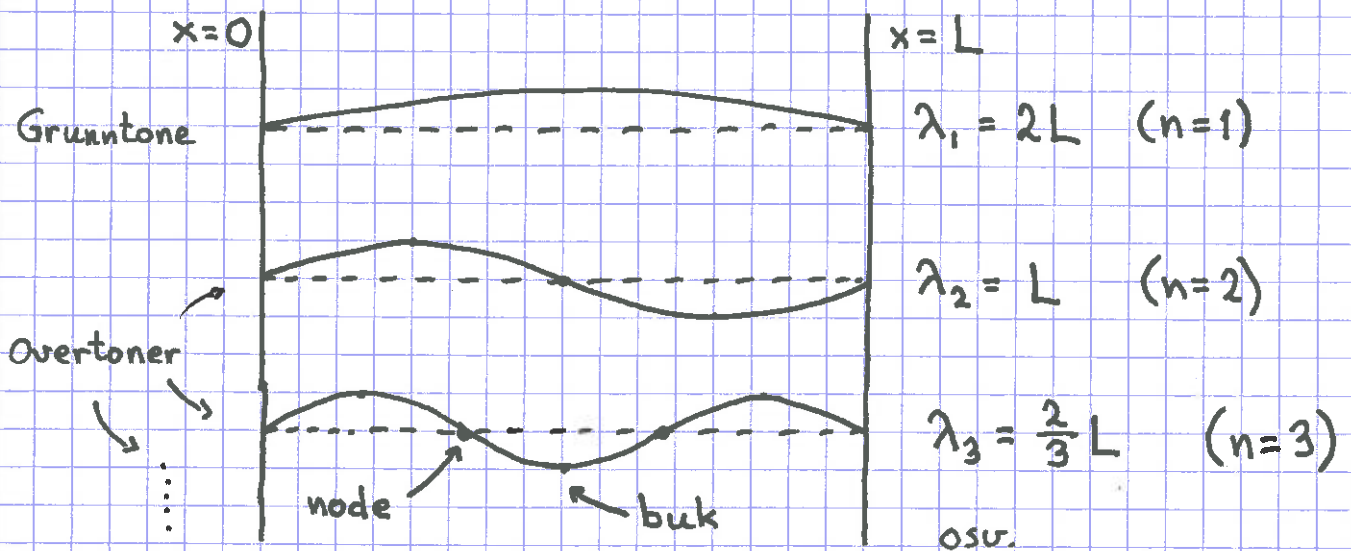
Stor plan bølgekilde \Rightarrow Plane bølgefronter med
areal uavhengig av avstanden fra kilden

$$\Rightarrow I = \text{konst. (uavh. av } r) \quad \text{for } \underline{\text{plane bølger.}}$$

Stående bølger [YF 15.7, 15.8, 16.4; LL 10.3] (82)

16.10.14

Vi innser at en ren harmonisk bølge på en streng med lengde L , fastspent i begge ender, må ha bølgelengde λ slik at $L = n \cdot \lambda / 2$:



For gitt $\lambda = 2\pi/k$ og $T = 2\pi/\omega$ er generell løsning av bølgligningen: $y(x,t) = y_1 \sin(kx - \omega t) + y_2 \sin(kx + \omega t)$.
 $y(0,t) = 0 \Rightarrow -y_1 \sin \omega t + y_2 \sin \omega t = 0 \Rightarrow y_2 = y_1 = y_0$.

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\Rightarrow y(x,t) = y_0 \left[\sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t \right]$$
$$= 2y_0 \sin kx \cos \omega t$$

Dette er en svingning med posisjonsavhengig amplitude $2y_0 \sin kx$. Vi kaller det gjerne en stående bølge.

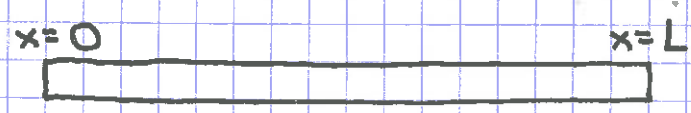
Siden $y(L,t) = 0$, må vi ha $\sin kL = 0$, dvs $k \cdot L = n \cdot \pi$, som gir mulige bølgelengder $\lambda_n = 2L/n$ ($n=1,2,3,\dots$).

Bølgehastigheten er $v = \sqrt{S/\mu}$, med S = strekk-kraft og μ = masse pr lengdeenhet. Mulige frekvenser for stående

bølger på streng med lengde L og fast i begge ender er da:

$$f_n = v/\lambda_n = \sqrt{S/\mu} \cdot n/2L \quad (n=1,2,3,\dots)$$

Helt tilsvarende med et rør med lengde L , lukket i begge ender, og (f.eks.) fylt med luft:



Luftmolekylene kan ikke ha utsving fra likevekt der det står en vegg $\Rightarrow \xi(0,t) = \xi(L,t) = 0$.

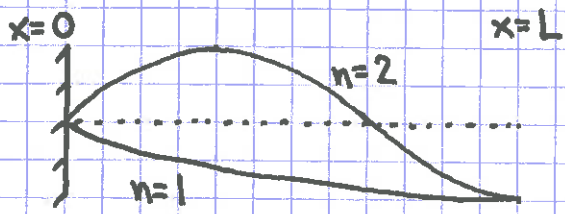
En ren harmonisk bølge må også her bli en stående bølge, $\xi(x,t) = 2\xi_0 \sin kx \cos \omega t$, med tillatte bølgelengder $\lambda_n = 2L/n$, og dermed frekvenser

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{\sqrt{B/\rho} \cdot n}{2L} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

B = mediets bulkmodul, ρ = mediets massetetthet

Streng med fri ende; rør med åpen ende:

Buk (max amplitude) i stedet for node (null amplitude) i den frie/åpne enden. Dermed, med en fri/åpen ende:



$$\lambda_1 = 4L, \lambda_2 = 4L/3, \lambda_3 = 4L/5 \dots$$
$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{2n-1} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

To åpne/frie ender gir $\lambda_n = 2L/n$, som med to faste/lukkede.

Trykkbølgen (s. 74): $\Delta p(x,t) = -B \partial \xi / \partial x = -2kB\xi_0 \cos kx \cos \omega t$
(med to lukkede ender)

\Rightarrow Max amplitude for Δp der utsvinget ξ har node, og omvendt.

Eks: C-streng på cello. Hva må strekk-kraften S være for å gi en grunntone på 65.4 Hz, med lengde 695 mm og materiale slik at $\mu = 18.2 \text{ g/m}^2$ (84)

Løsn: $f_1 = v/\lambda_1 = \sqrt{S/\mu} / 2L$ Overtoner $f_2, f_3, \dots = ?$

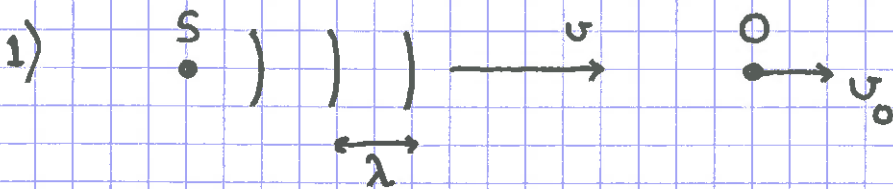
$$\Rightarrow S = 4L^2 f_1^2 \mu = 4 \cdot 0.695^2 \cdot 65.4^2 \cdot 18.2 \cdot 10^{-3} \underbrace{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-1}}_{= \text{N}} = \underline{\underline{150.4 \text{ N}}}$$

Overtoner: $f_n = n \cdot f_1 \Rightarrow f_2 = 130.8 \text{ Hz}, f_3 = 196.2 \text{ Hz}, \dots$

Dopplereffekten [YF 16.8; LL 10.8]

[Her: For lydbølger. Har også Dopplereffekt for E.M. bølger]

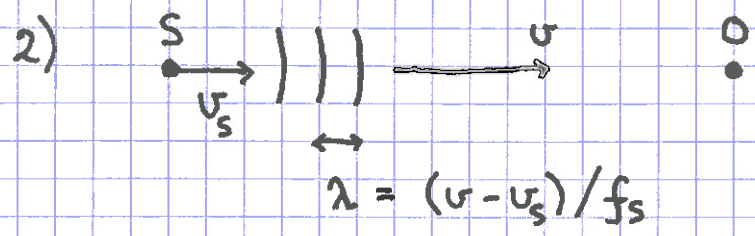
Hvis lydkilden S ("source") og observatøren O er i relativ bevegelse, vil O måle en frekvens f_o som er forskjellig fra frekvensen f_s sendt ut av S .



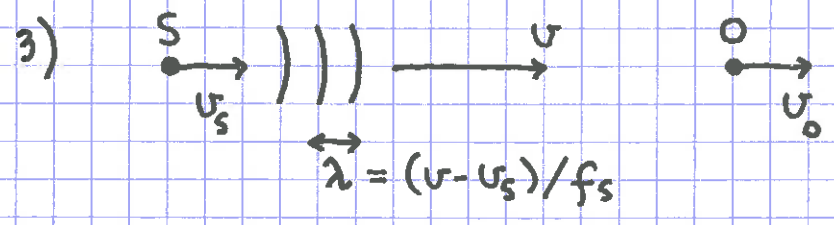
Bølgehastighet relativt O : $v - v_o$

$$\Rightarrow \text{Frekvens målt av } O: f_o = \frac{v - v_o}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v} \cdot f_s$$

Dvs: $f_o < f_s$ når $v_o > 0$ (og omvendt)



⇒ Frekvens målt av O: $f_o = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v - v_s} \cdot f_s$

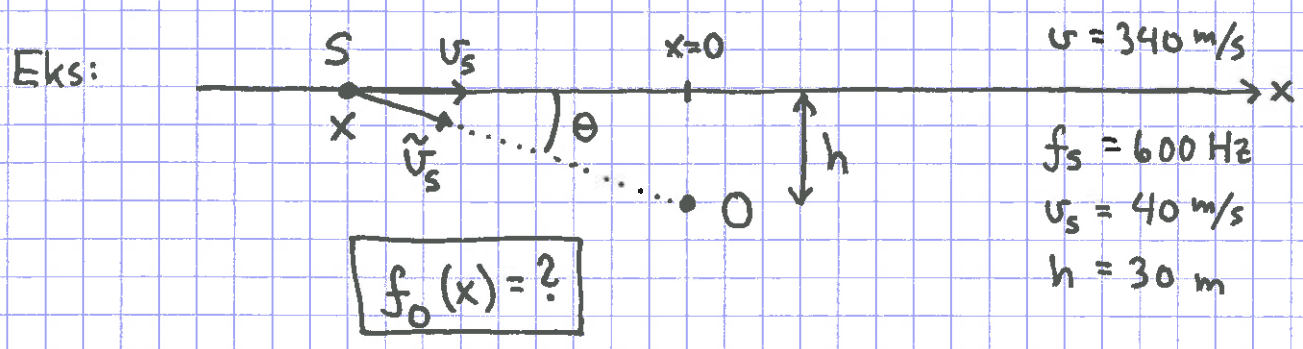


⇒ $f_o = \frac{v - v_o}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v - v_s} \cdot f_s$

4) Vind; v_m = mediets (luftas) hastighet

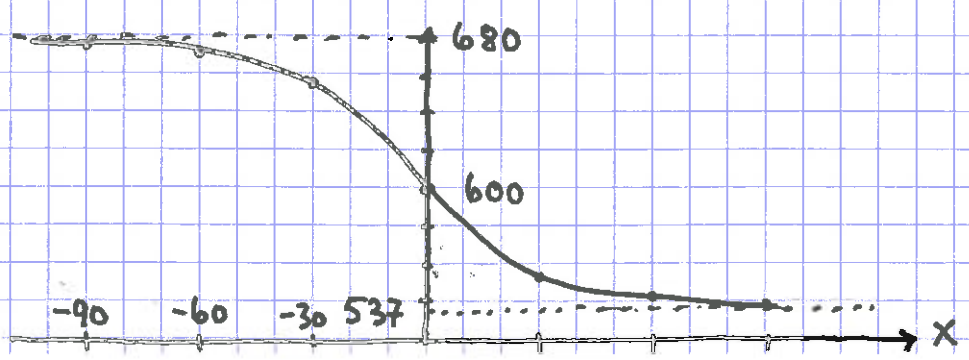
Bølgehastighet relativt bakken: $v + v_m$

⇒ $f_o = \frac{v + v_m - v_o}{v + v_m - v_s} \cdot f_s$



Løsn: $f_o = \frac{v}{v - \tilde{v}_s} \cdot f_s$; $\tilde{v}_s = v_s \cos \theta = -v_s \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}$

⇒ $f_o(x) = f_s \cdot \left\{ 1 + \frac{v_s x}{v \sqrt{x^2 + h^2}} \right\}^{-1} = 600 \text{ Hz} \cdot \left\{ 1 + \frac{40 \cdot x}{340 \cdot \sqrt{x^2 + 900}} \right\}^{-1}$



Svevning [YF 16.7; LL 10.7]

$$\begin{array}{l}
 S_1 \cdot \left. \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 + \lambda_1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \xi_1(x,t) = \xi_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) \\ \xi_2(x,t) = \xi_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t) \end{array} \right\} \rightarrow v \\
 S_2 \cdot \left. \begin{array}{l} \lambda_2 + \lambda_1 \\ \lambda_2 + \lambda_1 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \xi_1(x,t) = \xi_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) \\ \xi_2(x,t) = \xi_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t) \end{array} \right\} \rightarrow v
 \end{array}$$

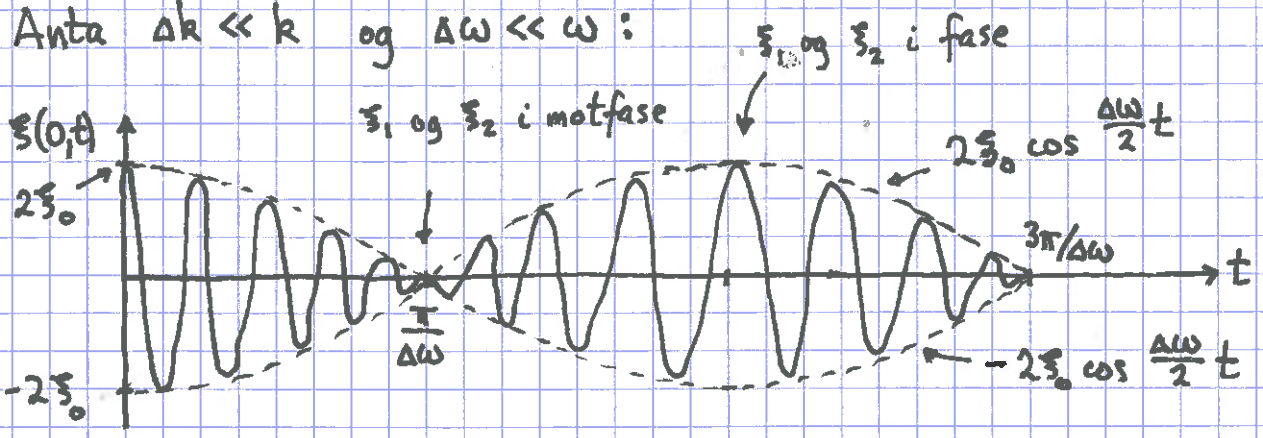
$\xi(x,t) = ?$
 $x = x_0 = 0$

Lydbølge målt (hørt; observeret) av O:

$$\begin{aligned}
 \xi(x,t) &= \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) & [\cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}] \\
 &= 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \cdot \cos(kx - \omega t)
 \end{aligned}$$

der $\Delta k = k_1 - k_2$, $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$, $k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$, $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$

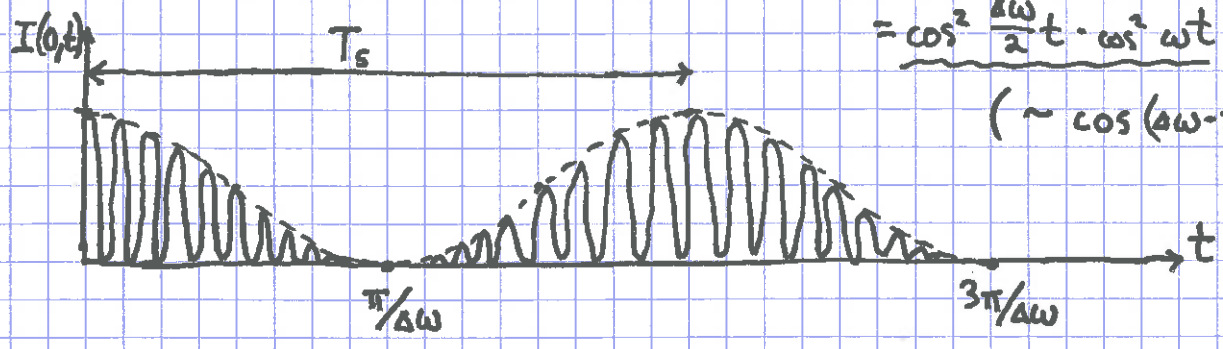
Anta $\Delta k \ll k$ og $\Delta \omega \ll \omega$:



Intensiteten: $I(0,t) \sim |\xi(0,t)|^2 \sim \left\{ \cos^2\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \cdot \cos^2(kx - \omega t) \right\}_{x=0}$

$$= \cos^2 \frac{\Delta \omega}{2} t \cdot \cos^2 \omega t$$

$(\sim \cos(\Delta \omega t) + 1)$



⇒ Hører tonen (frekvensen) $f = \omega/2\pi = (f_1 + f_2)/2$, med "modulert" intensitet, svevning, med svevefrekvens $f_s = 1/T_s = \Delta \omega/2\pi$. Anvendelse: Instrumentstemning.

Interferens [YF 15.6, 16.6; LL 10.7]

(87)

" flere bølger på samme sted til samme tid "

$$S_1 \cdot \left. \begin{array}{l} \left. \right) \lambda \right) \longrightarrow v \\ y_1(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_1) \end{array} \right\}$$

$$S_2 \cdot \left. \begin{array}{l} \left. \right) \lambda \right) \longrightarrow v \\ y_2(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t + \varphi_2) \end{array} \right\}$$

$\longleftrightarrow \Delta\varphi$

$y = ?$

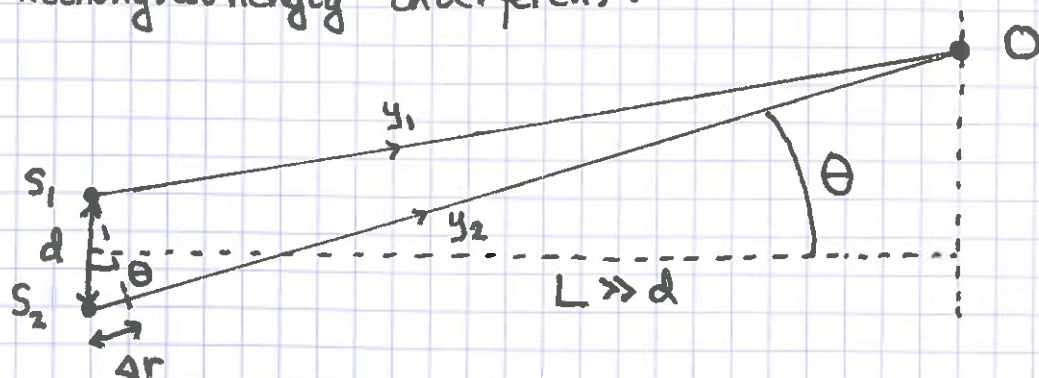
Bølge observert ved O: [Øving 8, oppg 2]

$$y(x,t) = 2y_0 \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(kx - \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

\Rightarrow Konstruktiv interferens, max amplitude $2y_0$, når $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, dvs når y_1 og y_2 er i fase

Destruktiv interferens, min amplitude 0, når $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, dvs når y_1 og y_2 er i motfase

Retningsavhengig interferens:



Anta $L \gg d$, og S_1 og S_2 to bølgekilder i fase.

Veilengdeforskjell: $\Delta r \approx d \cdot \sin\theta$

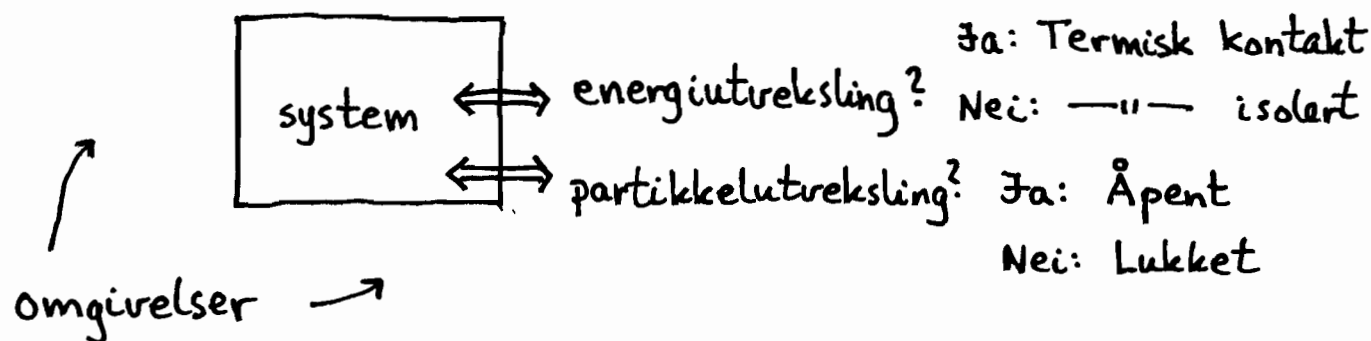
\Rightarrow max I ved O når $d \sin\theta = n \cdot \lambda$

min I ved O når $d \sin\theta = (n + 1/2) \cdot \lambda$

$n = 0, 1, 2, \dots$

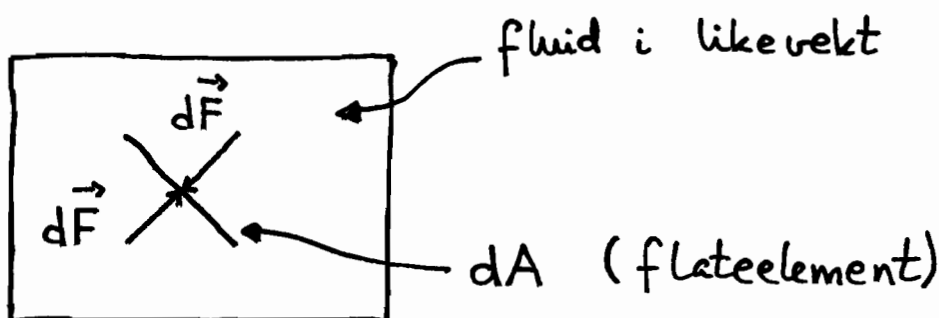
Innledning

System og omgivelser

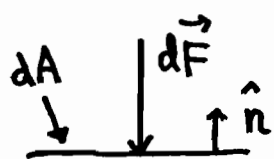


Eks: Kaffekopp : Termisk kontakt. Åpen
Termos m/lokk: —||— isolert. Lukket

Trykk [YF 11.4, 12.2-12.3; LL 7.2, 8.1-8.4]



$p = dF/dA =$ trykket i fluidet, en skalar og isotrop størrelse (uavhengig av flatens orientering)



$$d\vec{F} = -p d\vec{A} = -p dA \hat{n}$$

$$\text{SI: } [p] = \text{N/m}^2 = \text{Pa}$$

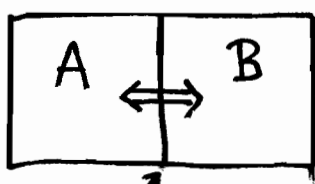
(89)

$$1 \text{ atm} = 1.01325 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1.01325 \text{ bar}$$

$$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ psi} = (0.454 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2) / (25.4 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \approx 6.9 \text{ kPa}$$

Temperatur og termisk likevekt [YF 17.1; LHL 13.1]



Lukket,
men termisk kontakt

Hvis netto energistrøm mellom A og B er lik null:

- A og B er i termisk likevekt
- A og B har lik temperatur: $T_A = T_B$

T måles med termometer.

Endring i T \Rightarrow Endring i

- væskevolum
- gasstrykk
- lengde av fast stoff
- elektrisk motstand osv.

Kalibrering (Celsius m. flere):

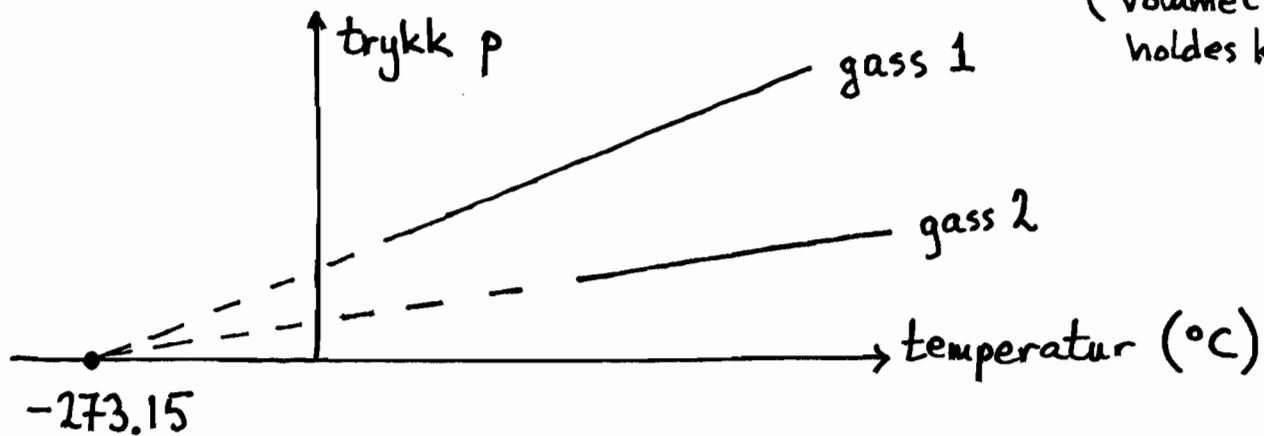
0 °C når H₂O fryser ved p = 1 atm

100 °C — " — koker — " —

Absolutt temperatur :

Måling av trykk og temperatur for ulike fortynnede gasser :

(Volumet V holdes konstant.)



Dvs: Trykket er prop. med temp. for alle gassene.
Ekstrapolering til $p = 0$ gir $-273.15\text{ }^\circ\text{C}$ for alle.

⇒ Vi innfører absolutt temperatur T , slik at

$T = 0\text{ K}$ (kelvin) tilsvarer $-273.15\text{ }^\circ\text{C}$;

"det absolutte nullpunkt". Dessuten slik at endring på $1\text{ }^\circ\text{C}$ = endring på 1 K .

⇒ H_2O fryser ved $T = 273.15\text{ K}$, koker ved $T = 373.15\text{ K}$.

Standard referanse (siden 1954) :

Trippelpunktet for H_2O , dvs der is, vann og vanndamp er i termisk likevekt, har

(damp-)trykk $p_t = 612\text{ Pa} = 0.063\text{ atm}$

temp. $T_t = 273.16\text{ K}$ ($0.01\text{ }^\circ\text{C}$)

Tilstandsligning for ideell gass [YF 18.1; ~~LHL~~ 13.3]

Ekspenimenter med gasser med lav tetthet gir:

$pV = nRT$ Ideell gass tilstandsligning

[Utledes senere med mikroskopisk teori: Kinetisk gassteori]

Knytter tilstandsvariablene trykk p , volum V og temperatur T sammen med ligningen $f(p, V, T) = 0$.

[Ideell gass: $f(p, V, T) = pV - nRT = 0$]

n = antall mol ; 1 mol = $6.022 \cdot 10^{23}$ partikler/molekyler

$R = 8.314 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$ = gasskonstanten ("åttekomma pi"!!)

Alternativt:

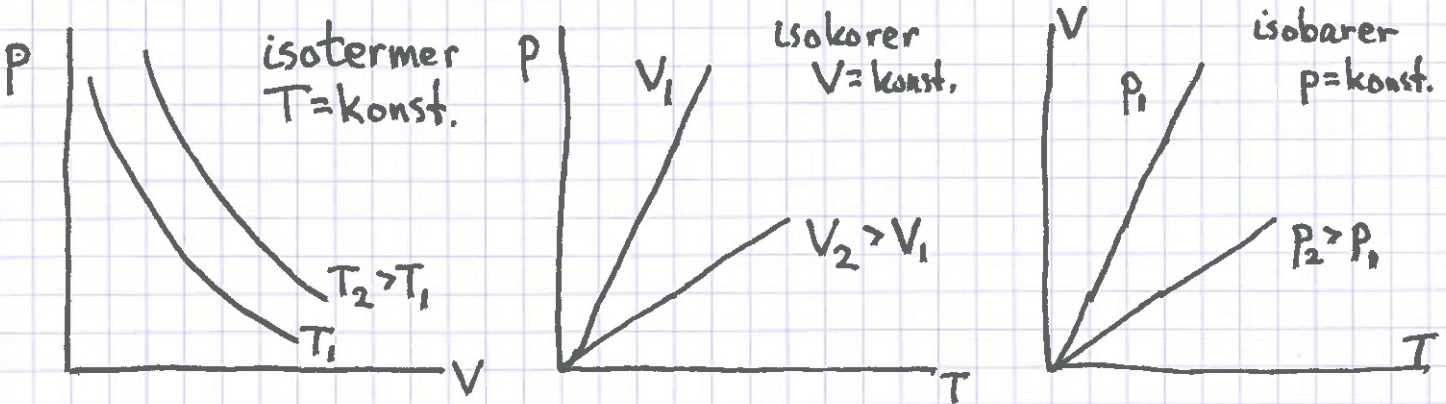
$N = n \cdot N_A$ = antall molekyler ; $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ = Avogadros tall

$k_B = R/N_A = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ = Boltzmanns konstant

$\Rightarrow n \cdot R = \frac{N}{N_A} \cdot k_B N_A = N k_B$

$\Rightarrow \boxed{pV = N k_B T}$ $\Rightarrow p(V, T) = \frac{N k_B T}{V}$; $V(p, T) = \frac{N k_B T}{p}$; $T(p, V) = \frac{pV}{N k_B}$

Grafisk, med $n = \text{konstant}$:



Termodynamiske koeffisienter [YF 17.4; LHL 13.2]

92

Volumutvidelseskoeffisient:

$$\beta = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta V/V}{\Delta T} \right\}_{p=\text{konst}} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Eks 1: $\beta(\text{glass}) = 2.7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \ll \beta(\text{etanol}) \approx 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

\Rightarrow spritsøylen i termometeret stiger når T øker

Eks 2: $\beta(\text{H}_2\text{O}) < 0$ mellom 0°C og 4°C

\Rightarrow massetettheten større ved 4°C enn ved 0°C

\Rightarrow innsjøer fryser ikke til bunns \Rightarrow fisken overlever

[Krystallstrukturen i is er "åpen" \Rightarrow Lav tetthet

\Rightarrow Is lettere enn vann. Bindingsstrukturen delvis intakt opp til 4°C \Rightarrow Vann tyngst ved 4°C]

Lineær utvidelseskoeffisient: [Kun faste stoffer]

$$\alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_p \quad [\alpha = \frac{1}{3}\beta, \text{ da } V=L^3, \text{ dvs } L=V^{1/3}]$$

Trykk-koeffisient:

$$\gamma = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

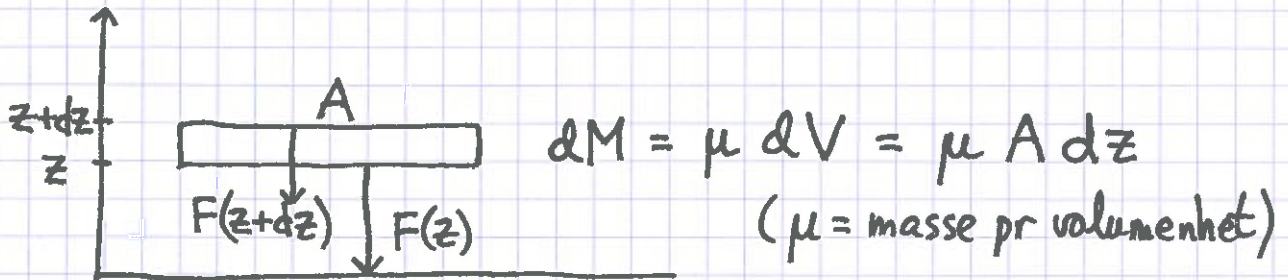
Kompressibilitet:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = B^{-1} \quad [B = \text{bulkmodul; s. 72}]$$

Eks: $\kappa(\text{H}_2\text{O}) = (2.2 \cdot 10^9 \text{ Pa})^{-1} = 4.5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1} = 4.6 \cdot 10^{-5} \text{ atm}^{-1}$

Eks: Anta g og T konstante, og midlere molekylvekt $\langle m \rangle$. Hvordan avtar trykket p oppover i atmosfæren? Anta ideell gass.

Løsn:



$$dF = F(z+dz) - F(z) = \cancel{dM \cdot g} - dM \cdot g = -\mu g A dz$$

[Tyngden av dM tilsvarer økningen i F fra $z+dz$ til z]

$$dp = p(z+dz) - p(z) = dF/A = -\mu g dz$$

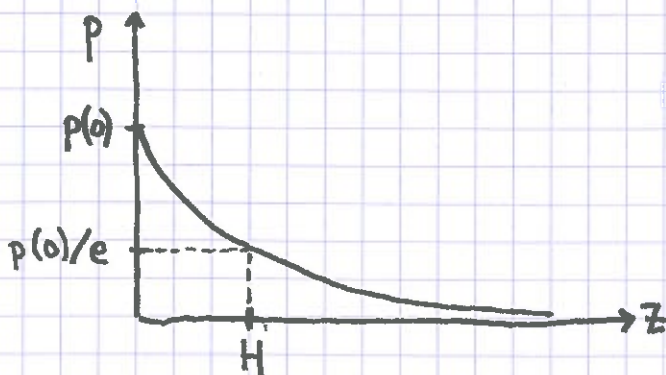
$$\mu = \langle m \rangle \cdot N/V ; \quad pV = Nk_B T \Rightarrow N/V = p/k_B T$$

$$\Rightarrow dp = -\langle m \rangle \cdot \frac{p}{k_B T} \cdot g \cdot dz$$

$$\Rightarrow \int_{p(0)}^{p(z)} \frac{dp}{p} = \int_0^z \left(-\frac{\langle m \rangle g}{k_B T} \right) dz$$

$$\Rightarrow \ln \frac{p(z)}{p(0)} = -z/H ; \quad H = \frac{k_B T}{\langle m \rangle g}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{p(z) = p(0) \exp(-z/H)}}$$



$$\langle m \rangle \approx 29 \text{ g/mol} \approx 4.8 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

(pr molekyl)

$$T \approx 260 \text{ K}$$

$$\Rightarrow H \approx 7.6 \text{ km}$$

Varme. Varmekapasitet [YF 17.5 ; LHL ^{13.2} ~~13.1~~] (94)

Varme = Energi som overføres (transporteres)
pga temperaturforskjeller

Andre former for energioverføring er arbeid.

Varmekapasitet = $\frac{\text{Tilført varme}}{\text{Temperaturoendring}}$

$$C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$$

$\Rightarrow \Delta Q = C \cdot \Delta T$, dvs mye varme ΔQ må tilføres et system med stor varmekapasitet C for å oppnå en viss temperaturøkning ΔT

Måler C ved å måle sammenhengende ΔQ og ΔT , typisk med p eller V holdt konstant:

$$C_p = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_p ; C_v = \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T}\right)_v$$

Enhet: $[C] = \text{J/K}$

For tabulering, hensiktsmessig med spesifikk varmekap.:

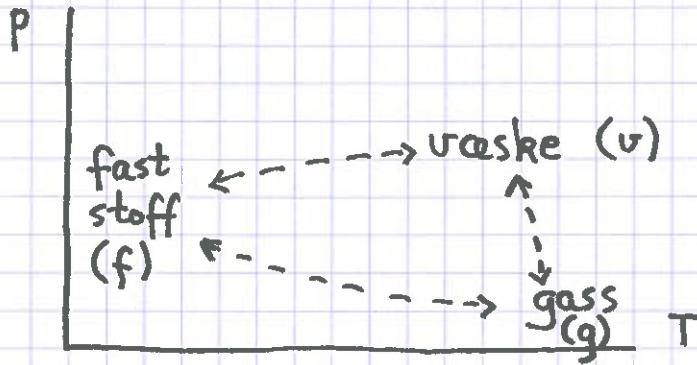
$c = C/M = \text{varmekap. pr masseenhet}$ $[c] = \text{J/kg}\cdot\text{K}$

$c_m = C/n = \text{---} \text{---} \text{---} \text{mol} = \text{molar varmekap.}$

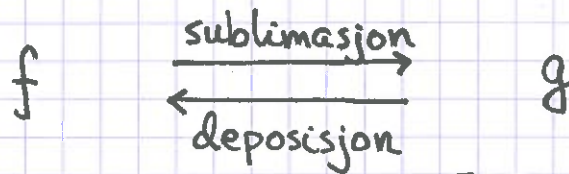
$$[c_m] = \text{J/mol}\cdot\text{K}$$

Faseoverganger. Latent varme. [YF ^{18.67}17.6; LHL ^(17.10)13.2]

Kvalitativt, for ulike trykk og temperaturer:

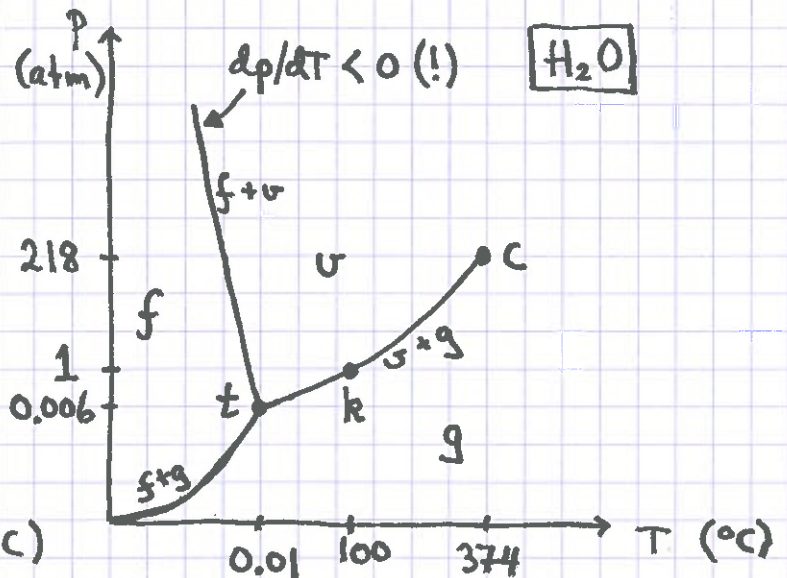
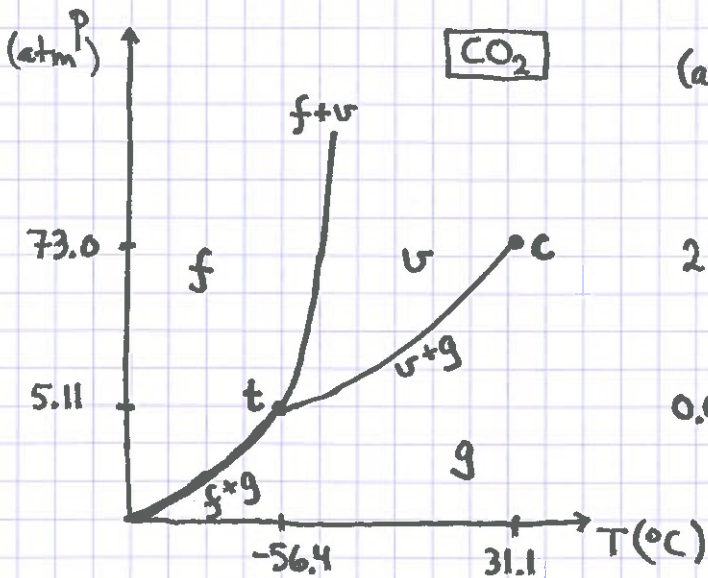


Koeksistenslinjer i (p,T)-diagrammet markerer faseoverganger:



[Eks: CO₂ ved 1 atm, ~~0°C~~ ^{-78.5°C}; "tørris"]

[Eks: Is → Vanndamp i kuldegrader; "frysetørring"]



Koeksistenslinjer (f+v, v+g, f+g):

Likevekt mellom to faser.

Kokepunkt (k): Omgivende lufttrykk = Damptrykket => Koking

Trippelpunkt (t): Likevekt mellom alle tre faser

Kritisk punkt (c): Enden på v+g koeksistenslinjen.

Hvis $p > p_c$ og $T > T_c$, er det ingen forskjell på væske og gass. Vi har en fase; et superkritisk fluid.

Latent varme:

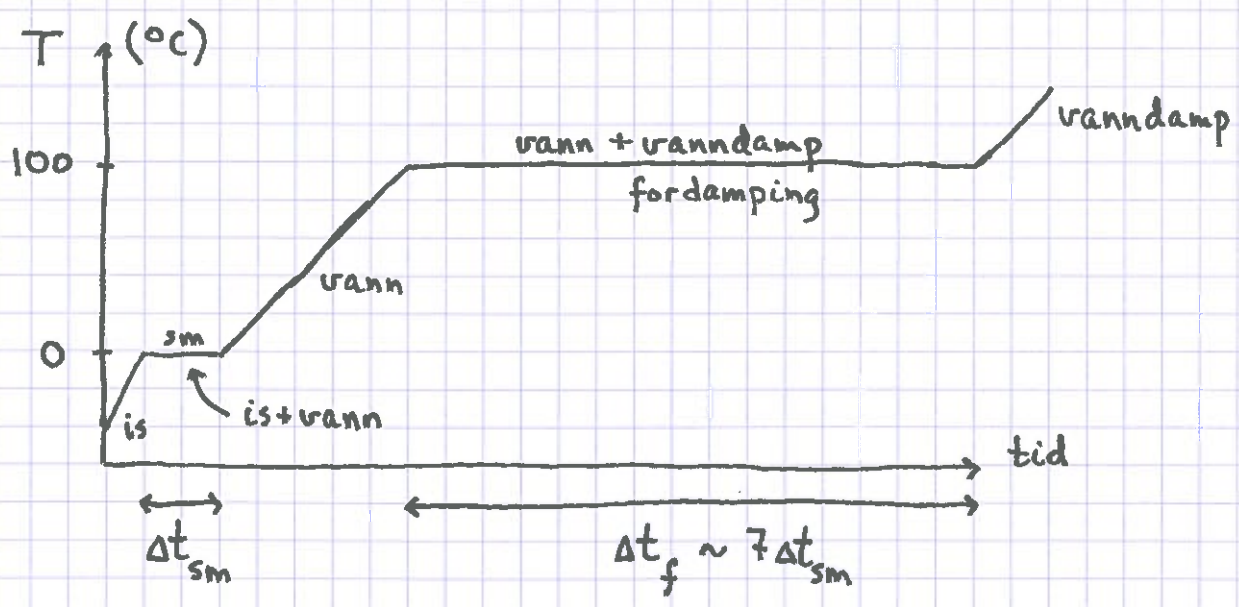
L = varmen som trengs for å smelte/fordampe/sublimere en viss mengde stoff, ved gitt temperatur ($\Delta T = 0$)

Eks: H_2O . I nærheten av trippelpunktet er

$L_{sm} \approx 80 \text{ cal/g}$, $L_f \approx 600 \text{ cal/g}$, $L_{sub} = L_{sm} + L_f \approx 680 \text{ cal/g}$
($L_f \approx 540 \text{ cal/g}$ ved 1 atm)

1 cal (kalori) = varmen som skjer T fra $14.5^\circ C$ til $15.5^\circ C$ i 1g H_2O ved $p = 1 \text{ atm}$ (= 4.184 J)

Med konstant tilførsel av effekt:



Clapeyrons ligning for koeksistenslinjene [LHL 17.10] (97)

$$\boxed{\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T \cdot \Delta V}}$$

$\Delta V =$ volumendringen (f.eks. $V_g - V_v$)

$L =$ latent varme (f.eks. L_f)

Både L og ΔV er prop. med N (dvs stoffmengden)
 $\Rightarrow L/T \cdot \Delta V$ blir uavh. av stoffmengden, OK.

[Ligningen kan utledes fra termodynamikkens 1. og 2. lov.]

Luftfuktighet:

$$p = p_{N_2} + p_{O_2} + p_{CO_2} + p_{H_2O} + \dots = \text{sum av } \underline{\text{partialtrykk}}$$

Luft mettet med vanndamp:

$$p_{H_2O} = p_d = \text{damptrykket på v+g koeks.linjen} \\ = \text{max partialtrykk av } H_2O \text{ i luft ved gitt } T$$

$p_{H_2O} > p_d$: Ikke likevekt. Vi får kondensasjon

$p_{H_2O} < p_d$: Da er relativ luftfuktighet $\phi < 100\%$

$$\boxed{\phi = \frac{p_{H_2O}}{p_d} \cdot 100\%}$$

Damptrykk-kurven

Med vanddamp (g) som den ene fasen er

$$\Delta V = V_g - V \approx V_g \stackrel{\text{ideell gass}}{=} nRT/p_d \quad (V = V_f \text{ evt } V_v)$$

Antar at $L = n \cdot l$ er uafhængig af T ; l = molar latent varme

Dermed kan $p_d(T)$ bestemmes fra Clapeyrons ligning:

$$\frac{dp_d}{dT} = \frac{L}{T \cdot \Delta V} = \frac{n \cdot l}{T \cdot nRT/p_d} = \frac{l p_d}{RT^2}$$

$$\Rightarrow \int_{p_d(T_0)}^{p_d(T)} \frac{dp_d}{p_d} = \frac{l}{R} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T^2} \quad \text{med } T_0, p_d(T_0) \text{ valgt ref. punkt på koeks. linjen}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{p_d(T)}{p_d(T_0)} \right\} = - \frac{l}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_d(T) = p_d(T_0) \exp \left\{ \frac{l}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right\}} \quad \text{Damptrykk-kurven}$$

Med trippelpunktet som referanse:

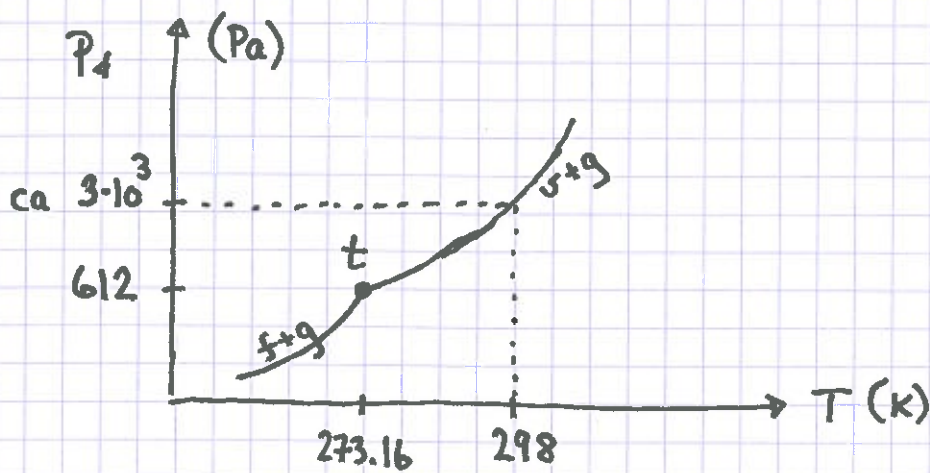
$$T_0 = T_t = 273.16 \text{ K}, \quad p_d(T_0) = 612 \text{ Pa}$$

$$l_f = 598 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = \frac{598}{1000} \frac{\text{kcal}}{\text{g}} \cdot 4.184 \frac{\text{kJ}}{\text{kcal}} \cdot 18 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \approx 45 \text{ kJ/mol}$$

$$l_{\text{sub}} = 678 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = \frac{678}{1000} \frac{\text{kcal}}{\text{g}} \cdot \text{---} \text{---} \text{---} \approx 51 \text{ kJ/mol}$$

$$\Rightarrow p_d(T > T_t) = 612 \text{ Pa} \cdot \exp\left\{19.8 - \frac{5413}{T}\right\} \quad (\text{med } T \text{ i enheten K})$$

$$p_d(T < T_t) = 612 \text{ Pa} \cdot \exp\left\{22.5 - \frac{6134}{T}\right\}$$



Smeltelinjen for H_2O ($f+u$ koeksistens):

$$\Delta V_{sm} = V_u - V_f < 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dT} < 0 \Rightarrow \text{peker (svakt) mot } \underline{\text{venstre}} \text{ (som s. 95)}$$

Eks: Tørr vinterluft.

Anta $T_{ute} = -10^\circ\text{C}$ og $\phi_{ute} = 100\%$. Hva blir ϕ_{inne} hvis vi fyller stua med slik luft?

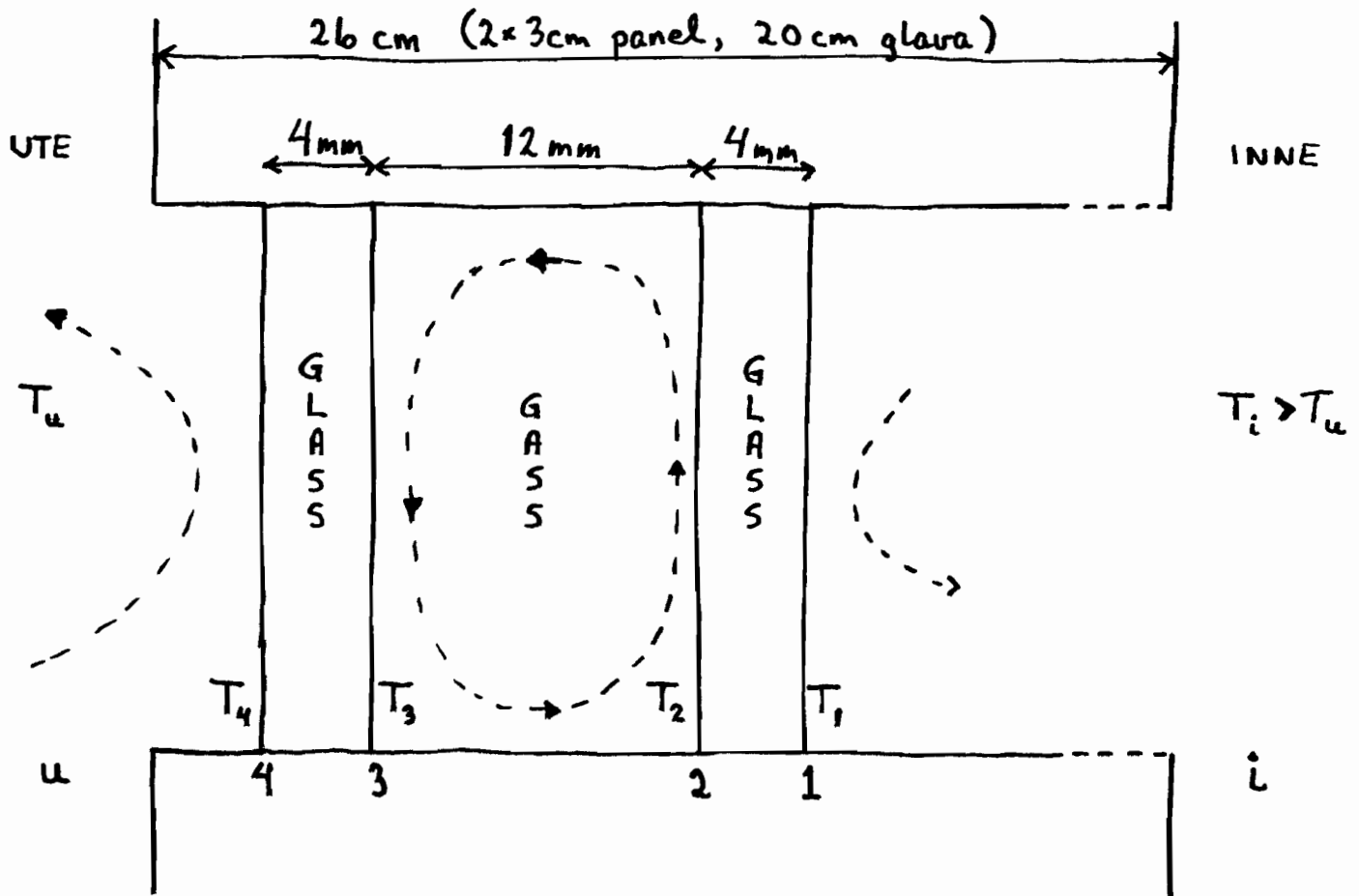
$$\begin{aligned} \text{Løsn: } \phi_{inne} &= 100\% \cdot p_{\text{H}_2\text{O}} / p_d(T_{inne}) = 100\% \cdot p_d(263 \text{ K}) / p_d(293 \text{ K}) \\ &= 100\% \cdot \exp\left\{22.5 - 6134/263\right\} / \exp\left\{19.8 - 5413/293\right\} \\ &\approx 12\% \ll \phi_{\text{komfort}} \approx 50\% \end{aligned}$$

Avhjelpes med pusting, svette, matlagning....

Varmetransport [YF 17; LHL 18]

100

Tre mekanismer (med dobbeltvindu som eksempel):



Konveksjon og varmeovergangstall [YF 17.7; LHL 18.2]

$T_2 > T_3 \Rightarrow$ gassen varmes opp ved 2, utvider seg og stiger; gassen avkjøles ved 3, trekker seg sammen og faller.

Nettoeffekt: Sirkulasjon og varmeoverføring fra 2 til 3

Vind \Rightarrow økt varmeoverføring fra 4 til u
og (i mindre grad!) fra i til 1

Varmeoverføring pga konveksjon (strømning) er vanskelig å regne på. Men grovt sett kan vi anta at varme overført, pr tids- og flateenhet, er prop. med temp. forskjellen.

j = overført varme pr tids- og flateenhet

= " " effekt pr flateenhet

$$[j] = \frac{J}{s \cdot m^2} = \frac{W}{m^2}$$

[Drs essensielt samme fysiske størrelse som intensiteten I , som vi brukte for å karakterisere energitransport i bølger.]

Dermed:

$$\text{Ute: } j_u = \alpha_u \cdot (T_4 - T_u)$$

$$\text{Inne: } j_i = \alpha_i \cdot (T_i - T_1)$$

Byggeforskriftene anslår:

$$\alpha_u = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$$

$$\alpha_i = 7.5 \text{ W/m}^2\text{K}$$

α_u, α_i : varmeovergangstall (med vind, uten vind)
(5-6 m/s i middel)

Eks: Hvis du trives i 25°C på en stille gråværsdag, i bikini/badebukse, hva bør temperaturen være med vind (slik byggeforskriftene regner med)?

Anta at din overflatetemp. er 30°C.

Løsn:

$$\text{Varmetapet i stille vær: } j = \alpha_i \cdot \Delta T = 7.5 \frac{W}{m^2 K} \cdot 5 K = 37.5 \frac{W}{m^2}$$

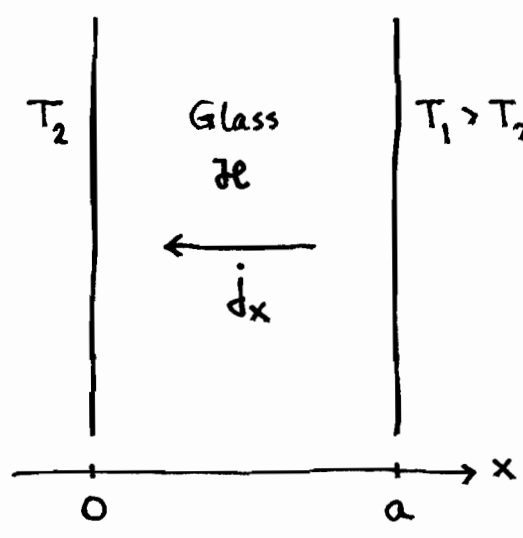
Samme varmetap i vind krever lufttemp. T slik at

$$37.5 \frac{W}{m^2} = \alpha_u \cdot (30 - T)$$

$$\Rightarrow T = 30 - 37.5/25 \approx \underline{\underline{28.5^\circ C}}$$

Varmeledning

[YF 17.7 ; LHL 18.1]



Ekspimentelt finnes (somventet?) at j_x er proporsjonal med $\Delta T = T_1 - T_2$, motsatt rettet ΔT , og omvendt prop. med tykkelsen a :

$$j_x = -\kappa \cdot \Delta T / a$$

κ = varmeledningsevne ($\frac{W}{m \cdot K}$)

Vi ser kun på stasjonære (tidsuavhengige) forhold.

Da er j_x uavhengig av x : Hvis ikke, blir strøm inn i ulik strøm ut av ei tynn skive mellom x og $x+dx$, dvs tilstanden er ikke stasjonær!

[Dette er nøyaktig samme argument som vi brukte s. 80-81 for intensiteten I i ulike bølgetyper. Det fysiske prinsippet er også her kravet om energibevarelse.]

Med j_x uavh. av x , dvs $\Delta T/a$ uavh. av x , har vi

$$j_x = -\kappa \cdot \frac{dT}{dx}$$

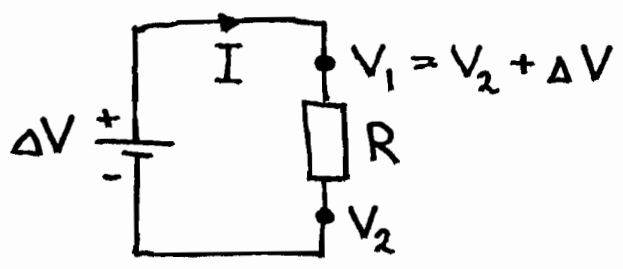
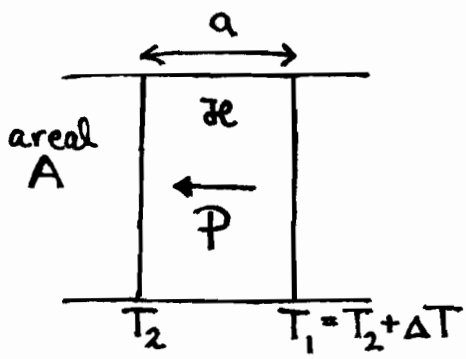
som er Fouriers lov for endimensjonal varmeledning.

Generalisering til 3D: $\vec{j} = -\kappa \nabla T$

∇T = gradienten til $T = \hat{x} \partial T / \partial x + \hat{y} \partial T / \partial y + \hat{z} \partial T / \partial z$
 = vektor som peker i den retningen som T øker raskest (mest)

Stoff	Luft	Glava	Vann	Is	Glass	St&L	Tre
κ (W/m·K)	0.026	0.035	0.61	2.2	0.7-1.1	43	0.1-0.2

Analogi mellom Fouriers lov og Ohms lov :



Energistrøm (Effekt):

$$P = j \cdot A = -\frac{\kappa A}{a} \cdot \Delta T$$

Elektrisk strøm:

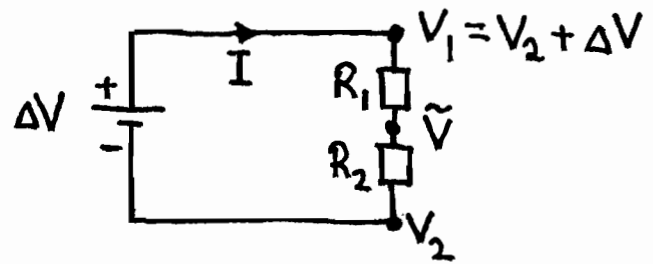
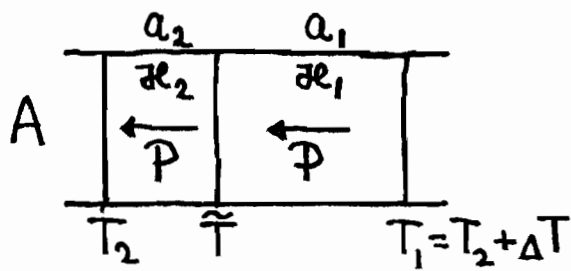
$$I = \frac{1}{R} \cdot \Delta V$$

"Analogitabell":

Fysisk størrelse	Fouriers lov	Ohms lov
"drivkraft"	ΔT [K]	ΔV [V] (volt)
strøm	P [J/s = W]	I [C/s = A] (ampere)
resistans (motstand)	$\frac{a}{\kappa A}$ [$\frac{K}{W}$]	R [$\frac{V}{A} = \Omega$] (ohm)
konduktans	$\kappa A/a$ [W/K]	$G = R^{-1}$ [S = Ω^{-1}] (siemens)

Kommentar: Varmeledningseinen κ er en materialspezifikk parameter. En motstand med lengde a og tverrsnitt A har resistans R som er prop. med a og omv. prop. med A , $R = a/\sigma A$, med elektrisk ledningseime σ , som også er en materialspezifikk størrelse, med enhet A/m·V, evt. 1/m·Ω, evt. S/m. Med andre ord: Analogien er komplett!!

Seriekobling av varmemotstander og elektriske motstander: (104)



$$T_1 - \tilde{T} = -\frac{a_1}{k_1 A} \cdot P$$

$$V_1 - \tilde{V} = R_1 \cdot I$$

$$\tilde{T} - T_2 = -\frac{a_2}{k_2 A} \cdot P$$

$$\tilde{V} - V_2 = R_2 \cdot I$$

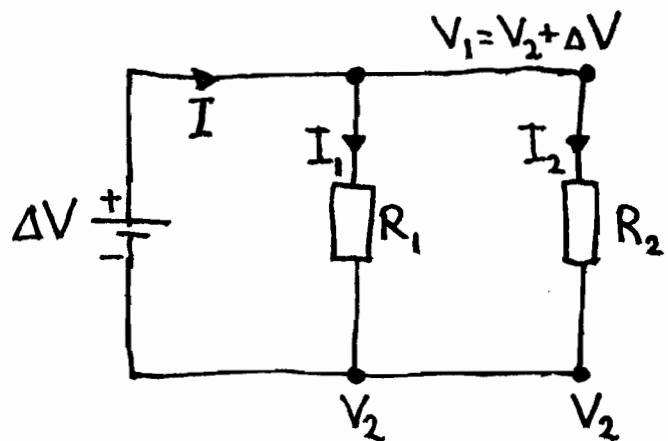
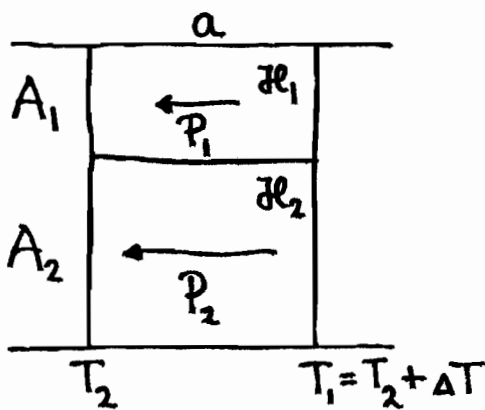
$$\Delta T = T_1 - T_2 = (T_1 - \tilde{T}) + (\tilde{T} - T_2)$$

$$\Delta V = V_1 - V_2 = (V_1 - \tilde{V}) + (\tilde{V} - V_2)$$

$$= -\left(\frac{a_1}{k_1 A} + \frac{a_2}{k_2 A}\right) \cdot P$$

$$= (R_1 + R_2) \cdot I$$

Parallellkobling av varmemotstander og elektriske motstander:



$$\Delta T = -\frac{a_1}{k_1 A_1} \cdot P_1$$

$$\Delta V = R_1 I_1 = R_2 I_2$$

$$= -\frac{a_2}{k_2 A_2} \cdot P_2$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$P = P_1 + P_2$$

$$= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \cdot \Delta V$$

$$= -\left[\left(\frac{a_1}{k_1 A_1}\right)^{-1} + \left(\frac{a_2}{k_2 A_2}\right)^{-1}\right] \cdot \Delta T$$

$$= (G_1 + G_2) \cdot \Delta V$$

$$= -\left[\frac{k_1 A_1}{a_1} + \frac{k_2 A_2}{a_2}\right] \cdot \Delta T$$

Eks: Bestem varmetap pr m^2 gjennom vegg med 3cm (105)
 ytter- og innerpanel av grantré ($\lambda_t = 0.12 \text{ W/m}\cdot\text{K}$) og 20 cm
 glava ($\lambda_g = 0.035 \text{ W/m}\cdot\text{K}$), med $T_i = 20^\circ\text{C}$ og $T_u = -10^\circ\text{C}$.
 Se bort fra "wind-chill factor" (konveksjon; s 100-101).

Bestem og plott temperaturprofilen gjennom vegg. Var det OK
 å anta "perfekt kobling" mellom utelufta og utsiden av
 ytterpanelet, og mellom innelufta og innsiden av innerpanelet?

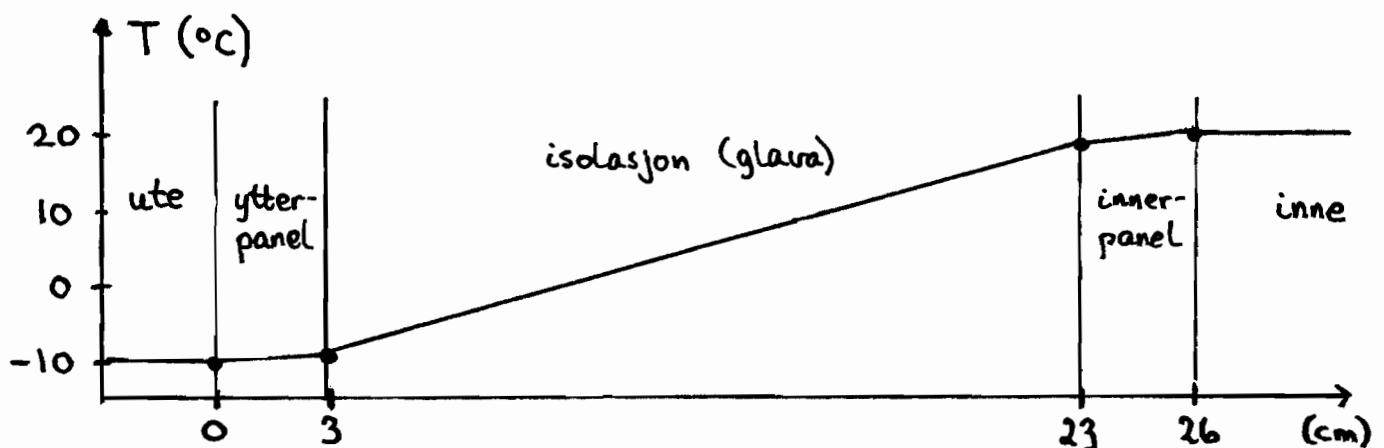
Løsn: Total varmemotstand er $2 \cdot \frac{a_t}{\lambda_t A} + \frac{a_g}{\lambda_g A} = 6.21 \text{ K/W}$
 (med $A = 1 \text{ m}^2$, $a_t = 0.03 \text{ m}$ og $a_g = 0.20 \text{ m}$). Med $\Delta T = 30 \text{ K}$ gir det
 et varmetap (effekttap) $\dot{P} = [6.21 \text{ K/W}]^{-1} \cdot 30 \text{ K} = \underline{4.83 \text{ W}}$.

Temperaturfall gjennom 3cm granpanel:

$$\Delta T_t = \dot{P} \cdot a_t / \lambda_t A = 4.83 \text{ W} \cdot 0.03 \text{ m} / (0.12 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \cdot 1 \text{ m}^2) = 1.2 \text{ K}$$

Gjennom 20 cm glava (= steinull, glassull, glassvett...):

$$\Delta T_g = \dot{P} \cdot a_g / \lambda_g A = 4.83 \text{ W} \cdot 0.20 \text{ m} / (0.035 \frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}} \cdot 1 \text{ m}^2) = 27.6 \text{ K}$$



Merk: Størst temperaturgradient, $dT/dx = \dot{P} / \lambda A$, gjennom
 materialet som isolerer best (minst λ)!

Fra s. 101: $j_u = \alpha_u \cdot (T(0) - T_u)$, $j_i = \alpha_i \cdot (T_i - T(26 \text{ cm}))$

Her er $j_u = j_i = \dot{P} / A = 4.83 \text{ W/m}^2$, og vi har antatt $T(0) = T_u$
 og $T(26 \text{ cm}) = T_i$, m.a.o. $\alpha_u = \alpha_i = \infty$ ("perfekt kobling").

Med $\alpha_u = 25 \text{ W/m}^2\text{K}$ blir $T(0) - T_u = 4.83 / 25 \text{ K} \approx 0.2 \text{ K}$, og med $\alpha_i = 7.5$
 blir $T_i - T(26 \text{ cm}) = 4.83 / 7.5 \text{ K} \approx 0.6 \text{ K}$. OK & neglisjere disse!

Et legeme med temp. T består av atomer/molekyler som oscillerer omkring sine likevektsposisjoner, omtrent som en harmonisk oscillator (s. 56-58). Da har vi akselererte elektriske ladninger, som i følge klassisk elektrodynamikk (James Clerk Maxwell, 1831-1879) sender ut (emitterer) elektromagnetiske bølger, dvs stråling, med bølgefart $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Emittert stråling fra ett legeme kan absorberes, reflekteres eller transmitteres av et annet legeme, med andeler hhv a , r og t , slik at $a + r + t = 1$.

Et svart legeme defineres ved at $a = 1$. (Dvs $r = t = 0$)
I termisk likevekt (dvs konstant T) må et legeme emittere og absorbere like mye strålingsenergi (for enhver bølgelengde), dvs $e(\lambda) = a(\lambda)$, der $e =$ legemets emissivitet ($e \leq 1$).

Stefan - Boltzmanns lov:

Josef Stefan, 1879, analyse av exp. data: $j \sim T^4$

Ludwig Boltzmann, 1884, termodyn. teori:

$$j = \sigma T^4; \quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

For svart legeme,
 $e = a = 1$.

Reelle legemer: $j = e \cdot \sigma T^4$; $e < 1$ ($e = e(\lambda)$)

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \quad (h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = \text{Plancks konstant})$$

Plancks fordelingslov:

For gitt T , hvor mye bidrar ulike frekvenser f , evt. bølgelengder λ , til total emittert stråling $j(T)$?

Kvantemekanikk og statistisk mekanikk gir [M. Planck, 1900]:

Frekvensfordelingen:

$$j(T) = \int_0^{\infty} \frac{dj}{df} \cdot df ; \quad \frac{dj}{df} = \frac{2\pi h f^3 / c^2}{\exp[hf/k_B T] - 1} \quad \left[\frac{W}{m^2 \cdot Hz} \right]$$

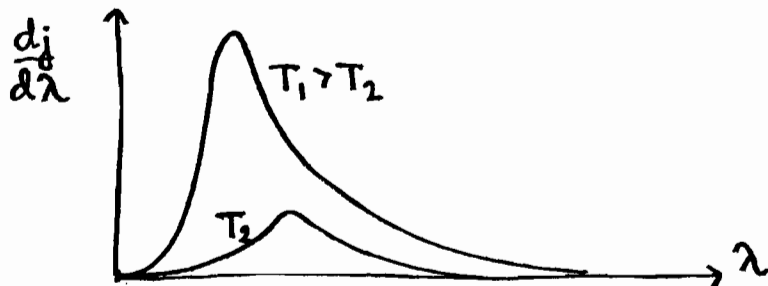
Bølglengdefordelingen: ($c = \lambda \cdot f$)

$$j(T) = \int_0^{\infty} \frac{dj}{d\lambda} \cdot d\lambda ; \quad \frac{dj}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2 / \lambda^5}{\exp[hc/\lambda k_B T] - 1} \quad \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

$$\frac{dj}{df} \text{ har max verdi for } \frac{f}{T} = 5.88 \cdot 10^{10} \frac{Hz}{K}$$

$$\frac{dj}{d\lambda} \text{ " " " } \lambda T = 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

(Wiens forskyvningslov)



Eks: Sola, $T \approx 6 \cdot 10^3 \text{ K}$, max for $\lambda \approx 480 \text{ nm}$ (blågrønt)

(Synlig lys: 400 nm (blått) $\leq \lambda \leq 700 \text{ nm}$ (rødt))

Kroppen (overflaten), $T \approx 303 \text{ K}$, max for $\lambda \approx 10 \mu\text{m}$ (IR)

Kaffebål, $T \approx 1500 \text{ K}$, max for $\lambda \approx 1.9 \mu\text{m}$ (IR!)

Eks: Effekttap fra naken kropp pga stråling, i omgivelser ved -5°C ; anta $e=1$ og $T_{\text{hud}} = 30^{\circ}\text{C}$.

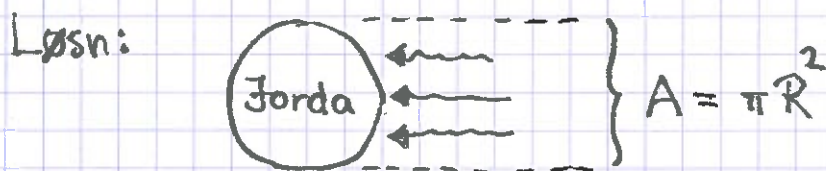
Løsn:
$$P_{\text{netto}} = P_{\text{ut}} - P_{\text{inn}} = (j_{\text{ut}} - j_{\text{inn}}) \cdot A = \sigma (T_{\text{hud}}^4 - T_{\text{omg}}^4) A$$

$$\approx 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot (303^4 - 268^4) \text{K}^4 \cdot 2 \text{m}^2 \approx \underline{370 \text{ W}}$$

Normalt energinntak via mat er ca 10000 kJ pr døgn, ders $P_{\text{mat}} \approx 10^7 \text{ J} / (3600 \cdot 24 \text{ s}) \approx \underline{116 \text{ W}}$!?

Klær hindrer det meste av strålingstapet.

Eks: Jorda mottar i middel ca 1370 W/m^2 fra sola. Hva er da jordas midlere overflatetemperatur?



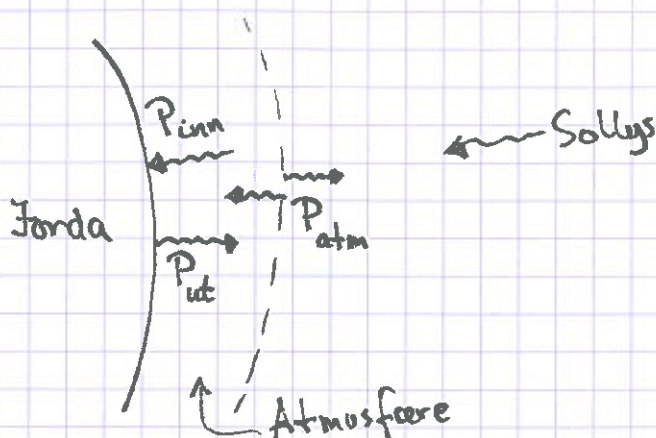
$$\Rightarrow P_{\text{inn}} = 1370 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot \pi R^2$$

$$P_{\text{ut}} = 4\pi R^2 \cdot \sigma T^4$$

Likerekt: $P_{\text{ut}} = P_{\text{inn}} \Rightarrow T = \left\{ \frac{1370 \text{ W/m}^2}{4 \cdot 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4} \right\}^{1/4} = \underline{279 \text{ K}}$

Observert: ca 288 K

Vi har f.eks. neglisjert drivhuseffekt pga atmosfæren:

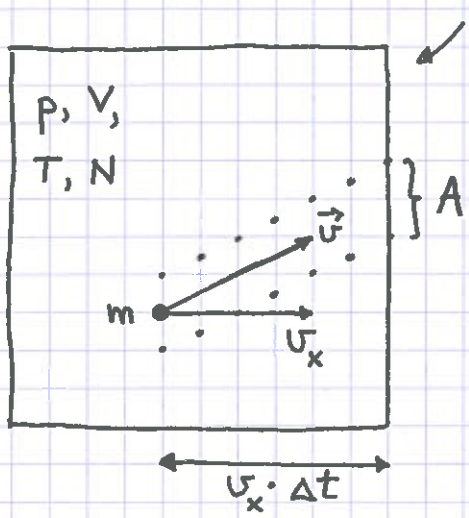


$$P_{\text{ut}} = P_{\text{inn}} + P_{\text{atm}}$$

\Rightarrow noe større T , OK!

Mikroskopisk tolkning av p og T [YF 18.3; LHL 14.1]

Ser på gass med lav tetthet. Antar elastiske kollisjoner (mot veggene). Antar isotrope (dvs: retningsuavhengige) forhold.



Boks med ideell gass

ΔP_x = impuls overført til del av vegg med areal A, fra molekylene i gassen

$$\Delta P_x = \underbrace{2m v_x}_{\text{impuls overført pr molekyl}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2} N}_{\text{antall molekyler med } v_x > 0} \cdot \underbrace{\frac{A v_x \Delta t}{V}}_{\substack{\text{andel av molekylene} \\ \text{som treffer A i løpet av } \Delta t \\ [A v_x \Delta t = \text{volum av parallelepipedet}]}}$$

Trykket mot A, dvs trykket i gassen :

$$p = F_x / A \stackrel{N^2}{=} (\Delta P_x / \Delta t) / A = \frac{N}{V} \cdot m v_x^2$$

Molekylene har en isotrop fordeling av hastigheter

$$\Rightarrow v_x^2 \text{ må erstattes av } \langle v_x^2 \rangle \quad [\langle \dots \rangle = \text{middelverdi}]$$

$$\text{Isotropi : } \langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

$$\text{Siden } v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \text{ må vi ha } \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$$

$$\text{Dermed: } p = \frac{N}{V} \cdot \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle K \rangle$$

Midlere kinetisk energi pr molekyl: $\langle K \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$ (= $\langle K_{\text{trans}} \rangle$)

[Antar punktpartikler, dvs atomer. Har også K_{rot} og K_{vib} hvis fleratomig molekyl!]

Ideell gass tilstandsligning: $p = \frac{N}{V} \cdot k_B T$

(110)

Sammenligning gir: $k_B T = \frac{2}{3} \langle K \rangle$

Med andre ord: Absolutt temp. T er et mål på gasmolekylenees midlere kinetiske energi.

translasjons-

Midlere hastigheter:

$$\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0 \quad (\text{pga symmetri})$$

$$\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle = 3 k_B T / m$$

RMS-hastighet ("Root Mean Square"):

$$v_{\text{rms}} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3 k_B T / m}$$

Eks: Luft ved 300 K, midlere molekylmasse

$$0.029 \frac{\text{kg}}{\text{mol}} / 6 \cdot 10^{23} \frac{\text{molekyler}}{\text{mol}} = 4.8 \cdot 10^{-26} \text{ kg / molekyl,}$$

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot 300 \text{ K} / 4.8 \cdot 10^{-26} \text{ kg}} \quad \left[\begin{array}{l} \text{J} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m} \\ = \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2 \end{array} \right]$$
$$= \underline{509 \text{ m/s}}$$

Dette er et mål på midlere partikkelhastighet

i luft. Ved 300 K er bølgehastigheten

i luft $v_{\text{lyd}} \approx 345 \text{ m/s}$; av samme

størrelsesorden som v_{rms} .

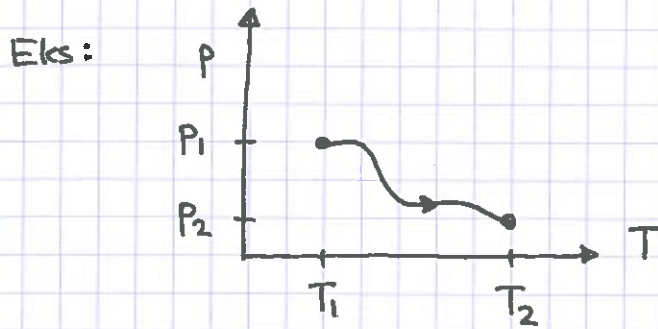
Ikke så rart, kanskje?

[Mer om v_{lyd} snart!]

1. hovedsetning

[YF 19,20 ; LHL 15,13]

Termodynamisk prosess : Endring i systemets tilstandsvariable.



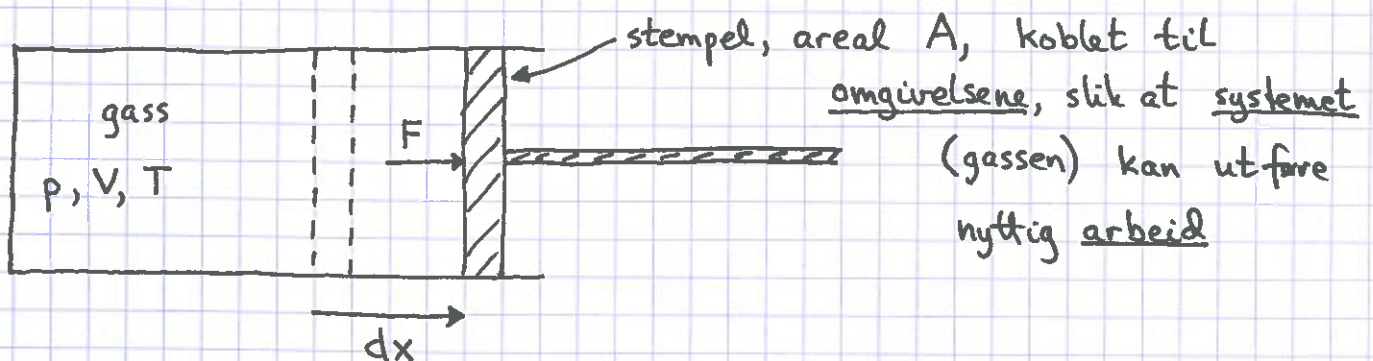
Reversibel prosess : Idealisert prosess som kan reverseres, slik at både system og omgivelser kommer tilbake til starttilstanden. Må gå "uendelig langsomt".

Nyttig idealisering, selv om alle reelle prosesser er mer eller mindre irreversible (pga friksjon, turbulens osv).

Arbeid [YF 19.2 ; LHL 13.5]

Varme = energitveksling pga temp. forskjeller

Arbeid = alle andre former for energitveksling



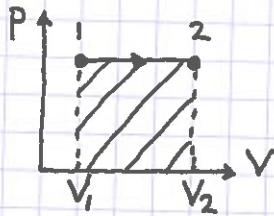
Arbeid dW utført av gassen på omgivelsene ved utvidelse fra V til $V + dV$ ved trykk p :

$$dW = F \cdot dx = pA \cdot \frac{dV}{A} = p \cdot dV$$

Fortegnsvalg: $dW > 0$ når systemet gjør arbeid på omgivelsene

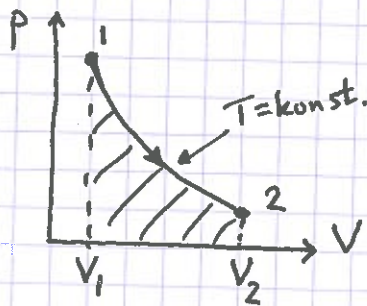
Eksempler:

Isobar utvidelse:



$$W = \int_1^2 dW = \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV = \underline{\underline{p \cdot (V_2 - V_1)}}$$

Isoterm utvidelse med ideell gass:



$$pV = Nk_B T \Rightarrow p(V) = Nk_B T \cdot \frac{1}{V}$$

$$\Rightarrow W = Nk_B T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \underline{\underline{Nk_B T \ln \frac{V_2}{V_1}}}$$

Dus:

$$W = \text{arealet under kurven } p(V)$$

Indre energi [YF 19.4, 19.6; LHL 13.6]

U = systemets indre energi

= den totale energien til partiklene i systemet (rett og slett)

Ideell gass: Ingen vekselvirkning mellom molekylene
 \Rightarrow ingen potensiell energi, kun kinetisk energi

$$\Rightarrow \boxed{U = U(T) = N \langle K \rangle} \quad \text{for ideell gass}$$

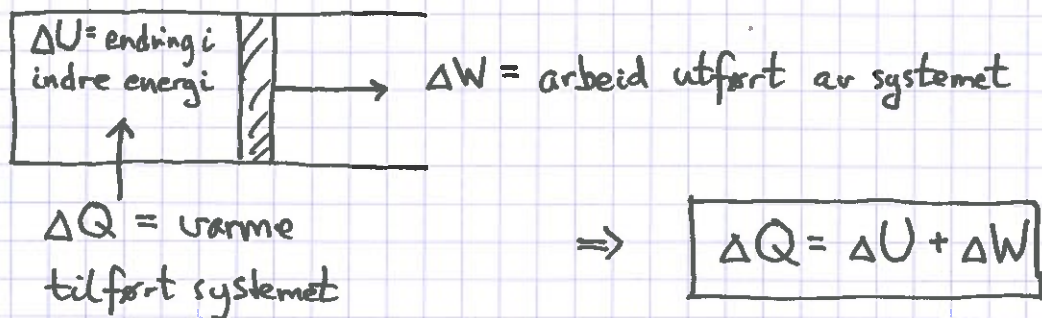
Eks:

Atomære gasser (f.eks. edelgasser som He, Ne, ...):

$$\langle K \rangle = \langle K \rangle_{\text{trans}} = \frac{3}{2} k_B T \quad (\text{pr atom})$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{U(T) = \frac{3}{2} N k_B T}}$$

Krav om energi bevarelse gir 1. hovedsetning:



På "differensiell" form: $dQ = dU + dW$

Merk at U er tilstandsfunksjon; Q og W er prosessvariable.

Eks1: Hva er C_V og C_p for ideell atomær gass? 06.11.14

Løsning:

$$dQ = dU + dW = dU + p dV; \quad U = U(T) = \frac{3}{2} N k_B T; \quad V(p, T) = \frac{N k_B T}{p}$$

$$C_V = (dQ/dT)_V \stackrel{dV=0}{=} (dU/dT)_V = \underline{\underline{\frac{3}{2} N k_B}} = \underline{\underline{\frac{3}{2} n R}} \quad (s. 91)$$

$$\begin{aligned} C_p &= (dQ/dT)_p = (dU/dT)_p + p (dV/dT)_p \\ &= \frac{3}{2} N k_B + p \cdot N k_B / p = \underline{\underline{\frac{5}{2} N k_B}} = \underline{\underline{\frac{5}{2} n R}} \end{aligned}$$

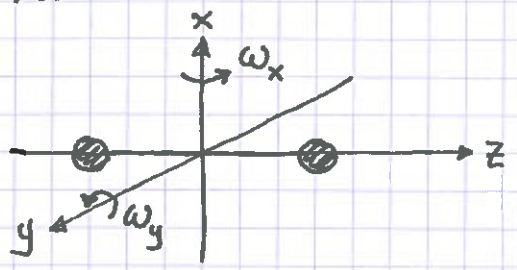
$$\text{Dvs: } \boxed{C_p - C_V = n R \quad \text{for ideell gass.}}$$

Hvorfor er $C_p > C_V$? Med $p = \text{konstant}$ må det tilføres mer varme for å oppnå en viss økning i T , sammenlignet med om V holdes konstant, fordi noe av varmen går med til å gjøre et arbeid på omgivelsene. Med $V = \text{konstant}$ går all tilført varme med til å øke systemets indre energi U , og dermed til å øke systemets temperatur T .

Eks 2: C_p og C_v for ideell toatomig gass

[Luft er nesten 100% toatomig gass]

Løsn:



Kinetisk energi:

$$K = K_{trans} + K_{rot}$$

$$= \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2} I_o (\omega_x^2 + \omega_y^2)$$

[Kvantemekanikk $\Rightarrow I_o^{(z)} = 0$; dessuten er K_{vib} ikke relevant ved 300K]

Ekvipartisjonsprinsippet: Hver kvadratiske frihetsgrad bidrar med $\frac{1}{2} k_B T$ til indre energi ~~■~~ pr partikkel!

$$\Rightarrow U = N \cdot \left\{ \underbrace{3 \cdot \frac{1}{2} k_B T}_{\langle K_{trans} \rangle} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{2} k_B T}_{\langle K_{rot} \rangle} \right\} = \frac{5}{2} N k_B T$$

$$\Rightarrow C_v = (dQ/dT)_v = (dU/dT)_v = \frac{5}{2} N k_B = \frac{5}{2} n R$$

$$C_p = (dQ/dT)_p = (dU/dT)_p + p (dV/dT)_p = \frac{7}{2} N k_B = \frac{7}{2} n R$$

$$\Rightarrow \boxed{C_p - C_v = n R} \quad (\text{også for toatomig (og fleratomig!) ideell gass})$$

Eksp., luft: $c_{pm} = C_p/n = 29.19 \text{ J/mol} \cdot \text{K} = 3.51 R$
 $c_{vm} = C_v/n = 20.85 \text{ — — — } = 2.51 R$ } Godt samsvar!

Eks 3: Hvor mye bjørkesed trengs for å varme opp lufta på en hybel på 10 m^2 fra 12°C til 22°C ? [Bjork: $500 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$; $2589 \frac{\text{kWh}}{\text{m}^3}$]

Løsn: $n = V/V_m = 25 \text{ m}^3 / [0.029 \text{ kg/mol} / 1.29 \text{ kg/m}^3] = 1112 \text{ mol}$

$$\Rightarrow Q = c_{pm} \cdot n \cdot \Delta T = \frac{7}{2} R \cdot 1112 \cdot 10 \text{ (J)} = 323.6 \text{ kJ}$$

$$1 \text{ kg bjork} \hat{=} 2589 \cdot 3600 / 500 \text{ kJ} = 18641 \text{ kJ}$$

$$\Rightarrow \text{Det trengs } 323.6 / 18641 \text{ kg} = 0.017 \text{ kg} = \underline{17 \text{ g}} \text{ (!)}$$

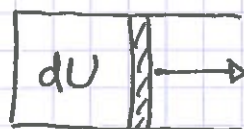
[Trengs mye mer for å varme opp vegger/fak/gulv... = fast stoff]

Adiabatisk prosess

[YF19.8; LHL 15.3]

(115)

= varmeisoleret prosess, $\Delta Q = 0 \Rightarrow \Delta U = -\Delta W$



($dQ = 0$)

$$dU = C_v dT$$

Antar ideell gass: ($C_p - C_v = nR$)

$$p dV = nR(T/V) dV = (C_p - C_v) T \frac{dV}{V}$$

Vi innfører adiabatkonstanten

$$\gamma = C_p / C_v$$

$$\Rightarrow p dV = C_v (\gamma - 1) T \frac{dV}{V}$$

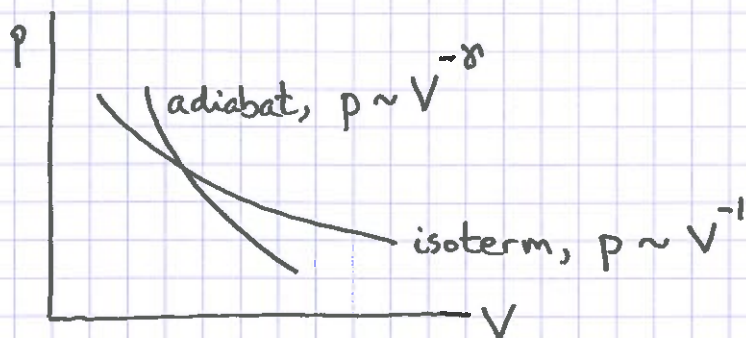
$$\Rightarrow C_v dT = -C_v (\gamma - 1) T \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \ln T = -(\gamma - 1) \ln V + \text{konst.} \Rightarrow \ln T + \ln V^{\gamma - 1} = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \ln [T \cdot V^{\gamma - 1}] = \text{konst.} \Rightarrow T \cdot V^{\gamma - 1} = \text{konst.}$$

Med ideell gass er $T = \text{konst.} \cdot pV \Rightarrow p \cdot V^{\gamma} = \text{konst.}$

Evt, siden $V = \text{konst.} \cdot T/p$: $p \cdot T^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \text{konst.}$



$\gamma > 1 \Rightarrow$ adiabat brattere enn isoterm for ideell gass

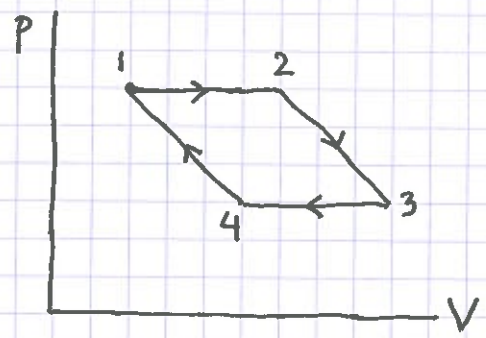
$$\text{Luft: } \gamma = 7/5 = 1.4$$

$$\text{Edelgass: } \gamma = 5/3 \approx 1.7$$

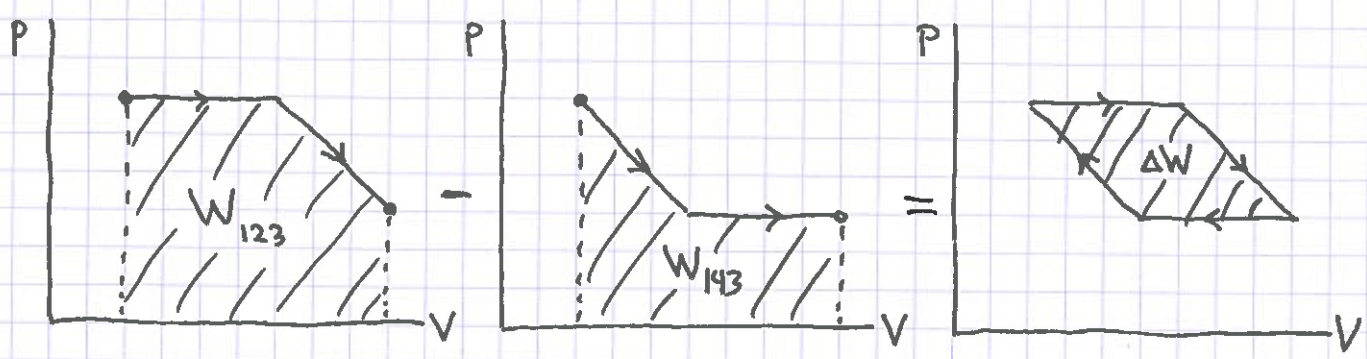
Ved lydforplantning i luft har vi
adiabatiske forhold $\Rightarrow v_{\text{lyd}}$ avhenger av γ og T .
Se øving 12!

Kretsprosesser [YF 19.4; LHL 15.1]

= prosesser som starter og slutter i samme tilstand



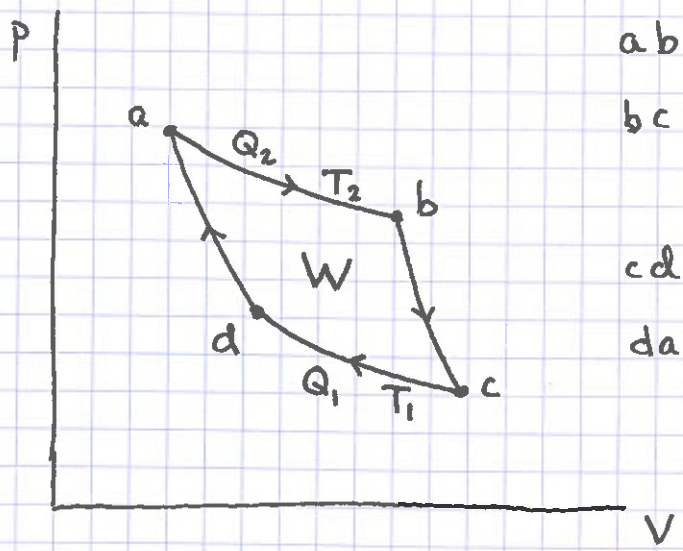
$\Rightarrow \Delta U = 0$ for kretsprosess
 $\Rightarrow \Delta Q = \Delta W$ ——— " ———



ΔW = arbeid utført pr syklus = omsluttet areal i pV-planet

Fortegn: Med klokka $\Rightarrow \Delta W > 0$ (og omvendt)

Carnot-prosessen [YF 20.6; LHL 15.4]



- ab: isoterm utvidelse ved T_2 ; $Q_2 > 0$
- bc: adiabatisk ———; $Q = 0$; avkjøling fra T_2 til T_1
- cd: isoterm kompresjon ved T_1 ; $Q_1 < 0$
- da: adiabatisk ———; $Q = 0$; temp.økning fra T_1 til T_2

Virkningsgrad: $\eta = \left| \frac{\text{nytte}}{\text{kostnad}} \right| = \frac{\text{netto utført arbeid}}{\text{tilført varme}} = \frac{W}{Q_2}$

$$\oint dU = 0 \Rightarrow W = Q_2 + Q_1$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{Q_2 + Q_1}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} < 1 \quad (Q_1 < 0)$$

Anta ideell gass $\Rightarrow U = U(T) \Rightarrow \Delta U = 0$ langs isotermene

$$\Rightarrow Q_2 = W_{ab} = \int_{V_a}^{V_b} p(V) dV = nRT_2 \int_{V_a}^{V_b} \frac{dV}{V} = nRT_2 \ln \frac{V_b}{V_a}$$

$$Q_1 = W_{cd} = nRT_1 \ln \frac{V_d}{V_c}$$

Langs adiabatene : $T \cdot V^{\gamma-1} = \text{konst.}$

$$\Rightarrow T_2 V_b^{\gamma-1} = T_1 V_c^{\gamma-1} \quad ; \quad T_1 V_d^{\gamma-1} = T_2 V_a^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_c}{V_b}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_d}{V_a}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_c}{V_b} = \frac{V_d}{V_a} \Rightarrow \frac{V_a}{V_b} = \frac{V_d}{V_c}$$

$$\Rightarrow Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_a}{V_b} = \left[-nRT_2 \ln \frac{V_b}{V_a} \right] \cdot \frac{T_1}{T_2} = -Q_2 \cdot \frac{T_1}{T_2}$$

$$\Rightarrow W = Q_2 + Q_1 = Q_2 \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2}} \quad \text{Virkningsgrad for Carnot-prosess}$$

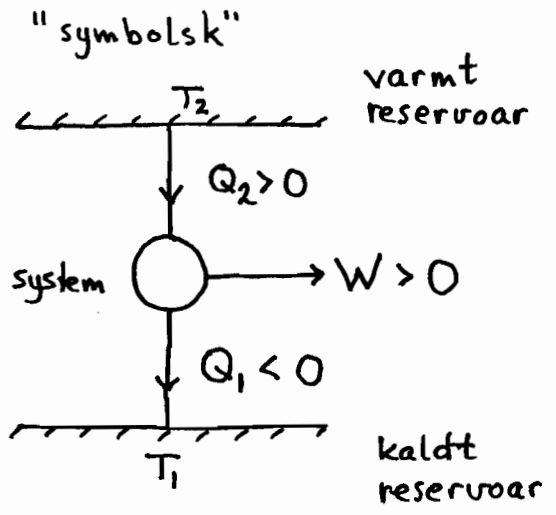
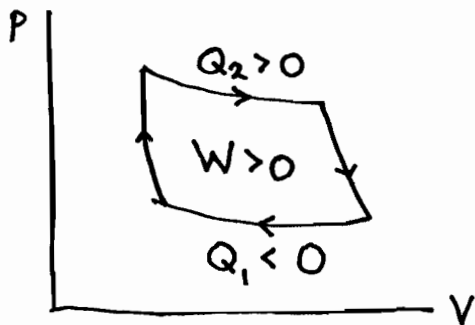
En slik reversibel Carnot-prosess er en optimal idealisering.

Alle reelle kretsprosesser har virkningsgrad $\eta < \eta_c$.

10.11.14

Varmekraftmaskin:

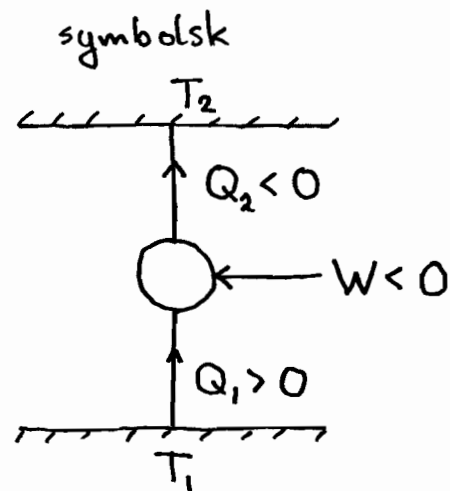
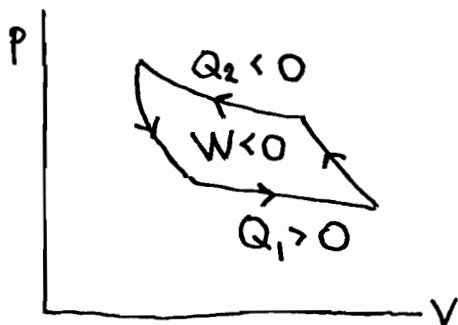
pV-diagram



- Tilfører varme Q_2 for å få utført arbeid W
- Virkningsgrad $\eta = Q_2/W$; $\eta < \eta_c = 1 - T_1/T_2 < 1$
- Varmereservoar: $C_j \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta T_j = |\Delta Q_j / C_j| = 0$ ($j=1,2$)

Kjøleskap, varmepumpe:

pV-diagram



- Gjør arbeid W på systemet for å dra varme Q_1 ut av kaldt reservoar (kjøleskap), evt føre varme Q_2 inn i varmt reservoar (stua)
- Kostnad: $|W|$. Nytte: $|Q_1|$ (kjøleskap), evt $|Q_2|$ (varmepumpe)
 \Rightarrow Effektfaktor: $\epsilon_K = |Q_1/W|$ (kjøleskap), evt $\epsilon_V = |Q_2/W|$ (varmepumpe)

- Teoretiske grenser gitt av Carnot-prosessen.

Carnot-kjølemaskin:

$$\varepsilon_K^c = \left| \frac{Q_1}{W} \right| = \left| \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} \right| = \left| \frac{1}{1 + Q_2/Q_1} \right| = \left| \frac{1}{1 - T_2/T_1} \right| = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

Eks: $T_1 = 4^\circ\text{C} = 277\text{ K}$, $T_2 = 22^\circ\text{C} = 295\text{ K}$ gir $\varepsilon_K^c \approx 15$. Med f.eks. 1500 W inn i kjøleskapet (pga varmeledning, åpen dør, varm mat osv) kreves et arbeid (elektrisk effekt) på 100 W for å holde konstant $T_1 = 4^\circ\text{C}$.

Carnot-varmepumpe:

$$\varepsilon_V^c = \left| \frac{Q_2}{W} \right| = \left| \frac{Q_2}{Q_2 + Q_1} \right| = \left| \frac{1}{1 + Q_1/Q_2} \right| = \left| \frac{1}{1 - T_1/T_2} \right| = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

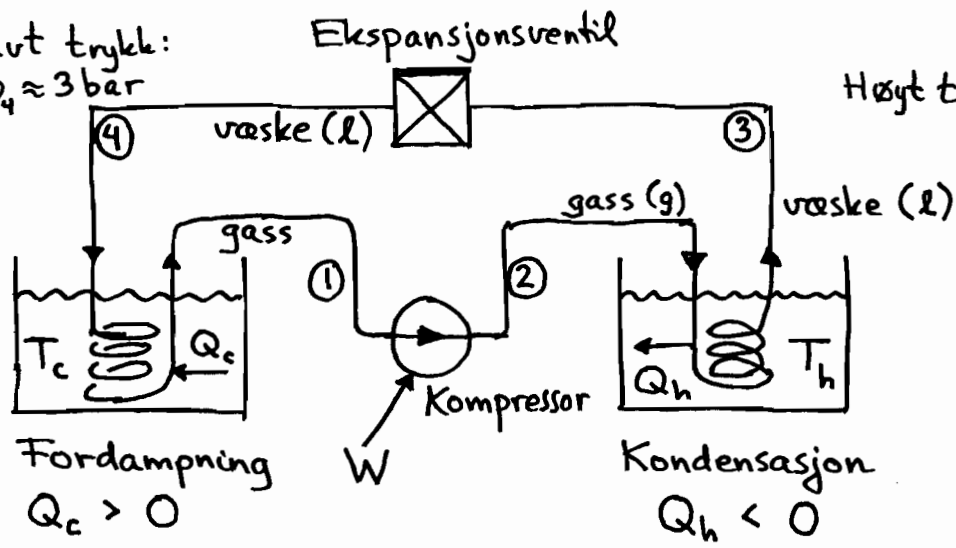
Eks: $T_1 = -5^\circ\text{C} = 268\text{ K}$ (ute), $T_2 = 22^\circ\text{C} = 295\text{ K}$ (inne) gir $\varepsilon_V^c \approx 11$, og (teoretisk!) over 10 kW varmeenergi pr 1 kW elektrisk energi. I praksis: $\varepsilon_V \approx 4$ (med -5°C ute)

"SCOP": Seasonal Coefficient of Performance; $\langle \varepsilon_V \rangle$ gjennom året.

Demo: Varmepumpe / Kjøleskap

Lagt trykk: $P_1 = P_4 \approx 3 \text{ bar}$

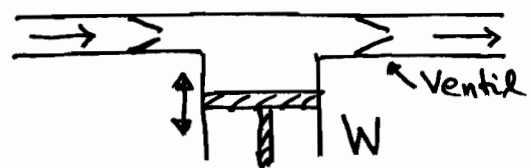
Høyt trykk: $P_2 = P_3 \approx 10 \text{ bar}$



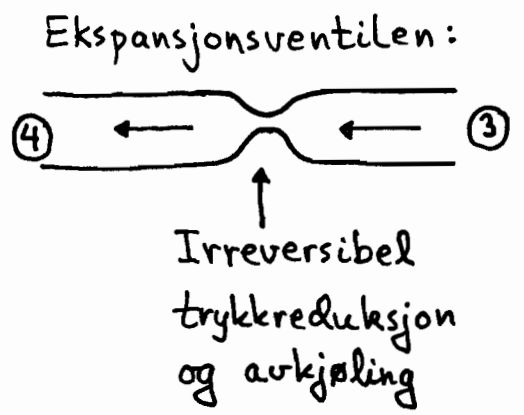
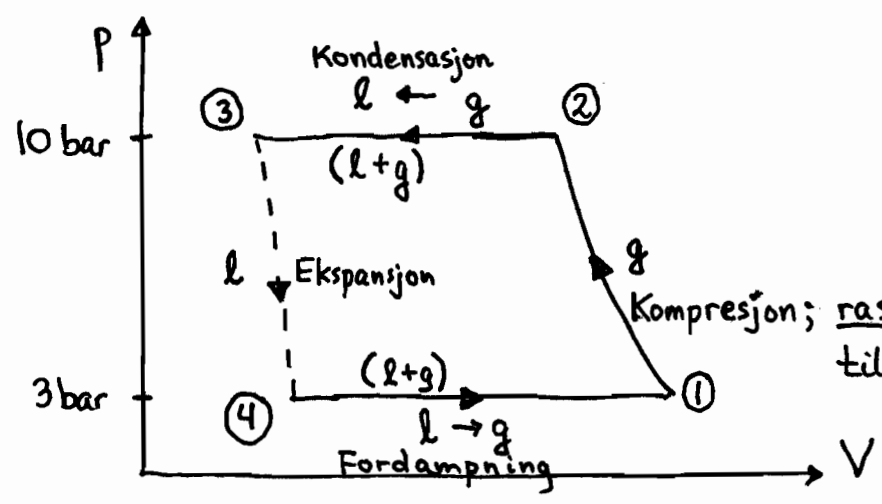
Temperaturer: (f.eks) (°C)

- $T_1 = 3.6$
 - $T_2 = 39.6$
 - $T_3 = 26.3$
 - $T_4 = -0.2$
 - $T_c = 2.9$
 - $T_h = 23.6$
- f.eks.

System: Sirkulerende kjølevæske; pumpes av kompressoren:

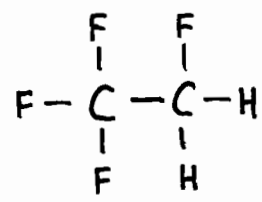


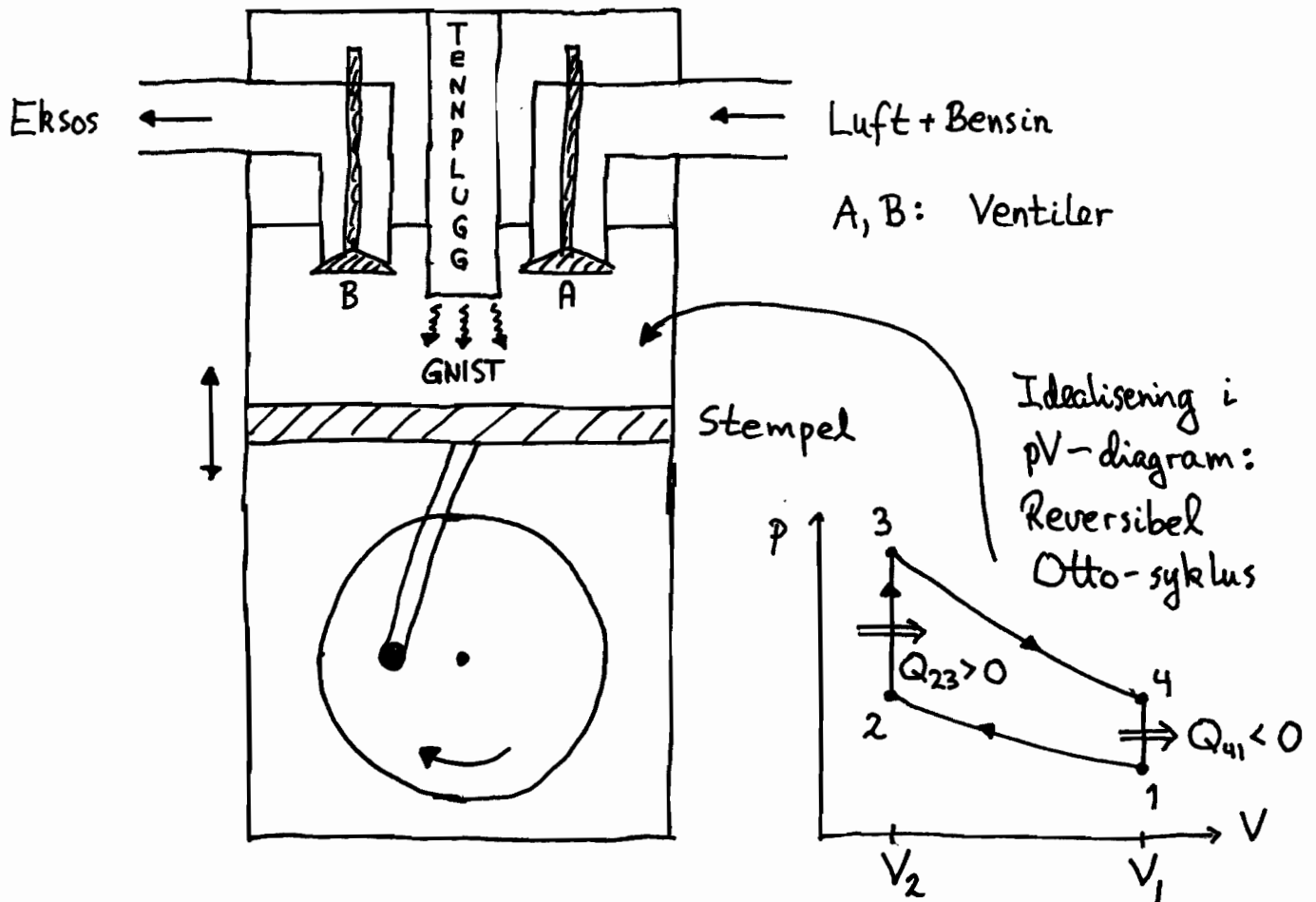
I et pV-diagram:



rask, og dermed tilnærmet adiabatisk ($Q \approx 0$)

Kjølemediet: R134a $\hat{=}$ $C_2H_2F_4$, (1,1,1,2)-tetrafluoretan





1. A åpen, B lukket, luft+bensin inn

1→2. A og B lukket, adiabatisk kompresjon,
 $\Delta V < 0$, $\Delta p > 0$, $\Delta T > 0$, $W_{12} < 0$, $Q_{12} = 0$

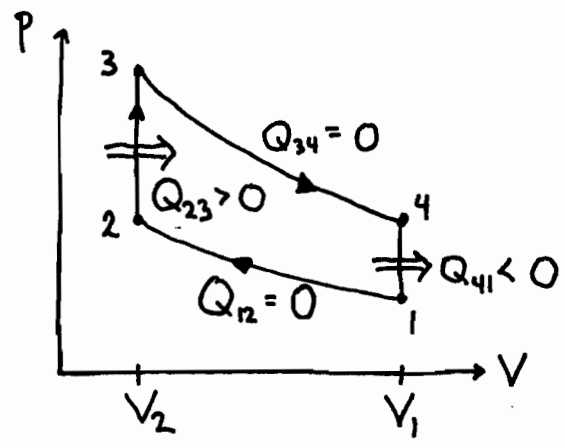
2→3. A og B lukket, antenning med gnist fra tennplugg,
 $\Delta V = 0$, $\Delta p > 0$, $\Delta T > 0$, $W_{23} = 0$, $Q_{23} > 0$

3→4. A og B lukket, adiabatisk utvidelse,
 $\Delta V > 0$, $\Delta p < 0$, $\Delta T < 0$, $W_{34} > 0$, $Q_{34} = 0$

4→1. A lukket, B åpen, eksos ut,
 $\Delta V = 0$ (for "systemet", som nå er forbrent luft/bensin-blanding)
 $\Delta T < 0$, $\Delta p < 0$, $Q_{41} < 0$, $W_{41} = 0$

"1→1". A åpen, B lukket, luft+bensin inn (nytt system!)

osv. osv.



Virkningsgrad for Otto-syklusen:

$$\eta_o = \frac{W}{Q_{23}} = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{23}}$$

$$Q_{23} = C_V(T_3 - T_2) ; |Q_{41}| = C_V(T_4 - T_1)$$

$$\Rightarrow \eta_o = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4(1 - T_1/T_4)}{T_3(1 - T_2/T_3)}$$

1-2 og 3-4 er adiabatere $\Rightarrow T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} ; T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1}$

$\Rightarrow \frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2}{T_3} ;$ dessuten er $\frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}$ med $\gamma \approx 1.4$ (mest luft!)

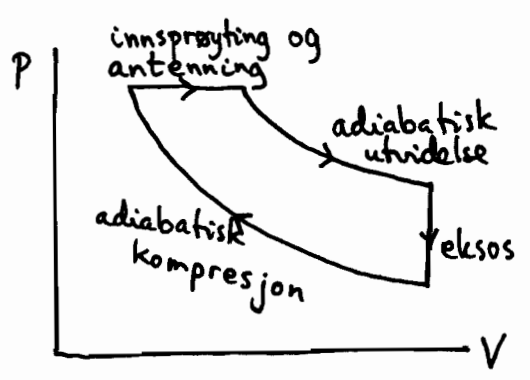
Dermed:

$$\eta_o = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 1 - \varepsilon^{1-\gamma}$$

der $\varepsilon = V_1 / V_2 =$ kompresjonsforholdet

Her er $T_4 > T_1 = T_{\min} , T_3 = T_{\max} ,$ slik at $\eta_o < \eta_c = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$

Idealisert Diesel-syklus:



dvs 2 adiabatere, 1 isokor og 1 isobar

2. hovedsetning

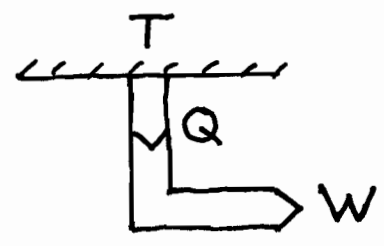
[YF 20; LHL 16,17]

En empirisk (erfaringsbasert) lov som setter begrensninger for hva som er mulige prosesser (selv om 1. hovedsetning - energibevarelse - er oppfylt) :

Kelvin: Umulig å lage kretsprosess som tar varme Q fra et varmereservoar og omsetter dette i sin helhet i arbeid W .

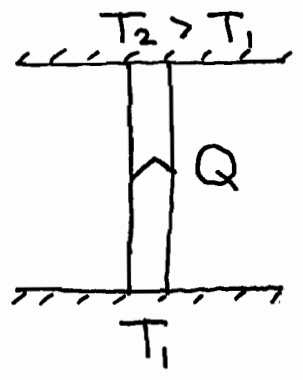
Clausius: Umulig å lage kretsprosess som tar varme Q fra varmereservoar med temp. T_1 og avgir dette i sin helhet til varmeres. med temp. $T_2 > T_1$.

Skjematisk :



"K"
er ikke mulig!

[Ikke uten videre opplagt (?)]



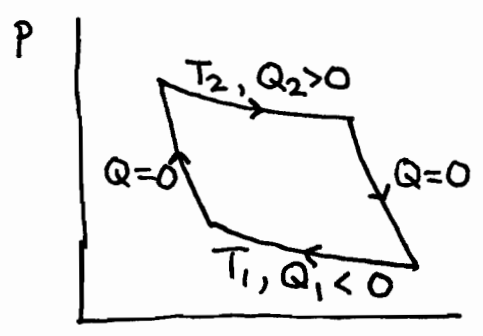
"C"
er ikke mulig!

[Opplagt (?)]

K og C er ekvivalente formuleringer av 2. lov.

Tilstandsfunksjonen entropi [YF 20.7; LHL 17.1]

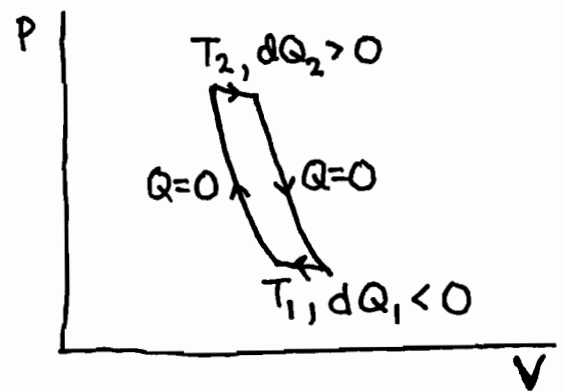
Fant for (reversibel) Carnot-prosess (s. 116-117):



$$Q_1 = -Q_2 T_1 / T_2$$

$$\Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

Må også gjelde for "liten" (rev.) Carnot-prosess:

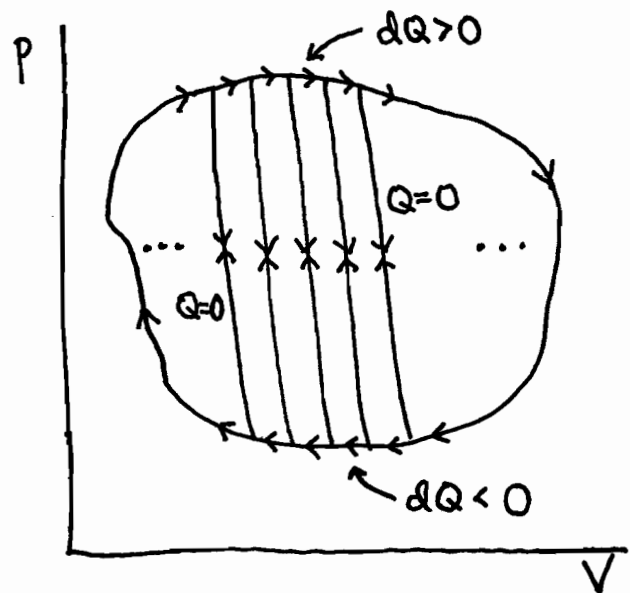


$$\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0$$

Må da også gjelde for vilkaarlig (rev.) kretsprosess:



"Ytre" kretsprosess = Sum av
 (∞) mange (∞) små reversible
 Carnot-prosesser, fordi alle
 "indre" adiabatener kjøres
 opp og ned

$$\Rightarrow \boxed{\oint \frac{dQ}{T} = 0}$$

for vilkaarlig
 reversibel
 kretsprosess

Men da er dQ/T endringen i en tilstandsfunksjon, som vi kaller entropi, S . Dvs:

$$\boxed{dS = dQ/T}$$

$$\boxed{\oint dS = 0}$$

$$[S] = J/K$$

Nå kan 1. hovedsetning - for reversible prosesser - uttrykkes utelukkende med tilstandsfunksjoner:

$$dQ = dU + dW ; \quad dQ = T dS \quad (\text{rev. varme}) ;$$

$$dW = p dV \quad (\text{rev. arbeid})$$

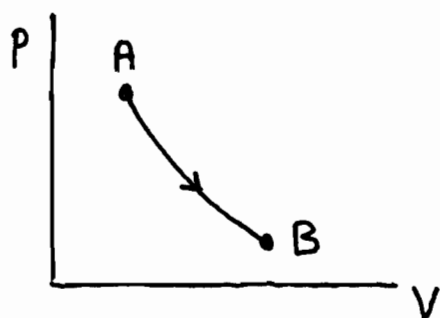
$$\Rightarrow \boxed{T dS = dU + p dV}$$

Den termodynamiske identitet

Eksempler

Eks 1: Hva er ΔS for rev. adiabatisk prosess?

Løsn 1:



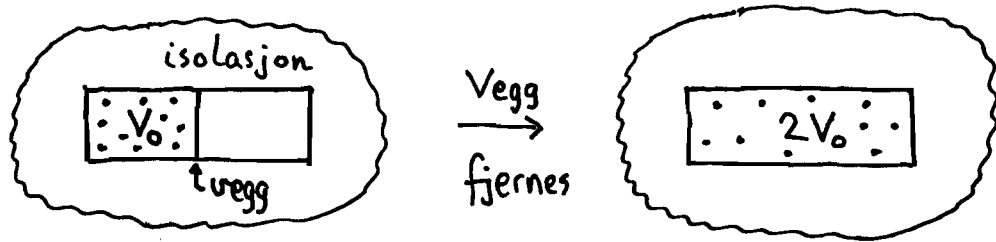
$$dQ = T dS = 0 \quad (\text{hele veien})$$

$$\Rightarrow dS = 0 \quad (-''-)$$

$$\Rightarrow \Delta S = S_B - S_A = \underline{\underline{0}}$$

Dvs: $S = \text{konstant}$ i rev. adiabatisk prosess, som derfor også kalles isentropisk.

Eks 2: Hva er ΔS for spontan utvidelse av ideell gass i varmeisolerert system?



Løsn 2: Her er $\Delta Q = 0$, men $\Delta S \neq \Delta Q/T$ fordi prosessen er irreversibel! Vegg fjernes uten at gassen utfører noe arbeid $\Rightarrow \Delta W = 0$. Da gir 1. lov $\Delta U = 0$, og siden $U = U(T)$ for ideell gass, skjer utvidelsen ved konstant T . Dermed:

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T} dV = C_v \frac{dT}{T} + \frac{Nk_B}{V} dV \stackrel{dT=0}{=} Nk_B \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \Delta S = \int dS = Nk_B \int_{V_0}^{2V_0} \frac{dV}{V} = Nk_B \ln \frac{2V_0}{V_0} = \underline{\underline{Nk_B \ln 2}}$$

Kommentarer:

- Da S er en tilstandsfunksjon, kan vi beregne ΔS for en irreversibel prosess ved å regne på en reversibel prosess. Det holder å kjenne start- og slutt-tilstandene.
- Vi har regnet ut at $\Delta S > 0$ for en irrev. prosess i et termisk isolert system. Dette er et eksempel på prinsippet om entropiens økning, som holder generelt:

$$\Delta S \geq 0 \text{ for } \underline{\text{alle}} \text{ prosesser i et termisk isolert system}$$

($\Delta S = 0$ for alle reversible prosesser i termisk isolert system)

Mikroskopisk beskrivelse av entropi [YF 20.8; LHL 17.11]

(127)

På Boltzmanns gravstein i Wien: $S = k \log W$

I "vårt" språk: $k \rightarrow k_B$; $\log \rightarrow \ln$; $W \rightarrow \Omega$ [da W er arbeid...]

$$\Rightarrow \boxed{S = k_B \ln \Omega} \quad \text{Boltzmanns prinsipp}$$

Ω = antall ulike mikrotilstander konsistent med gitt makrotilstand

Eks: Spontan utvidelse av ideell gass (som på s. 126).

Løsn: Tenk deg at V_0 deles inn i M små delvolum Δ , slik at hver av de N partiklene har M mulige posisjoner før og $2M$ mulige posisjoner etter utvidelsen fra V_0 til $2V_0$.

Dermed er: $\Omega_{\text{før}} = M^N$, $\Omega_{\text{etter}} = (2M)^N$.

$$\Rightarrow \Delta S = S_{\text{etter}} - S_{\text{før}} = k_B \ln (2M)^N - k_B \ln M^N = k_B \ln 2^N = \underline{\underline{Nk_B \ln 2}}$$

- Samme resultat som med termodynamikk på s. 126.
- "Økt uorden betyr økt entropi"; presist formulert av Boltzmann.
- Naturlige (spontane) prosesser går i en bestemt retning, som tilsvarer at entropien øker.
- 1. og 2. hovedsetning oppsummert: Energi er bevart. Entropien øker.