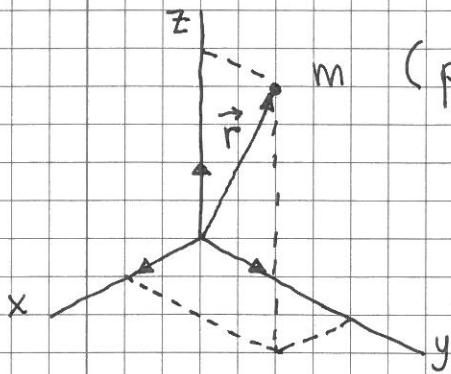




# Kinematikk [YF 2, 3; LL 1]

2

= beskrivelse av bevegelse



$m$  (punktmasse; evt. legemets massesenter, CM)

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

= posisjonen til  $m$  ved tid  $t$

Enhetsvektorer (kartesiske):

$$\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$$

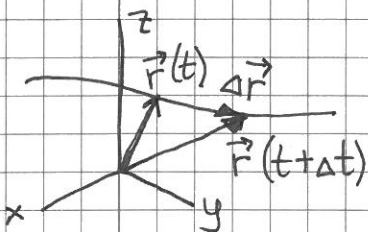
$$|\hat{x}| = |\hat{y}| = |\hat{z}| = 1$$

$$[\hat{x}] = [\hat{y}] = [\hat{z}] = 1 \quad (\text{dimensjonsløse})$$

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = \hat{y} \cdot \hat{y} = \hat{z} \cdot \hat{z} = 1$$

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{z} = \dots = 0$$

Banen  $\vec{r}(t)$  beskriver bevegelsen til  $m$ :



$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

= forflytning i løpet av  $\Delta t$

Hastighet = forflytning pr tidsenhet:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \quad (\text{vanlig notasjon})$$

$\Delta t > 0$  er skalar  $\Rightarrow \vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$ , dvs tangentiell til banen



Akselerasjon = hastighetsendring pr tidsenhet :

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Kartesiske komponenter :

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \\ &= \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y} + \dot{z} \hat{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_x = \dot{x} \quad osv$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} &= a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z} \\ &= \ddot{x} \hat{x} + \ddot{y} \hat{y} + \ddot{z} \hat{z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_x = \ddot{x} = \dot{v}_x \quad osv$$

Finnes  $\vec{r}$  fra  $\vec{v}$  og  $\vec{v}$  fra  $\vec{a}$  med integrasjon :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow d\vec{r} = \vec{v} dt \Rightarrow \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r} = \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow d\vec{v} = \vec{a} dt$$

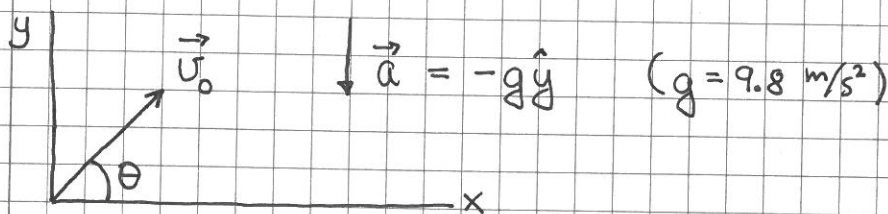
$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt}$$

Hvis  $\vec{a}$  er konstant, og initialbetingelsene er  $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ ,  $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$  :

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t \quad ; \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

Eks: Skrått kast, med  $\vec{r}(0) = 0$  og  $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$

(4)

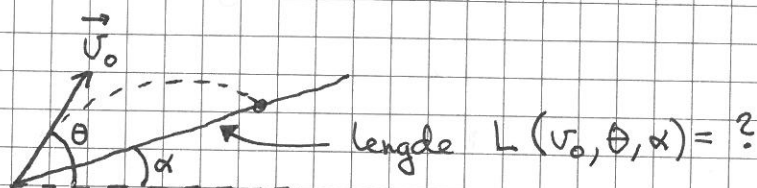


$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = \underbrace{(v_0 t \cos \theta)}_{x(t)} \hat{x} + \underbrace{(v_0 t \sin \theta - \frac{1}{2} g t^2)}_{y(t)} \hat{y}$$

Eliminer  $t$  og vis at banen  $y(x)$  blir en parabel.

Øving 1:

- Kast i motbakke



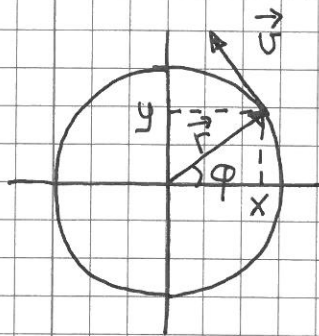
- Gitt  $a(v)$ , hva blir  $v(t)$  (med kjent  $v(0) = v_0$ ) ?

Tips:  $dt = dv/a(v) \Rightarrow t = \int_{v_0}^v dv/a(v)$

# Sirkelberegelse

[YF 3.4; LL 1.7, 1.8]

(5)



⇒ Ofte lurt med polarkoordinater  $(r, \varphi)$ , fordi  $r =$  afstand fra origo er konstant.  
 $\varphi =$  vinkel mellem x-aksen og  $\vec{r}$   
( $\varphi > 0$  mot klokka)

Ser fra figuren:

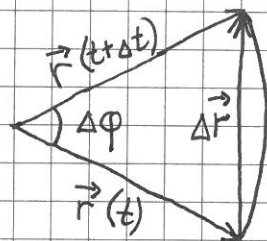
$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad y/x = \tan \varphi, \quad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{r} = r \cos \varphi \hat{x} + r \sin \varphi \hat{y}$$

Vinkel = buelengde / radius:

$$\Delta \varphi = \Delta s / r$$

$$[\varphi] = \text{m/m} = 1$$



$\Delta s =$  lengden av sirkelbueelement

Vinkelhastighet = vinkelendring pr tidsenhet:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad [\omega] = 1/s = s^{-1}$$

Når  $\Delta t \rightarrow 0$  og  $\Delta \varphi \rightarrow 0$ , ser vi at  $\Delta r (= |\Delta \vec{r}|) \rightarrow \Delta s = r \Delta \varphi$ , og at  $\Delta \vec{r} \perp \vec{r}$ .

$$\text{Dermed: } \underline{\vec{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r \Delta \varphi}{\Delta t} = r \frac{d\varphi}{dt} = \underline{r \omega}$$

Retning:  $\vec{v} \parallel \Delta \vec{r}$  og  $\Delta \vec{r} \perp \vec{r}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} \perp \vec{r} \text{ ved sirkelberegelse}}$$

Uniform sirkelbevegelse hvis  $\omega$  (og  $v$ ) er konstant

⑥

$$\Rightarrow \varphi(t) = \omega t \quad (\text{antar } \varphi(0) = 0)$$

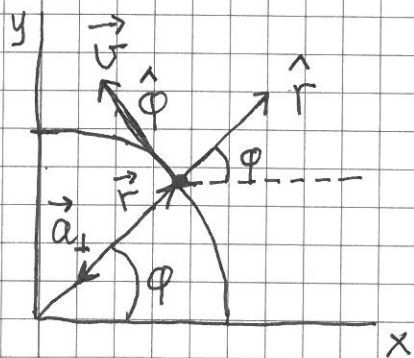
$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \overbrace{r \cos \omega t}^{x(t)} \hat{x} + \overbrace{r \sin \omega t}^{y(t)} \hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = -r\omega \sin \omega t \hat{x} + r\omega \cos \omega t \hat{y}$$

$$\vec{a}_\perp(t) = -r\omega^2 \cos \omega t \hat{x} - r\omega^2 \sin \omega t \hat{y} = -\omega^2 \vec{r}(t)$$

Sentripetalakselerasjon:

$$\vec{a}_\perp = -\omega^2 \vec{r}$$



$$\vec{r} = r \hat{r}, \quad \vec{v} = v \hat{\phi}$$

$$\vec{a}_\perp = -\omega^2 r \hat{r} = -\frac{v^2}{r} \hat{r}$$

$$\hat{r} = \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi$$

$$\hat{\phi} = -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi$$

Baneakselerasjon:

$$\bullet \quad a_{\parallel} = \dot{v} = \frac{d}{dt}(\omega r) = r \dot{\omega}$$

$$\text{Total akselerasjon: } \vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_{\parallel} = -\omega^2 r \hat{r} + r \dot{\omega} \hat{\phi}$$

$$\text{Vinkelakselerasjon: } \alpha = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} \quad [\alpha] = s^{-2}$$

$$\text{Periode (omløpstid): } T \quad [T] = s$$

$$\text{Frekvens: } f = \# \text{ omlop pr tidsenhet} \quad [f] = \text{Hz} (= s^{-1})$$

$$\Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T}, \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$



## Newtons lover

[ YF 4,5 ; LL 2,3 ]

(7)

N1:

$$\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \text{konst.}$$

[ Hvis netto ytre kraft  $\vec{F} = 0$  på et legeme, forblir det i ro eller i rettlinjet bevegelse med konstant hastighet  $\vec{v}$  ]

N2:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

[ Et legemes akselerasjon er proporsjonal med netto ytre kraft  $\vec{F}$ ,  
 $\vec{a} = \vec{F}/m$  ;  $m =$  legemets masse ]

N3:

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$$

[ Hvis A virker på B med kraft  $\vec{F}_{AB}$ , virker B på A med kraft  $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$  ] [ A og B vekselvirker ]

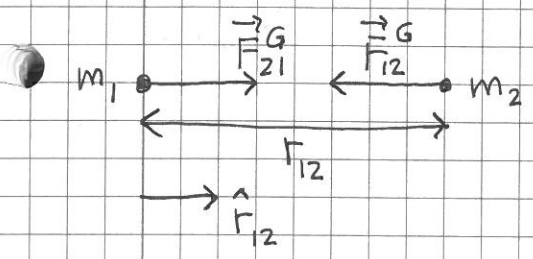
Enhet:  $[F] = \text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2 = \text{N}$  (newton)

## Fundamentale krefter [ YF 5.5; LL 2.1 ]

Viktig i TFY4106 er gravitasjonskrefter (svak tiltrekning mellom masser) og elektromagnetiske krefter (tiltrekning eller frastøting mellom ladninger).

[ Dessuten kjernekrefter, svake og sterke, med rekkevidde hhv ca  $10^{-18}$  og  $10^{-15}$  m ; beskriver hhv radioaktive prosesser og at kjernepartikler holdes sammen ]

Newtons gravitasjonslov:

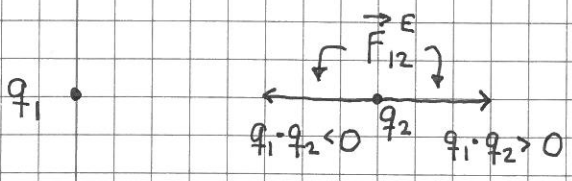


$$\vec{F}_{12}^G = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$G \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

(gravitasjonskonstanten)

Coulombs lov:



$$\vec{F}_{12}^E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

$$[q] = C = A \cdot s \text{ (coulomb)}$$

$$\epsilon_0 \approx 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$$

(vakuumpermittiviteten)

For to elektroner, med  $q = -e = -1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  og  $m = m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ , er  $|F_E/F_G| \sim 10^{43}$  slik at  $F_G$  kan neglisjeres.

Mellom himmellegemer er  $F_G \gg F_E$ .

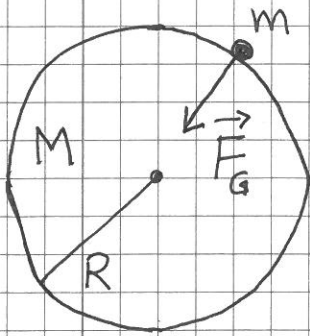
Mellom "dagligdagse" objekter er typisk  $F_E \gg F_G$ , selv med elektrisk nøytrale objekter.

I tillegg kommer  $F_G$  fra jorda.

Dvs: Både  $F_E$  og  $F_G$  styrer hverdagen på jorda.

# Tyngde

[ YF 4.4 ; LL 2.5 ]



Kraft på  $m$  fra jorda:  $F_G = G \frac{mM}{R^2} = mg$   
 med

$$g = GM/R^2 \approx 6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} / (6370 \cdot 10^3)^2$$

$$\approx 9.8 \text{ m/s}^2 = \text{tyngdens akselerasjon}$$

[ Kan regne som om hele jordmassen  $M$  var samlet i sentrum! ]

Har "fritt fall" hvis  $F_G$  er enestekraft på  $m$ ; da er

$$mg = ma \quad (N2)$$

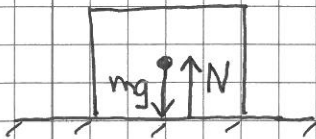
altså

$$a = g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

# Kontaktkrefter

[ YF 4.1 ; LL 3 ]

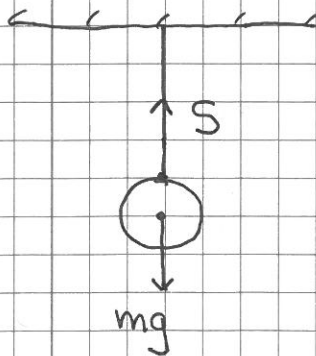
Normalkraft:



$N$  = netto frastøtende coulombkraft fra bordet på klossen

Hvis kloss i ro:  $N = mg$  (pga N1)

Snordrag:

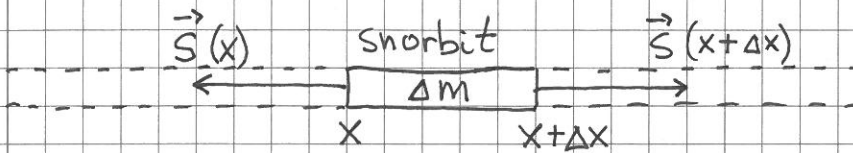


$S$  = netto tiltrekkende coulombkraft fra snora på kule

Hvis kule i ro:  $S = mg$  (N1)

[ Oppg: Forklar N3 i disse to tilfellene ]

Snordraget er ofte konstant:

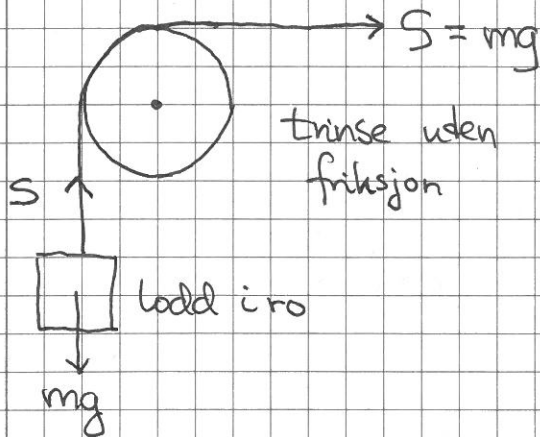


N2:  $\vec{S}(x + \Delta x) + \vec{S}(x) = \Delta m \cdot \vec{a}$  (antar  $\Delta m \cdot g \ll S$ )

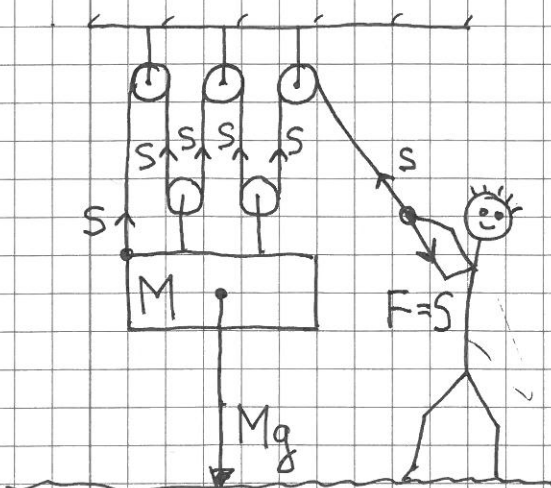
Hvis  $\Delta m \approx 0$  (eller  $\vec{a} = 0$ ), er  $\vec{S}(x + \Delta x) = -\vec{S}(x)$ ,

dos konstant  $S = |\vec{S}|$  i hele snora

Trinser endrer retningen på  $\vec{S}$ :



Talje:



$N1 \Rightarrow 5S = Mg$

$S = Mg/5$



# Friksjon [YF 5.3; LL 3.1]

- Kontaktkrefter (coulombkrefter) rettet mot relativ bevegelse, evt. mot relativ bevegelse som oppnås uten friksjon.

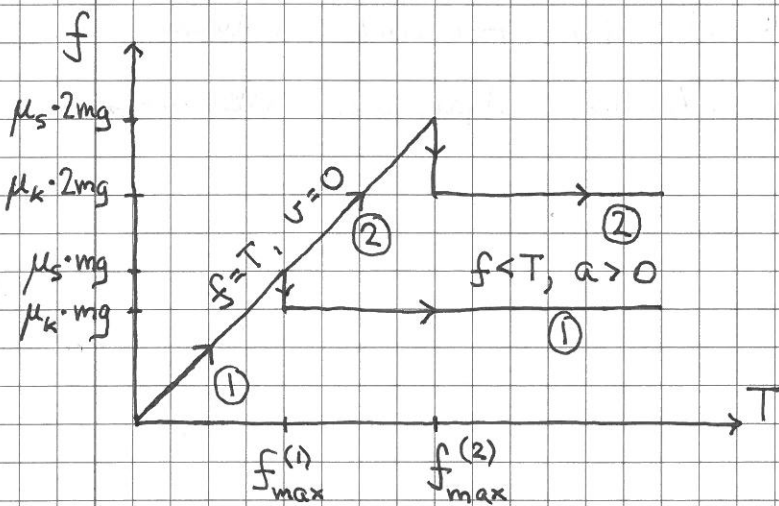
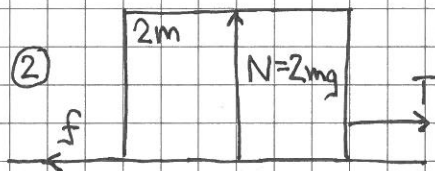
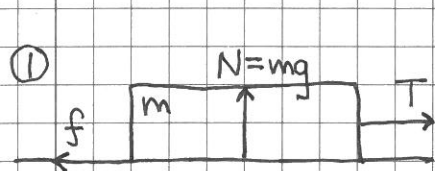
Tørr friksjon:



$T =$  trekk-kraft

$f =$  friksjonskraft fra underlaget på klossen

$N = mg$  (pga N1)



— / — kloss i ro  
 — — — kloss i bevegelse

Statisk friksjon:  $v = 0, f = T, f_{max} = \mu_s N$  ( $f \leq \mu_s N$ )

Kinetisk — " —:  $v > 0, f = \mu_k N, \mu_k < \mu_s$

Ujevnheter i kontaktflatene  $\Rightarrow$  best "grep" i statistisk tilfelle:

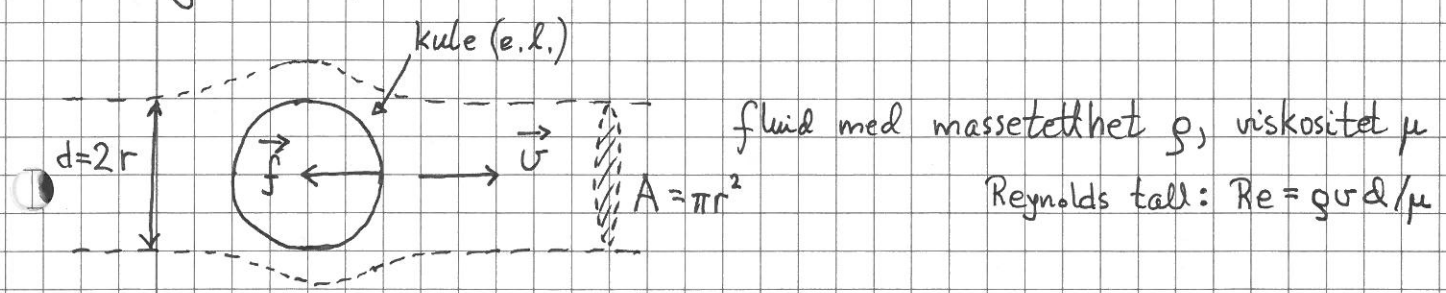


Kloss i bevegelse "flyter" litt oppå  $\Rightarrow \mu_s > \mu_k$

Statisk ( $\mu_s$ ) og kinetisk ( $\mu_k$ ) friksjonskoeffisient, noen tall:

	$\mu_s$	$\mu_k$
Tre mot tre	0.25-0.50	0.2
Gummi mot tørr asfalt	1.0	0.8
—  — våt —  —	0.3	0.25

### Friksjon i fluider [YF 5.3 ; LL 8]



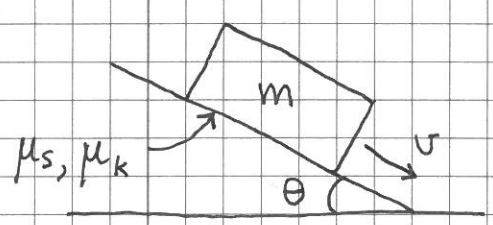
Liten  $U \Rightarrow$  pen, laminær strømning av fluidet omkring et (liten  $Re$ ) symmetrisk objekt,  $\vec{f} = -k\vec{U} = -kU\hat{U} = -6\pi\mu r U\hat{U}$  (kule)

Stor  $U \Rightarrow$  turbulent strømning, (stor  $Re$ )  $\vec{f} \approx -D U^2 \hat{U} = -\frac{1}{2} C_d A \rho U^2 \hat{U}$  ( $A = \pi r^2$ )  
 "drag" -koeffisient

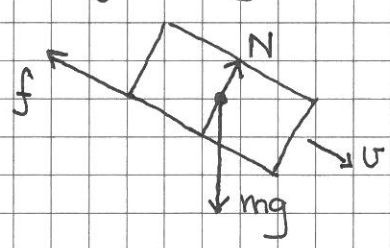
# Problemløsning ; strategi og eksempler [YF5; LL3]

- Finn alle ytre krefter  $\vec{F}_i$  på legemet
- Tegn fritt-legeme-diagram, der omgivelsene erstattes av krefter på legemet ( $m\vec{g}$ ,  $\vec{S}$ ,  $\vec{N}$ ,  $\vec{f}$ , ...)
- Velg hensiktsmessig koordinatsystem. Dekomponer.
- Bruk N2 :  $\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i / m$  (evt. N1 :  $\sum_i \vec{F}_i = 0$ )

Eks: Kloss(er) på skråplan [Øving 2 ; Lab 1]



Fritt-legeme-diagram:



Koordinatsystem:



$$N_{\perp} = N, \quad N_{\parallel} = 0, \quad f_{\parallel} = f, \quad f_{\perp} = 0$$

$$(mg)_{\perp} = mg \cos \theta, \quad (mg)_{\parallel} = mg \sin \theta$$

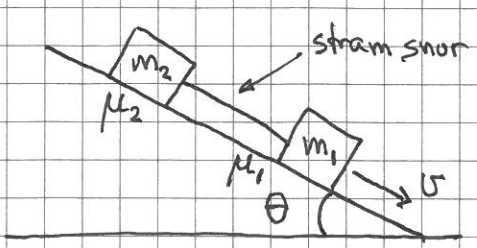
~~N1, \perp~~ :  $N - mg \cos \theta = 0$

$$N2, \parallel : mg \sin \theta - f = ma = m \, dv/dt$$

$$\text{Statisk (} v=0 \text{): } f \leq \mu_s N$$

$$\text{Kinatisk (} v \neq 0 \text{): } f = \mu_k N$$

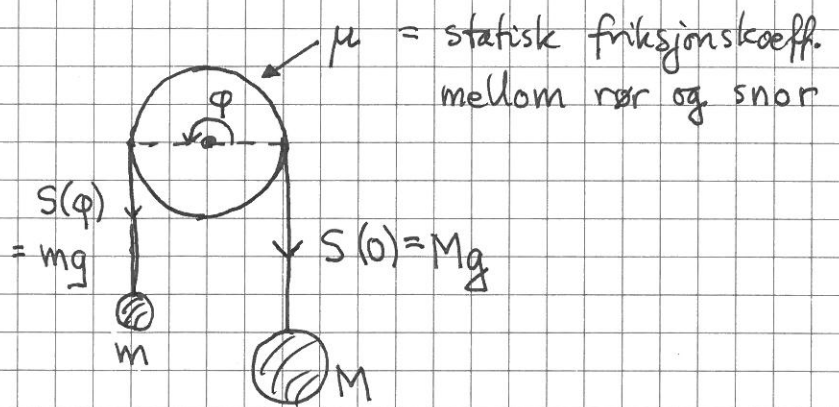
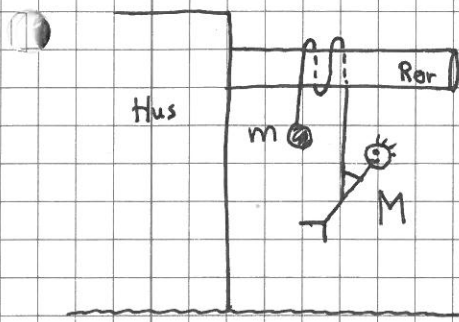
Lab 1 : (Øv.2)



Finn  $\theta$  som gir konstant  $v$  !

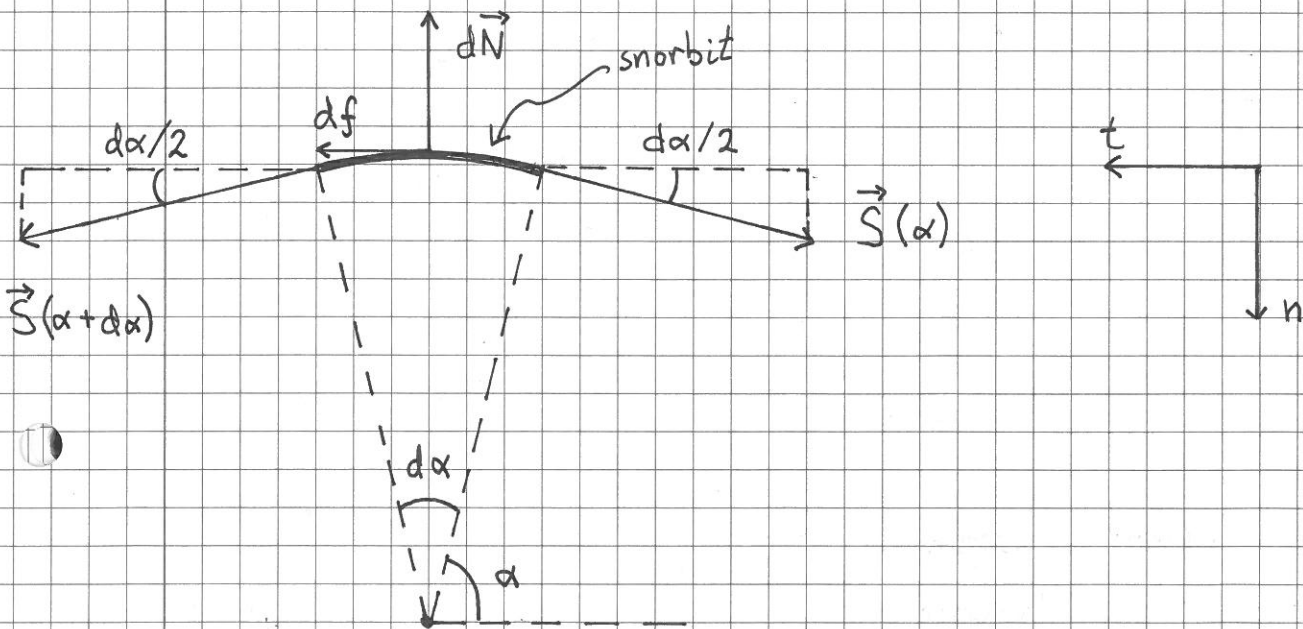
# Eks: Snorfriksjon

[A. Wahl, Med livet som innsats (youtube)]



Bestem minste  $m$  som holder  $M$  oppe når det er kontakt mellom rør og snor over en vinkel  $\varphi$ . (Her:  $\varphi = (1+2N)\pi$ )

$S$  er ikke konstant  $\Rightarrow$  Vi ser på liten snorbit:



- $\vec{S}$  = krefter på snorbit fra resten av snora
- $d\vec{N}$  = normalkraft fra rør på snorbit
- $d\vec{f}$  = friksjonskraft ————— ;
- minste mulige  $m$  når  $df = \mu dN$

Snorbit i ro  $\Rightarrow \vec{S}(\alpha+dx) + \vec{S}(\alpha) + d\vec{N} + d\vec{f} = 0$



Dekomponerer tangentielt og normalt snorbitten:

$$(t) \quad S(\alpha+d\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} - S(\alpha) \cos \frac{d\alpha}{2} + df = 0$$

$$(n) \quad S(\alpha+d\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} + S(\alpha) \sin \frac{d\alpha}{2} - dN = 0$$

Når  $d\alpha \ll 1$ , er  $\cos \frac{d\alpha}{2} \approx 1$  og  $\sin \frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$ .

Dessuten:

$$S(\alpha+d\alpha) - S(\alpha) = dS, \quad S(\alpha+d\alpha) + S(\alpha) = 2S, \quad df = \mu dN$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} (t) \quad dS = -\mu dN \\ (n) \quad S d\alpha = dN \end{array} \right\} \begin{array}{l} (t)/(n) \text{ gir} \\ dS/S = -\mu d\alpha \end{array}$$

Må integrere, fra  $\alpha=0$  til  $\alpha=\varphi = (1+2N)\pi$ , for å finne  $m/M$ :

$$\int_{S(0)}^{S(\varphi)} \frac{dS}{S} = - \int_0^{\varphi} \mu d\alpha \Rightarrow \ln S(\varphi) - \ln S(0) = -\mu\varphi$$

$$\Rightarrow \ln \frac{S(\varphi)}{S(0)} = \ln \frac{mg}{Mg} = \ln \frac{m}{M} = -\mu\varphi = -\mu(1+2N)\pi$$

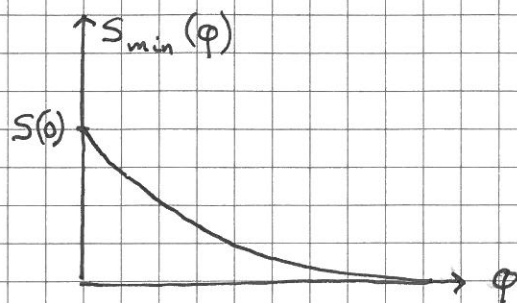
$$\Rightarrow \underline{\underline{\frac{m}{M} = e^{-\mu(1+2N)\pi}}} \quad \left[ \text{Mer generelt: } S_{\min}(\varphi) = S(0)e^{-\mu\varphi} \right]$$

Eks: Plastrør og nylonenor:  $\mu \approx 0.17$  [Øving 3]

$$N=3 \Rightarrow \exp[-0.17 \cdot 7\pi] \approx 0.02$$

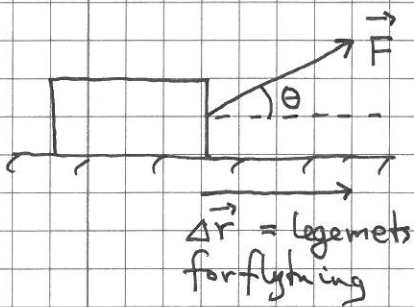
$$M=500g \Rightarrow m \approx 10g$$

(som stemmer bra med eksperimentet!)



# Arbeid og energi [YF 6,7 ; LL 4]

## Arbeid [YF 6.1-6.3 ; LL 4.1]

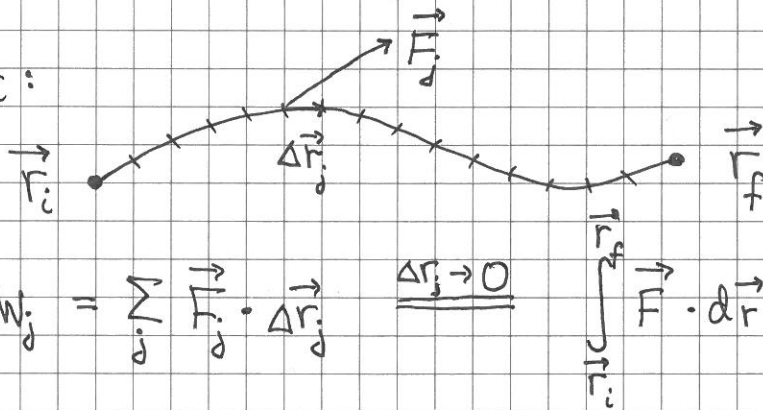


$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

= arbeid utført av ytre kraft  $\vec{F}$  på legemet

Enhet:  $[W] = N \cdot m = J$  (joule)

Generelt:



$$W = \sum_j \Delta W_j = \sum_j \vec{F}_j \cdot \Delta \vec{r}_j \quad \underline{\underline{\Delta r_j \rightarrow 0}} \quad \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

= arbeid utført av  $\vec{F}$  ved forflytning fra  $\vec{r}_i$  til  $\vec{r}_f$

## Effekt [YF 6.4 ; LL 4.1]

effekt = arbeid (energi) pr tidsenhet

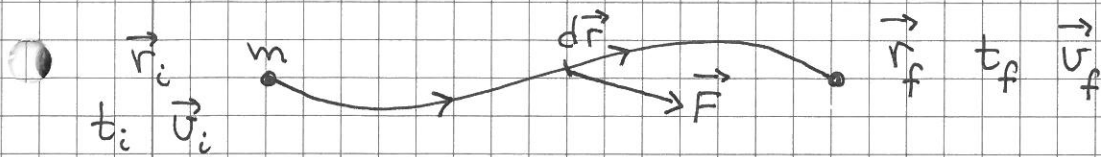
$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$[P] = J/s = W \text{ (watt)}$$

Eks:  $P = 1 \text{ kW}$  gir årlig energiforbruk  $10^3 \text{ W} \cdot 366 \cdot 24 \text{ h} =$   
 $= 8.784 \text{ MWh} (= 3.16 \cdot 10^{10} \text{ J}) \hat{=} 7352 \text{ kr i 2014}$   
(inkl nettleie og avgifter)

# Kinetisk energi [YF 6.2; LL 4.2]

17



$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{N_2}{=} \int_{t_i}^{t_f} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = m \int_{\vec{v}_i}^{\vec{v}_f} \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$d(v^2) = d(\vec{v} \cdot \vec{v}) = d\vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{v} = 2\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m \int_{v_i^2}^{v_f^2} d(v^2) = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Kinetisk energi:  $K = \frac{1}{2} m v^2$

$$\Rightarrow W = K_f - K_i = \Delta K$$

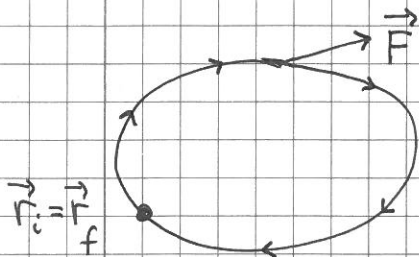
Dvs: Arbeid  $W$  utført på legeme med masse  $m$  tilsvarer endringen  $\Delta K$  i legemets kinetiske energi,  $K = \frac{1}{2} m v^2$ .

# Konservativ kraft

[YF 7.3; LL 4.4]

18

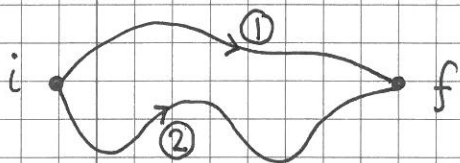
- I et konservativt system tapes ikke mekanisk energi til andre energiformer (f.eks. varme).



Hvis  $\vec{F}$  er konservativ, er  $K_f = K_i$ ,  
dvs  $W = \Delta K = 0$ ,

dvs  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$  ( $\oint$  = integral rundt lukket kurve)

- Da er arbeidet  $W$  utført av  $\vec{F}$  uavhengig av veien:



$$W_1 = \int_{\text{①}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{②}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W_2$$

# Potensiell energi [YF 7.1-7.4; LL 4.3-4.4]

Hvis  $\vec{F}$  er konservativ, er

$$U(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

potensiell energi i  $\vec{r}$ , med valget  $U(\vec{r}_0) = 0$ .

Merk: Bare forskjeller i pot. energi har fysisk betydning.

[Matte 2:  $\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{F} = 0$

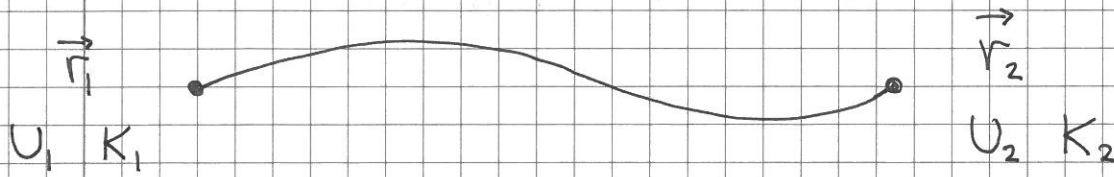
$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \vec{F} = -\nabla U$  ]



# Mekanisk energibevarelse [YF 7.1-7.3; LL 4.5]

(19)

• Anta et konservativt system.



$$U_1 - U_2 = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{vilkårlig } \vec{r}_0)$$

$$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = W = K_2 - K_1$$

$$\Rightarrow \boxed{K_1 + U_1 = K_2 + U_2}$$

Dvs: Total mekanisk energi,

$$E = K + U$$

er konstant (bevart)

i et konservativt system.

Tyngdekraften er konservativ.

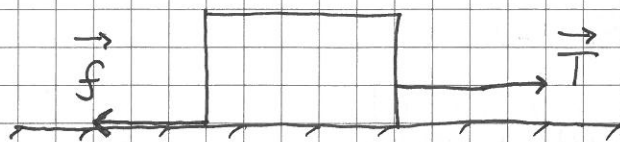
Friksjonskrefter er ikke konservative.

(Men coulombkraften er konservativ!)

# Friksjonsarbeid

[YF 7.3; LL 4.5]

(20)

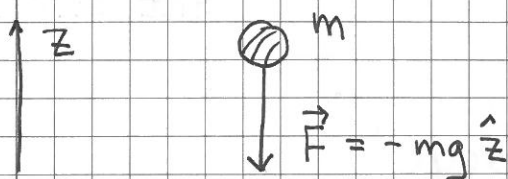


$$W_{fr} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \quad \text{fordi } \vec{f} \text{ alltid rettet mot } d\vec{r}$$

⇒ mekanisk energi omdannes til varme (og lyd)

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \text{ alltid} \Rightarrow \oint \vec{f} \cdot d\vec{r} < 0 \text{ alltid}$$
$$\Rightarrow \vec{f} \text{ er ikke konservativ}$$

Eks 1: Fall i tyngdefeltet (bordtennisball)



- Anta  $U(0) = 0$  og  $v(0) = 0$
- Finn  $U(z)$  og  $v(z)$  ( $z < 0$ )
- Vurder effekt av luftmotstand

Løsn: Neglisjerer først luftmotstand ( $\vec{f} = -\text{Du}^2 \hat{z} = \text{Du}^2 \hat{z}$ )

$$U(z) = - \int_0^z \underbrace{(-mg\hat{z})}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{(\hat{z} dz)}_{d\vec{r}} = \underline{\underline{mgz}}$$

Konservativ  $\vec{F} \Rightarrow E = U + K$  er bevart

$$\Rightarrow U(z) + K(z) = U(0) + K(0) = 0$$

$$\Rightarrow mgz + mv(z)^2/2 = 0$$

$$\Rightarrow v(z) = \underline{\underline{\sqrt{-2gz}}} \quad (z < 0)$$

Med luftmotstand,  $\vec{f} = -Dv^2 \hat{v}$ , med

(21)

$$D = \frac{1}{2} \rho A c_d \approx \frac{1}{2} \cdot 0.5 \cdot \pi \cdot (0.020 \text{ m})^2 \cdot 1.3 \text{ kg/m}^3 \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}$$

Maksimal hastighet ("terminalhastighet") når

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow D \cdot v_t^2 = mg \Rightarrow v_t = \sqrt{mg/D}$$

Bordtennisball:  $m = 2.7 \text{ g} \Rightarrow v_t = \sqrt{0.0027 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} / 4 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}}$   
 $\approx \underline{8 \text{ m/s}}$

Anta at ballen slippes 5 m over bakken og at  $v = v_t$  på bakken. ( $v_{fn} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 5} \text{ m/s} \approx 10 \text{ m/s}$ )

Bestem friksjonsarbeidet  $|W_f|$ .

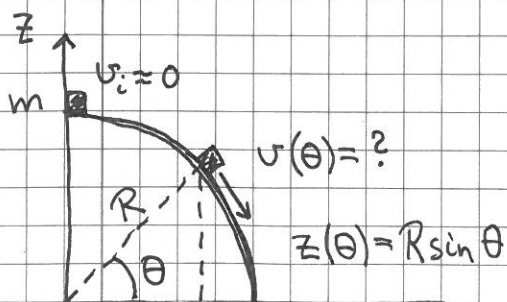
Løsn:  $|W_f| = E_i - E_f$  (energien er bevart totalt sett!)

$$= mgh - \frac{1}{2} m v_t^2$$

$$= 0.0027 \text{ kg} \cdot \left( 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ m} - \frac{1}{2} \cdot 8^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} \right)$$

$$= \underline{0.046 \text{ J}} \quad (\approx 35\% \text{ av } E_i)$$

Eks 2: Glatt kuppel



Løsning: Anta  $U(0) = 0 \Rightarrow E = mgR$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v(\theta)^2 + mgz(\theta) = mgR$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{v(\theta) = \sqrt{2gR(1 - \sin \theta)}}}$$

Med økende kompleksitet:

- Hvor mistes kontakten med underlaget? [Øv 3/1d]
- Hvordan ta hensyn til friksjon?
- Hva med objekter som ruller og "slurer"?

# Impuls [YF 8 ; LL 5]

= bevegelsesmengde = (linear) momentum

$$N2: \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \quad \text{når } m = \text{konstant}$$

impuls = masse  $\cdot$  hastighet

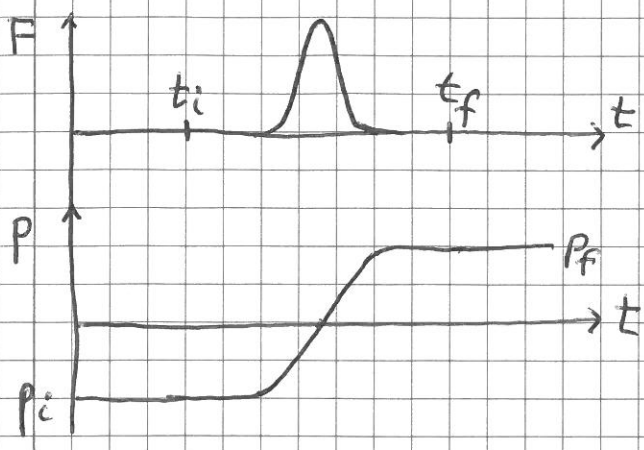
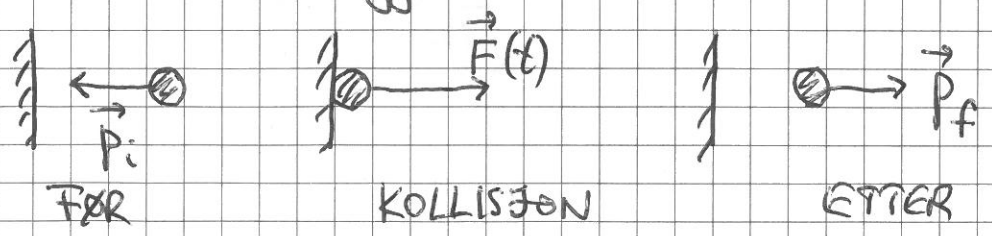
$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$[p] = \text{kg m/s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = d\vec{p}/dt} \quad N2$$

Impulsbevarelse: Hvis  $\sum \vec{F}_{\text{ytre}} = 0$ , er legemets (evt systemets) impuls bevart

Eks: Ball mot vegg



Ballens impulsendring:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

$$= \int_{p_i}^{p_f} d\vec{p}$$

$$= \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt$$



# Kollisjoner [YF 8.3, 8.4 ; LL 5.3]

23

Elastisk støt:  $\Delta K = 0$  ; mek. energi bevart

Uelastisk " :  $\Delta K < 0$  ; " " ikke bevart

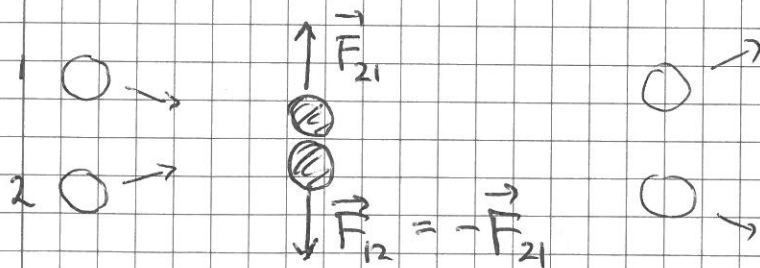
[Typisk kontinjerlig støt  $\Rightarrow \Delta U = 0$ ]

Fullstendig uelastisk støt:

Sammenhengende legemer med felles hastighet etter kollisjonen; gir max energitap  $|\Delta K|$

Tapt mek energi  $\rightarrow$  deformasjon, varme, lyd

Indre krefter endrer ikke systemets totale impuls:



$$N2 \text{ og } N3 \Rightarrow \vec{F}_{21} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\frac{d\vec{p}_2}{dt} = -\vec{F}_{12}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \frac{d}{dt} \vec{p}_{\text{total}} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{\text{total}} = \text{konst.}$$

$\Rightarrow$  Hvis  $\vec{F}_{\text{ytre}}$  kan neglisjeres, er  $\vec{p}_{\text{total}}$  bevart

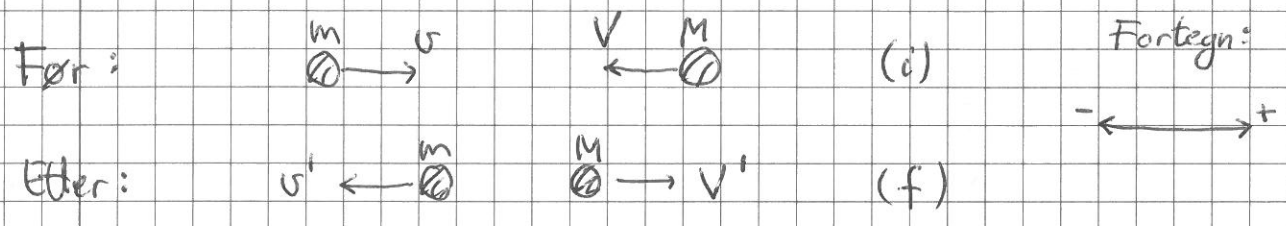
Ofte store krefter i sving i kontrante kollisjoner.

Eks: Bordtennisball,  $u_i = -10 \text{ m/s}$ ,  $u_f = +30 \text{ m/s}$ ,  $\Delta t = 1 \text{ ms}$

$$\Rightarrow F_{\text{slag}} / G \approx \frac{m \Delta v / \Delta t}{mg} = \frac{40 \text{ m/s} / 10^{-3} \text{ s}}{10 \text{ m/s}^2} = \underline{4000}$$

$\Rightarrow$  Held OK å se bort fra G (ytre kraft!) i slaget!

Sentralt støt [YF 8.2-8.4; LL 5.3]



$$\Delta p = 0 \Rightarrow \underbrace{mu + MV}_{P_i} = \underbrace{mu' + MV'}_{P_f}$$

(a) Fullstendig uelastisk:  $u' = V' = \frac{mu + MV}{m + M}$

(b) Delvis uelastisk: Har 1 lign. ( $\Delta p = 0$ ) for 2 ukjente ( $u', V'$ )  $\Rightarrow$  Trenger 1 opplysning til.

(c) Elastisk,  $\Delta K = 0$ :  $\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}mu'^2 + \frac{1}{2}MV'^2$

$$\Rightarrow m(u + u')(u - u') = M(V' + V)(V' - V) \quad (1)$$

$$\Delta p = 0 \Rightarrow m(u - u') = M(V' - V) \quad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow u + u' = V' + V \quad (3)$$

$$M \cdot (3) - (2) \text{ gir}$$

(25)

$$v' = \frac{M}{m+M} \left( 2v + v \frac{m-M}{M} \right)$$

og dermed (pga "symmetri"  $m \leftrightarrow M, v \leftrightarrow V$ )

$$V' = \frac{m}{M+m} \left( 2v + V \frac{M-m}{m} \right)$$

Eks: Ball mot vegg, elastisk støt



Løsn:

$$v' = \frac{M}{m+M} \left( 0 + v \frac{m-M}{M} \right) \approx \frac{M}{M} \cdot v \cdot \left( -\frac{M}{M} \right) = -v$$

$$V' = \frac{m}{M+m} (2v + 0) \approx \frac{m}{M} \cdot 2v \approx 0$$

Impuls:  $p = mv, P = MV = 0, p' = mv' = -mv,$

$$P' = MV' \approx M \cdot \frac{m}{M} \cdot 2v = 2mv$$

$$\Rightarrow \Delta p = (p' + P') - (p + P) = -mv + 2mv - mv = \underline{\underline{0}} \quad (\text{OK})$$

Energi:  $K_m = \frac{1}{2}mv^2, K_M = 0, K_m' = \frac{1}{2}mv'^2,$

$$K_M' = \frac{1}{2}MV'^2 = \frac{1}{2}M \left( \frac{m}{M} 2v \right)^2 = 2 \frac{m}{M} mv^2 \approx 0$$

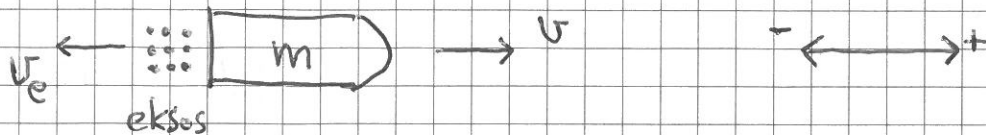
$$\Rightarrow \Delta K = (K_m' + K_M') - (K_m + K_M)$$

$$= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv^2 = \underline{\underline{0}} \quad (\text{OK})$$

# Rakettprinsipp

[YF 8.6 ; LL 5.4]

26



$\frac{dm}{dt}$  = raketten's masseendring pr tidsenhet ;  $\frac{dm}{dt} < 0$

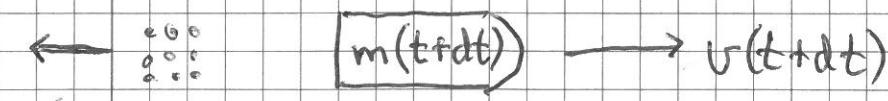
$u$  = eksosens hastighet relativt raketten ;  $u < 0$

$v_e$  =  et fast referansesystem

$$\Rightarrow v_e = u + v$$

Anta først  $F_{\text{ytre}} = 0$  og bruk impulsbevarelse mellom tid  $t$  og  $t+dt$  til å finne sammenheng mellom  $u$  og  $dm/dt$ , og raketten's akselerasjon  $a = dv/dt$  :


$$p(t) = m(t)v(t)$$


$$dm_e = -dm$$

$$\begin{aligned} p(t+dt) &= m(t+dt) \cdot v(t+dt) + dm_e \cdot v_e(t+dt) \\ &= [m(t) + dm] \cdot [v(t) + dv] - dm \cdot [u + v(t) + dv] \\ &= p(t) + \underbrace{m(t)dv - u dm}_{= 0} \quad (\text{når } p(t+dt) = p(t)) \end{aligned}$$



$$\Rightarrow m \cdot \frac{dv}{dt} = u \cdot \frac{dm}{dt} = u \dot{m}$$

(27)

dvs  $F_{\text{skjuv}} = m \cdot a$  med  $F_{\text{skjuv}} = u \dot{m} > 0$

I tyngdefeltet:



$$F_{\text{ytre}} = -mg$$

$\Rightarrow$  N2 for (rest-)raketten blir  $F = ma$   
med total kraft

$$F = F_{\text{skjuv}} + F_{\text{ytre}} = u \dot{m} - mg$$

[Ør. 4 / oppg 3:  $m \frac{dv}{dt} = u \frac{dm}{dt} - mg \Rightarrow \int dv = u \int \frac{dm}{m} - g \int dt$  etc.]

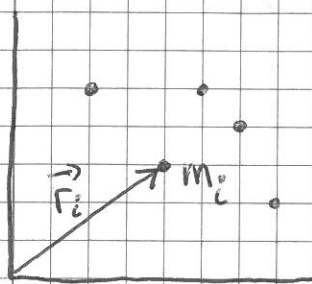
Til nå: I reelle punktmasser.

I neste omgang: Partikkelsystemer. Stive legemer.

# Massecenter [YF 8.5, oppg 8.115+116; LL 5.6, 5.8, 6.1]

(28)

(= tyngdepunkt hvis  $g = \text{konstant}$  i hele systemet)



Massecenter (CM) for  $N$  punktmasser

$m_1, m_2, \dots, m_N$  i pos.  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ :

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\text{Total masse: } M = \sum_i m_i$$

Kontinuerlig massefordeling:  $m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} dm$  (masseelement)

$$\Rightarrow \vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} dm ; M = \int dm$$

↑ integral over der vi har masse

Må typisk uttrykke  $dm$  ved koordinater:

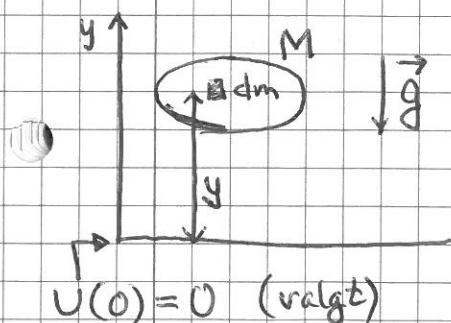
$$dm = \rho dV \text{ (3D)}, dm = \sigma dA \text{ (2D)}, dm = \lambda dl \text{ (1D)}$$

$\rho, \sigma, \lambda = \text{masse pr hvr volum-, flate-, lengdeenhet}$

$dV, dA, dl = \text{hvr volum-, flate-, lengdeelement}$

Hvis massen er uniformt fordelt, er  $\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V}$  etc.

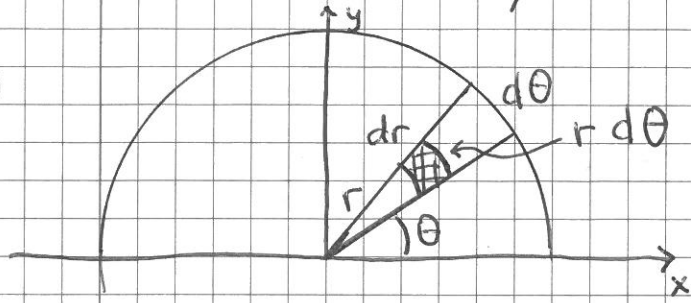
Eks: Pot. energi i tyngdefeltet (antar  $g = \text{konstant}$ )



$$U = \int dm gh = \int gy dm = g \int y dm = g M Y_{cm}$$

Dvs: Total  $U$  som om hele massen  $M = \int dm$  er samlet i høyden  $Y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm$ , f.eks. i  $\vec{R}_{cm}$

Eks: Halvsirkulær tynn skive, radius R



$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A}$$

$$A = \pi R^2 / 2, \quad dA = dr \cdot r d\theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$X_{cm} = 0 \text{ pga symmetri} \Rightarrow \vec{R}_{cm} = Y_{cm} \hat{y}$$

$$Y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{A} \int y dA$$

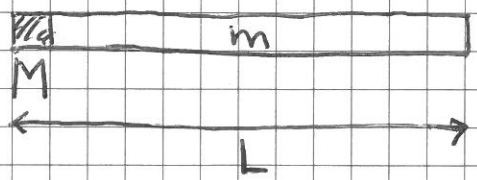
$$= \frac{2}{\pi R^2} \int_{r=0}^R \int_{\theta=0}^{\pi} r \sin \theta \cdot r d\theta dr$$

$$= \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{3} R^3 \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} (-\cos \theta)}_{=2}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4}{3\pi} R}} \approx 0.42 R$$

[Vis at  $Y_{cm} = 2R/\pi$  for bølge (1D)  
og  $Y_{cm} = 3R/8$  for halvkule (3D)]

Eks: Rør med lite lodd i enden



$$m = 165g$$

$$M = 305g$$

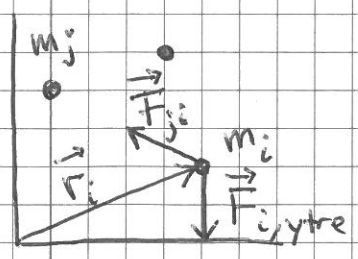
$$X_{cm} = \frac{1}{m+M} \left\{ M \cdot 0 + \int_0^L x dm \right\} = \frac{1}{m+M} \int_0^L x m \frac{dx}{L} = \underline{\underline{\frac{m}{2(m+M)} L}}$$

$$= \frac{165}{940} L \approx \underline{\underline{0.18 L}}$$



# Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5; LL 5.8]

- Exp. (kast) viser at ~~CM~~ CM beveger seg som punktmasse i CM! (Parabel, se s. 4)



N punktmasser,  $\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$ ,  $M = \sum_i m_i$

N2 for  $m_i$ :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

total ytre kraft på  $m_i$

total indre kraft på  $m_i$

Legger sammen N2 for alle  $i = 1, 2, \dots, N$ :

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,ytre}}_{\substack{\text{total ytre kraft} \\ \vec{F}_{ytre} \text{ på systemet}}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\substack{= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} + \dots + \vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N} \\ = 0}}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_i m_i \vec{r}_i \right) = \frac{d^2}{dt^2} (M \vec{R}_{CM}) = M \ddot{\vec{R}}_{CM}$$

Konklusjon:  $M \ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}$

CM beveger seg som om hele M er samlet i CM og utsettes for summen av alle ytre krefter på systemet,  $\vec{F}_{ytre}$

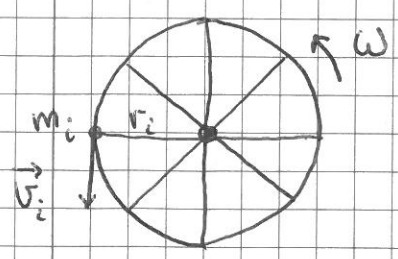
I tillegg kommer rotasjon om CM og vibrasjon om CM.



# ROTASJON [YF 9,10 ; LL 6 (5)]

## • Innledende observasjoner:

### • Ren rotasjon (hjul)



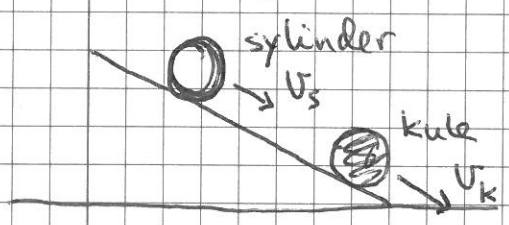
$$CM \Rightarrow i \text{ ro} \Rightarrow K_{\text{trans}} = \frac{1}{2} M R_{CM}^2 \dot{\omega}^2 = 0$$

men  $K_{\text{rot}} \neq 0$

$$\text{Total impuls } \vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$$

men dreieimpulsen  $\neq 0$

### • Rulling



Hvorfor oppstår rotasjon?

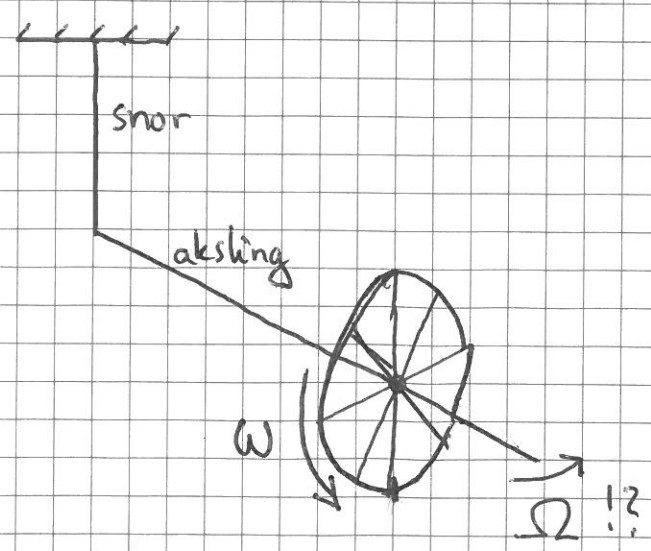
Hvor angreper kreftene?

Må ha dreiemoment!

Hvorfor blir  $v_k > v_s$ ?

Har vi fiksjon her?

### • Komplex dynamikk



Gyroskop.  
Preesjon

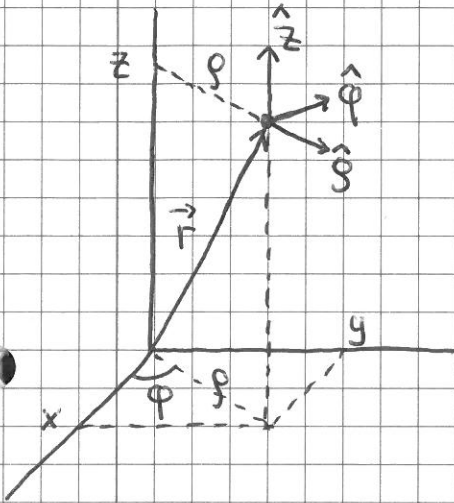
# Sirkelbevegelse [YF 9.1-9.3; LL 1.8]

(32)

● Generalisering av s. 5-6.

Anta rotasjon om z-aksen

⇒ Bruker sylinderkoordin. (= polarkoord. + z)



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

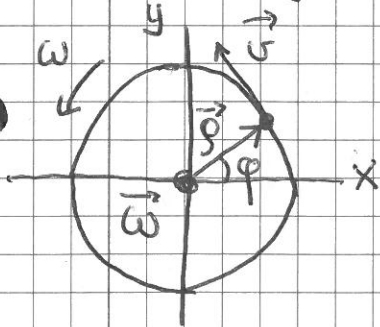
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \varphi = y/x$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

Bruker vinkelhastigheten som vektor til å "markere" rot.aksen:

$$\omega \rightarrow \vec{\omega} = \omega\hat{z} = \omega\hat{\omega}$$

Sett ned langs z-aksen:



$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{\rho d\varphi}{dt} \hat{\varphi} = \rho \omega \hat{\varphi}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z}, \quad \vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$$

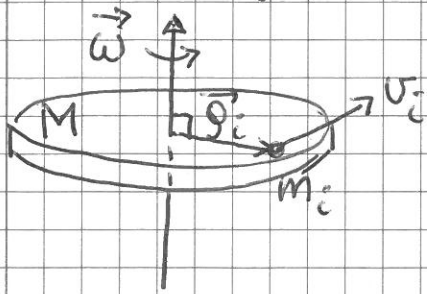
(ut av planet)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}}$$

Retning:  $\hat{\varphi} = \hat{z} \times \hat{\rho}$  OK

Abs.verdi:  $v = \omega \rho$  OK

# Rotasjonsenergi, Tregghetsmoment [YF 9.4; LL 6.4, 6.3] (33)



$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$v_i = \omega r_i$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \text{legemets tregghetsmoment mhp valgt akse (gitt)}$$

Med kontinuertlig massefordeling:

$$m_i \rightarrow \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \rightarrow 0} dm ; \quad \sum_i \rightarrow \int \text{ over legemet}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \int r^2 dm} \quad r = \text{avstand fra akse til masselementet } dm$$

Dermed:  $\boxed{K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2}$  Rotasjonsenergi

## K for stivt legeme [YF 10.3; LL 6.6]

Total beregelse = Translasjon av CM + Rotasjon om akse gjennom CM

$$\Rightarrow \boxed{K = K_{\text{trans}} + K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

$M$  = legemets masse,  $\vec{V} = \vec{v}_{\text{CM}} = \text{CMs hastighet}$

$I_0$  = tregghetsmoment mhp rot. akse gjennom CM


$\vec{\omega}$  = vinkelhastigheten om ———— " ————

[Se eget notat for beviset, som ikke er pensum]

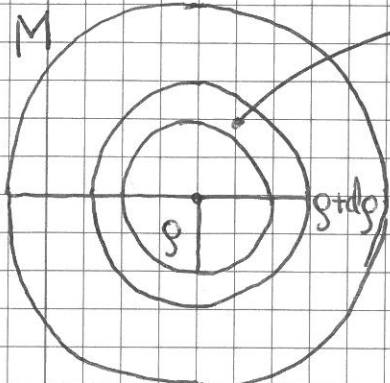
# Eksempler på beregning av I [YF 9.6; LL 6.3]

(34)

• Eks 1: Ring / Hult sylinder

$M$    $I_0 = \int \rho^2 dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$

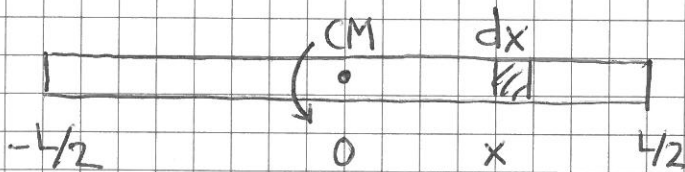
Eks 2: Rund skive / Kompakt sylinder

$M$    $R$   $\rho + d\rho$

$$dI_0 = dm \cdot \rho^2 = M \frac{dA}{A} \rho^2$$
$$= M \frac{2\pi \rho d\rho}{\pi R^2} \rho^2 = \frac{2M}{R^2} \rho^3 d\rho$$
$$\Rightarrow I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} MR^2$$

$= R^4/4$

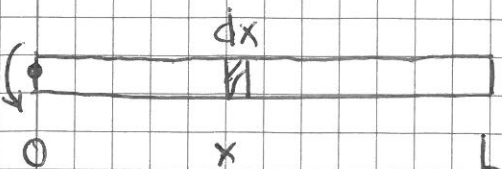
Eks 3: Tynn stang mhp CM (dvs akse  $\perp$  stang, gjennom CM)



$$\rho = x, \quad dm = M \frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M \frac{dx}{L} = \frac{M}{L} \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_{-L/2}^{L/2} = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

Eks 4: Tynn stang, mhp akse gjennom stangas ende

  $0$   $x$   $L$

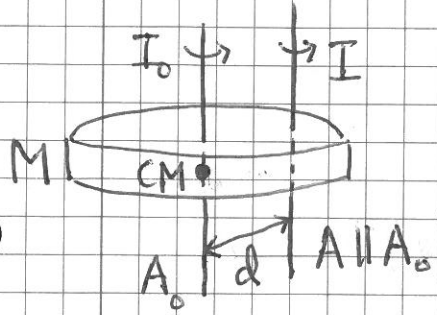
$$I = \int_0^L x^2 M \frac{dx}{L} = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$



- Eks 5: Kuleskall  $I_0 = \frac{2}{3} MR^2$
  - Eks 6: Kompakt kule  $I_0 = \frac{2}{5} MR^2$
- } mhp akse gjennom CM

Steiners sats [YF 9.5; LL 6.3]

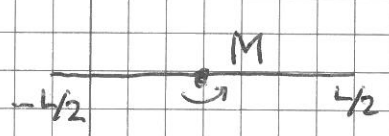
(= parallellakseteoremet)



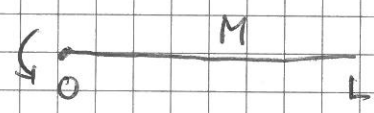
$I = I_0 + Md^2$

(Se eget notat for bevis)

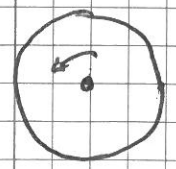
Eks 1: Tynn stang



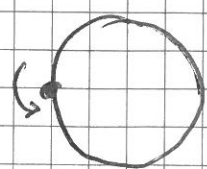
$d = L/2$



Eks 2: Kompakt kule



$d = R$

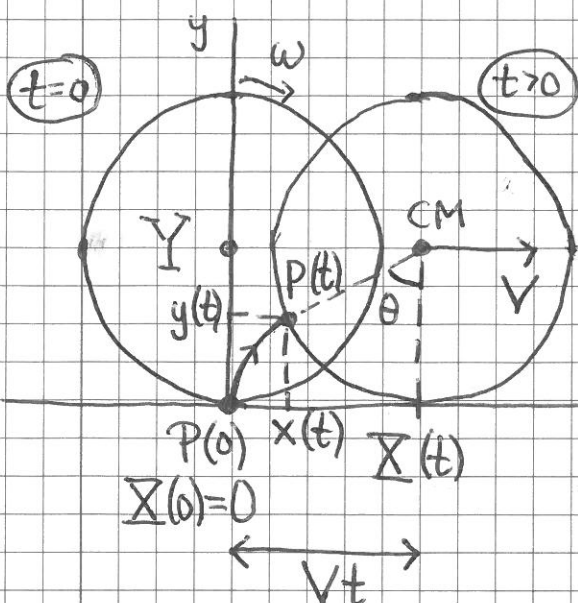


# Rulling og sluring

[YF 10.3 ; LL 6.7]

(36)

## Ren rulling



$P =$  punkt på periferien

$$= (x(t), y(t))$$

$$P(0) = (0, 0)$$

Fra figuren er banen til  $P$ :  $x = X - R \sin \theta$ ,  $y = R - R \cos \theta$

Pr def. er  $\omega = \dot{\theta}$

Banen til CM:  $X = V \cdot t = R \cdot \theta$ ;  $Y = R$

$$\Rightarrow V = \dot{X} = R \dot{\theta} = R \omega$$

$$A = \ddot{X} = \dot{V} = R \ddot{\theta} = R \dot{\omega} = R \alpha$$

som er rollebetingelse(n)e:

$$\boxed{V = R\omega, A = R\alpha}$$

Hastigheden til  $P$  blir:  $(\vec{v} = \dot{x} \hat{x} + \dot{y} \hat{y})$

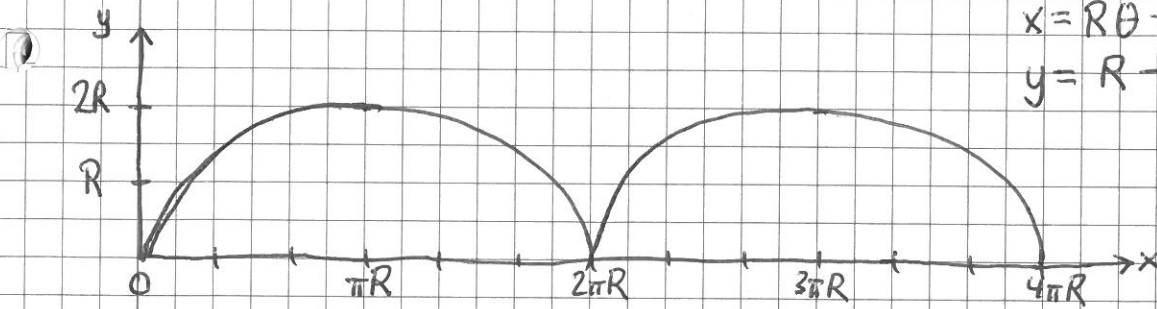
$$\dot{x} = \dot{X} - R \dot{\theta} \cos \theta = V (1 - \cos \theta)$$

$$\dot{y} = R \dot{\theta} \sin \theta = V \sin \theta$$

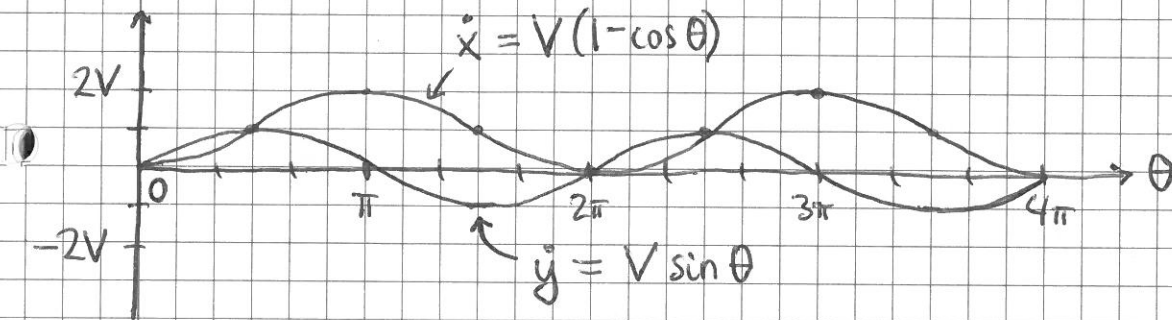
Banen til P er en sykloide:

$$x = R\theta - R\sin\theta$$

$$y = R - R\cos\theta$$



Hastighetskomponentene til P: (anta  $V = \text{konst.}$ )



Vi ser at  $v_p = 0$  når  $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \dots$ , dvs når P er i kontakt med underlaget.

$$\Rightarrow P_f = \frac{dW_f}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v} = 0$$

• dvs intet effekttap pga friksjon ved ren rulling!

Selv om  $\vec{f} \neq 0$ ! (Statisk friksjon:  $f \leq \mu_s N$ )

Retning på  $\vec{f}$ : Motsatt rettet "tenkt" relativhastighet  $\vec{v}$  i kontaktpunktet, dvs den  $\vec{v}$  som oppstår i det aktuelle problem når  $f \rightarrow 0$ .

[I virkeligheten noe tap av mekanisk energi også ved ren rulling, såkalt rullefriksjon. Denne byr vi oss ikke om her!]

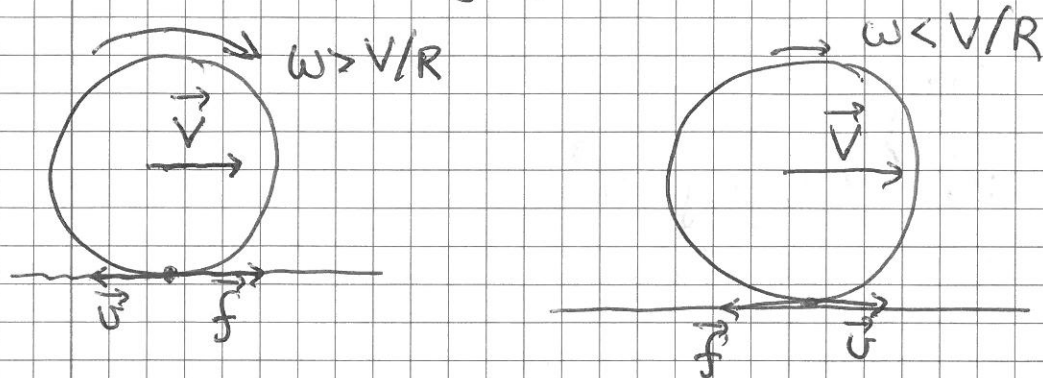
# Sluring

• Hvis  $\omega \neq V/R$ , har vi en relativ hastighet

$$v = V - \omega R \neq 0$$

mellem legeme og underlag i kontaktpunktet.

Legemet roterer og glir; det slurer.



I begge tilfeller er  $P_f = \vec{f} \cdot \vec{v} < 0$ ,  
 med  $f = \mu_k N$  (kinetisk friksjon).

## Kinetisk energi ved ren rulling

$$K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2$$

$$I_0 = c \cdot MR^2 \quad (\text{ring } c=1; \text{ kule } c=\frac{2}{5}; \dots)$$

$$\omega = V/R$$

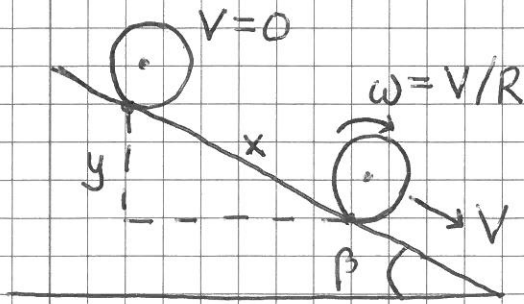
$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} MV^2 + \frac{1}{2} c MR^2 \frac{V^2}{R^2} = \underline{\underline{(1+c) \frac{1}{2} MV^2}}$$



# Eks: Kapplop på skråplanet

[YF 10.3; LL 6.8]

(39)



$M = \text{masse}$ ,  $R = \text{radius}$ ,  
 $I_0 = cMR^2 = \text{treghetsmom. mhp CM}$   
Anta ren rulling ( $\omega = v/R$ ).  
Bestem  $V$ ,  $\dot{V}$ , friksjonen  $f$ ,  
og minste  $\mu_s$  som gir ren rulling!

Exp:  $\dot{V}(\text{kule}) > \dot{V}(\text{skive}) > \dot{V}(\text{kuleskall}) > \dot{V}(\text{hul sylinder})$

## Løsning:

Kontaktpunkt i ro  $\Rightarrow$  statisk friksjon,  $f \leq \mu_s N$ ,

$W_f = 0$ , og mek. energi  $E$  er bevart

$$\Rightarrow Mgy = (1+c)\frac{1}{2}MV^2; \quad y = x \sin\beta$$

$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{2gx \sin\beta}{1+c}}$$

som forklarer exp. kvalitativt, siden

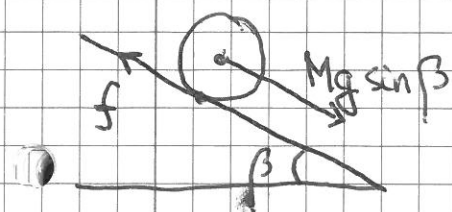
$$c(\text{kule}) = \frac{2}{5} < c(\text{skive}) = \frac{1}{2} < c(\text{kuleskall}) = \frac{2}{3} < c(\text{hul sylinder}) = 1$$

Akselerasjonen:

$$\dot{V} = \sqrt{\frac{2g \sin\beta}{1+c}} \frac{d}{dt} \sqrt{x}; \quad \frac{d}{dt} \sqrt{x} = \frac{1}{2} x^{-1/2} \frac{dx}{dt} = \frac{V}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = \frac{V}{\sqrt{x}} \cdot \frac{V}{2\sqrt{x}} = \frac{V^2}{2x} = \underline{\underline{g \frac{\sin\beta}{1+c}}}$$

Redusert med faktoren  $(1+c)^{-1}$  pga friksjon  $\vec{f}$  rettet oppover skråplanet. (Med  $f=0$  blir  $A = g \sin\beta$ .)



$$N2: Mg \sin \beta - f = M\dot{V} = \frac{Mg \sin \beta}{1+c} \quad (40)$$

$$\Rightarrow f = \left(1 - \frac{1}{1+c}\right) Mg \sin \beta = \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta$$

$$f_{\max} = \mu_s N = \mu_s Mg \cos \beta$$

$\Rightarrow$  ren rulling bare hvis  $f_{\max} \geq f$

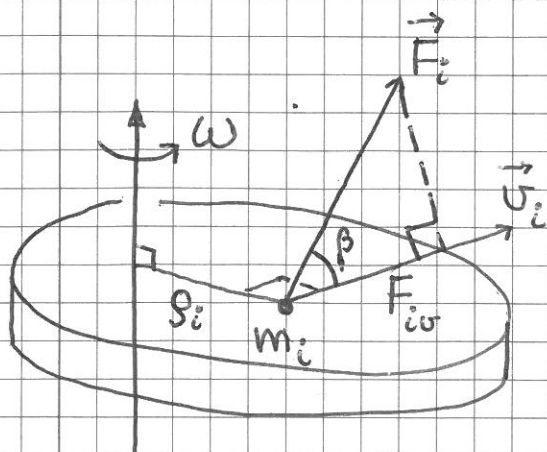
$$\Rightarrow \mu_s Mg \cos \beta \geq \frac{c}{1+c} Mg \sin \beta \Rightarrow \underline{\underline{\mu_s \geq \frac{c}{1+c} \tan \beta}}$$

Hul sylinder ( $c=1$ ):  $\mu_s \geq \frac{1}{2} \tan \beta$  etc.

## Rotasjonsdynamikk

### Akse med fast orientering

- På sett og vis endimensjonalt problem
- Dekker det meste vi skal ta for oss
- Hvis akse flytter seg, er det rotasjonsdelen av legemets totale bevegelse som beskrives



$$v_i = r_i \omega$$

$F_{i\omega}$  = komponent av  $\vec{F}_i$  langs  $\vec{v}_i$

$$\Rightarrow \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = F_{i\omega} v_i = F_{i\omega} r_i \omega$$

effekt tilført  $m_i$

"kraft ganget med arm"

La oss regne ut  $P = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i =$  tilført

(41)

• ("rotasjons"-) effekt på to måter, ved

(a) å bruke N2,  $\vec{F}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}$ , og  $v_i = \rho_i \omega$

(b) å bruker <sup>kun</sup>  $v_i = \rho_i \omega$

$$(a) P = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i \stackrel{\text{se s.17}}{=} \frac{d}{dt} \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$= \frac{d}{dt} \left\{ \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2}_{= I} \right\} \cdot \frac{1}{2} \omega^2 = I \omega \frac{d\omega}{dt}$$

= I = konstant  
for stivt legeme

$$(b) P = \sum_i F_{i\omega} v_i = \left\{ \sum_i F_{i\omega} \rho_i \right\} \omega = \tau \omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = I \dot{\omega}}$$

N2 for rotasjonsbevegelsen  
om akse med fast orientering

Her er  $\tau = \sum_i F_{i\omega} \rho_i =$  ytre dreiemoment  
på legemet, mhp rotasjonsaksen, og

$I = \sum_i m_i \rho_i^2 =$  legemets treghetsmoment mhp  
den samme rotasjonsaksen

## Rotasjon og arbeid [YF 10.4; LL 6.4]

(42)

Vi har nå  $\boxed{P = \tau \omega} = \tau \frac{d\varphi}{dt} =$  tilført effekt  
når dreiemomentet  $\tau = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$  virker, og legemet  
roterer en vinkel  $d\varphi$  i løpet av tiden  $dt$ .

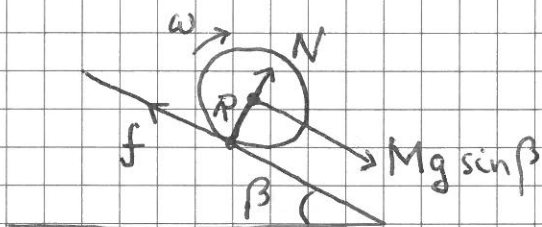
Fra før:  $P = \frac{dW}{dt} =$  tilført arbeid pr tidsenhet

Dermed:  $\boxed{dW = \tau d\varphi}$

Sammenlign med translasjon:  $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ ,  $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

---

Eks 1: Rulling på skråplan



$$\omega = v/R$$

$$\dot{\omega} = \dot{v}/R$$

N2, rot. om akse gjennom CM:

$\tau = f \cdot R =$  dreiemoment mhp akse gjennom CM

$$\Rightarrow f \cdot R = I_0 \dot{\omega} = cMR^2 \cdot \frac{\dot{v}}{R} = cMR\dot{v} \Rightarrow f = cM\dot{v}$$

N2, translasjon:

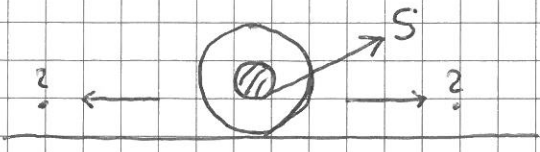
$$Mg \sin \beta - f = M\dot{v}$$

$$\Rightarrow Mg \sin \beta = M\dot{v} + f = (1+c)M\dot{v}$$

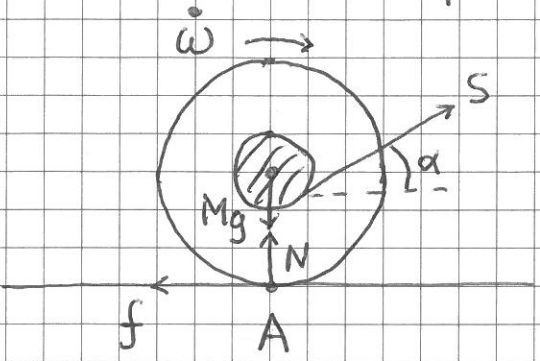
$$\Rightarrow \underline{\underline{\dot{v} = g \cdot \frac{\sin \beta}{1+c}}} \quad (\text{som s. 39})$$



Eks 2: Snelle

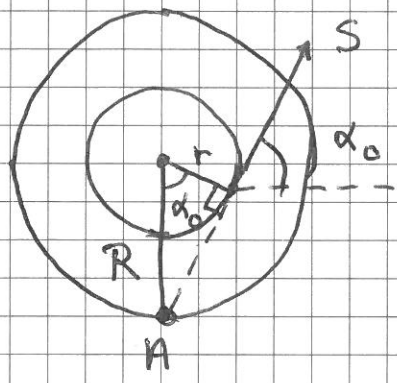


Kun S har arm mhp akse gjennom kontaktpkt. A:



Liten  $\alpha \Rightarrow \dot{\omega}$  som i figuren  
 Stor  $\alpha \Rightarrow \dot{\omega}$  andre veien

Statisk likevekt hvis forlengelsen av  $\vec{S}$  går gjennom A (da er  $\tau_A = 0$ ):



$\Rightarrow \cos \alpha_0 = r/R$

$N = Mg - S \sin \alpha_0, \quad f \leq \mu_s N$

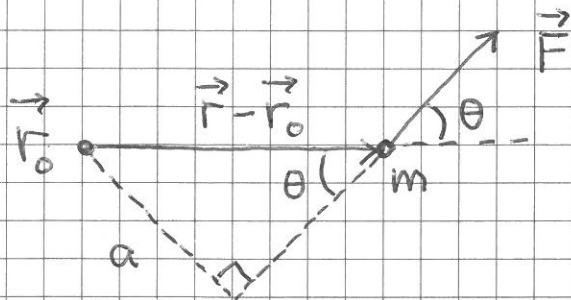
$\Rightarrow$  snelle i ro inntil  $S \cos \alpha_0 = \mu_s (Mg - S \sin \alpha_0)$

$S = \mu_s Mg / (\cos \alpha_0 + \mu_s \sin \alpha_0)$

$(\sin \alpha_0 = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_0} = \sqrt{1 - r^2/R^2})$

# Rotasjonsdynamikk, generelt

## Dreiemoment [YF 10.1; LL 5.5, 6.4]



$$a = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot \sin \theta$$

$$\vec{\tau} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$$

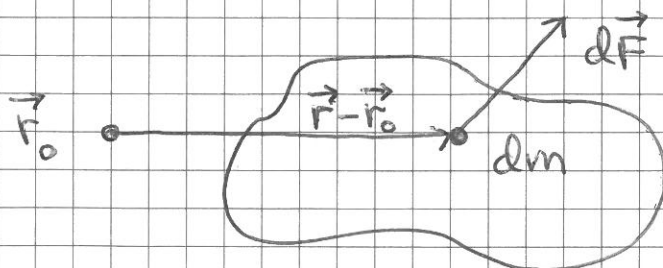
$\vec{F}$ 's dreiemoment på m, relativt valgt ref.punkt  $\vec{r}_0$

Retning:  $\vec{\tau} \perp \vec{F}$  og  $\vec{\tau} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$

Abs.verdi:  $|\vec{\tau}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \theta$

$$= a \cdot F \quad (\text{arm} \cdot \text{kraft, som s. 41})$$

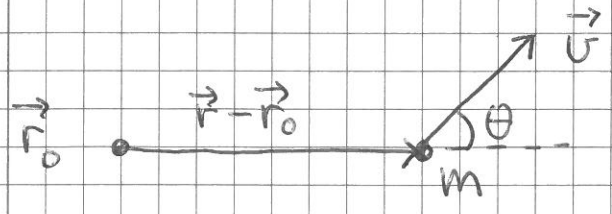
For partikkelsystem (f.eks. stivt legeme):



$$\vec{\tau} = \int d\vec{\tau} = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F}$$

= totalt dreiemoment på legemet, relativt  $\vec{r}_0$

# Dreieimpuls [YF 10.5; LL 6.6]



$$\vec{p} = m\vec{u}$$

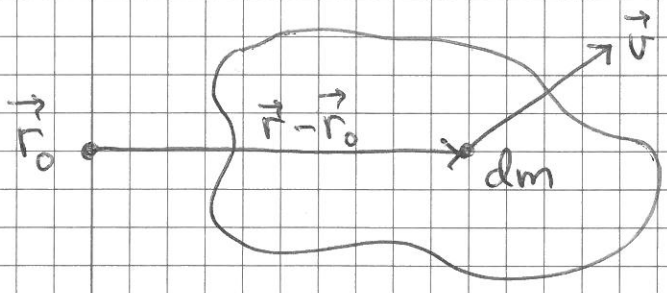
$$\vec{L} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{p}$$

$m$ 's dreieimpuls, relativt  $\vec{r}_0$

Rehning:  $\vec{L} \perp \vec{p}$ ,  $\vec{L} \perp \vec{r} - \vec{r}_0$

Abs.verdi:  $|\vec{L}| = |\vec{r} - \vec{r}_0| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin\theta = a \cdot p$  ("arm · impuls")

For partikkelsystem:



$$d\vec{p} = \vec{u} dm$$

$$\vec{L} = \int d\vec{L} = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{u} dm$$

= legemets totale dreieimpuls, relativt  $\vec{r}_0$

N2 for rotasjon [VF 10.5; LL 6.6]

Anta fast  $\vec{r}_0$ , evt.  $\dot{\vec{r}}_0 \parallel \vec{v}$ , slik at  $\dot{\vec{r}}_0 \times \vec{v} = 0$ .

Regner ut  $d\vec{L}/dt$ :

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \left\{ m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} \right\} = m \underbrace{(\dot{\vec{v}} - \dot{\vec{r}}_0) \times \vec{v}}_{=0} + m(\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a}$$

$$\stackrel{N2}{=} (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F} = \vec{\tau}$$

For partikkelsystem:

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d}{dt} \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{v} dm = \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{a} dm$$

$$\stackrel{N2}{=} \int (\vec{r} - \vec{r}_0) \times d\vec{F} = \int d\vec{\tau} = \vec{\tau}$$

$\Rightarrow$   $\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  N2, rotasjon

$\vec{\tau}$  = netto ytre dreiemoment p\u00e5 legemet

$\vec{L}$  = legemets totale dreieimpuls

(Felles ref punkt  $\vec{r}_0$  \u00e5  $\vec{\tau}$  og  $\vec{L}$  !)



# Bevaringslover (oppsummert)

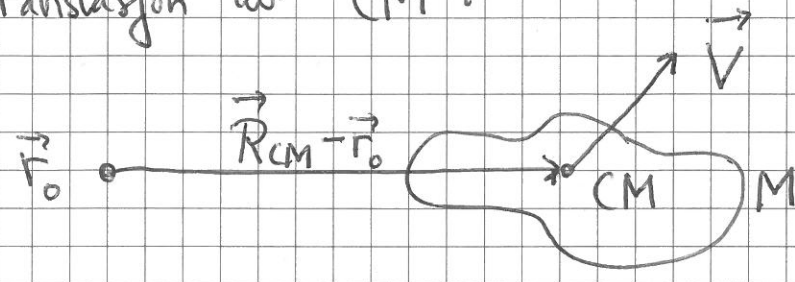
- For isolert system (dvs ingen ytre krefter) er total energi  $E$ , impuls  $\vec{p}$  og dreieimpuls  $\vec{L}$  bevart
- For konservativt system er mekanisk energi  
 $E = K + U$  bevart
- Hvis netto ytre kraft på system er null, er total impuls  $\vec{p}$  bevart
- Hvis netto ytre dreiemoment på system er null, er total dreieimpuls  $\vec{L}$  bevart

# $\vec{L}$ for stivt legeme [YF 10.5; LL 6.6]

Analogt K for stivt legeme (s. 33):

Total  $\vec{L}$  = Banedreieimpuls pga translasjon av CM  
+ Spinn pga rotasjon om akse gjennom CM

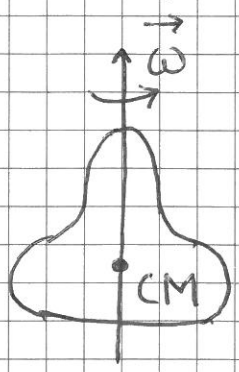
Translasjon av CM:



$$\vec{L}_b = M(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O) \times \vec{V} = \text{banedreieimpuls relativt } \vec{r}_O$$

Rotasjon om akse gjennom CM:

(Antar refleksjonssymmetri om rotasjonsaksen)



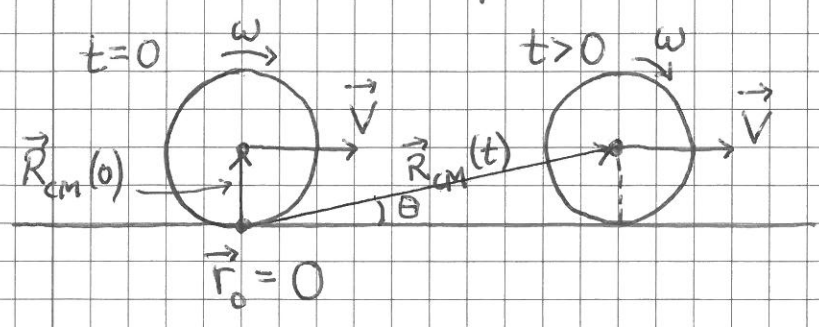
$$\vec{L}_s = I_O \vec{\omega} = \text{spinn ("indre dreieimpuls")}; \text{ uavhengig av } \vec{r}_O$$

Total dreieimpuls for stivt legeme:

$$\vec{L} = \vec{L}_b + \vec{L}_s = M(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O) \times \vec{V} + I_O \vec{\omega}$$

(Se eget notat for bevis.)

Eks: Hva er  $\vec{L}$  for <sup>(rent)</sup> rullende ring?



$y$   
 $x$   
 $\vec{\omega} = \omega \hat{z}$   
 $I_o = MR^2$

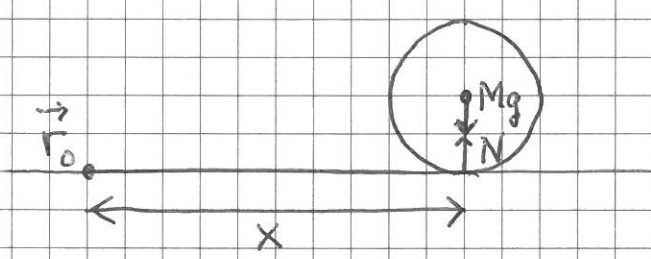
$$\vec{L}_b(0) = M \vec{R}_{cm}(0) \times \vec{V} = MRV (-\hat{z})$$

$$\vec{L}_b(t) = M \vec{R}_{cm}(t) \times \vec{V} = MR_{cm}(t) V \sin\theta \cdot (-\hat{z}) = MRV (-\hat{z})$$

$$\vec{L}_s(0) = \vec{L}_s(t) = I_o \vec{\omega} = I_o \omega (-\hat{z}) = MR^2 \omega (-\hat{z})$$

Ren rulling:  $\omega = V/R$

$$\Rightarrow \underline{\vec{L}} = -2MRV \hat{z}, \text{ bevart, s\u00e5 } \vec{\tau} = 0 :$$



Mg (ned) og N (opp) har lik arm x, og  $N = Mg$

$$\Rightarrow \vec{\tau} = x \hat{x} \times N \hat{y} + x \hat{x} \times Mg (-\hat{y}) = \underline{\underline{0}}$$

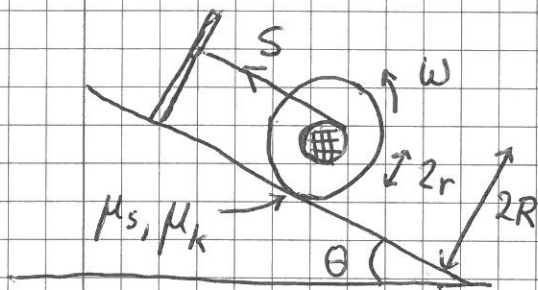
# Statisk likevekt [YF 11.1-11.3; LL 7.1]

● Et stivt legeme forblir i ro ( $\vec{p} = 0, \vec{L} = 0$ )

bare dersom  $\sum_i \vec{F}_i = 0$  og  $\sum_i \vec{\tau}_i = 0$   
= netto ytre kraft = netto ytre dreiemoment

## Eksempler, rotasjon

Eks 1: Snelle på skråplanet



- Ved hvilken vinkel  $\theta_0$  begynner snella å gli/rotere?
- Hva er snordraget S og akselerasjonen a når den glir?

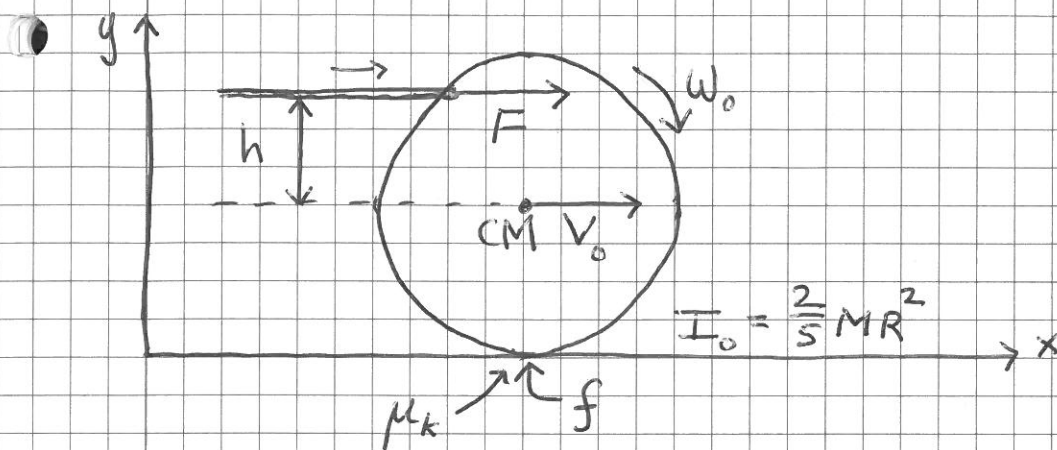
Strategi:

N1 langs skråplanet + N1 for rot. om (M,  $f = f_{max} \Rightarrow \theta_0$ )

N2 — " — + N2 — " — ,  $f = \mu_k N \Rightarrow S$  og a

(Ør. 6)





Kortvarig støt med kraft  $F$ , varighet  $\Delta t$ , i

høyde  $h$  over senterlinjen;  $F \gg f$ .

Finne kulas bevegelse. (Øv. 6)

$$N2: F \Delta t = \Delta p = M v_0$$

$$N2, \text{ rot om CM: } \tau \Delta t = \Delta L = I_0 \omega_0,$$

$$\text{med } \tau = F \cdot h$$

Stor  $h \Rightarrow \omega_0 > v_0/R$

$\Rightarrow$  skiving, med  $\vec{f}$  mot venstre

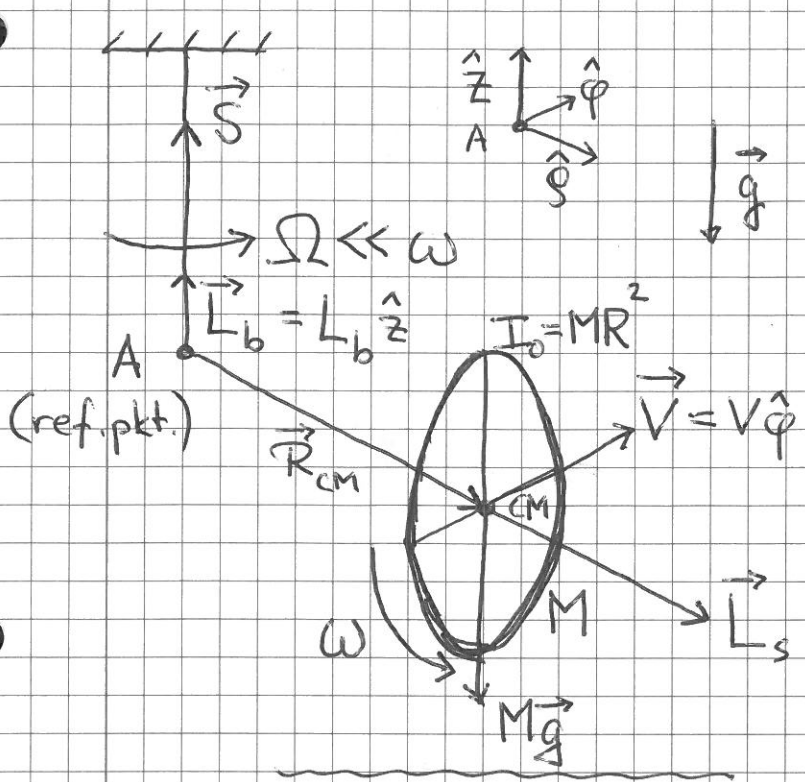
Liten  $h \Rightarrow$  omvendt

Passelig  $h = h_0 \Rightarrow \omega_0 = v_0/R \Rightarrow$  ren rulling fra start!

Etter hvert ren rulling uansett, med  $f = 0$ .

# Eks 3: Preesjon (Gyroskop) [YF 10.7; LL 6.10]

(52)



Ekspenimentelt:

$$M = 5 \text{ kg}$$

$$R = 0.3 \text{ m}$$

$$R_{cm} = 0.2 \text{ m}$$

$$T_{\Omega} = \frac{2\pi}{\Omega} = \underline{4.7 \text{ s}}$$

Hvaer  $\omega$ ?

Løsning:

Dreiemoment relativt A:

$$\begin{aligned} \vec{L}_A &= \vec{L}_b + \vec{L}_s = \vec{R}_{cm} \times M\vec{V} + I_o \vec{\omega} \\ &= R_{cm} M V \hat{z} + MR^2 \omega \hat{s} \\ &= MR_{cm}^2 \Omega \hat{z} + MR^2 \omega \hat{s} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{L}_A \approx \vec{L}_s \quad \text{siden } \Omega \ll \omega \quad (\text{og } R_{cm} \approx R)$$

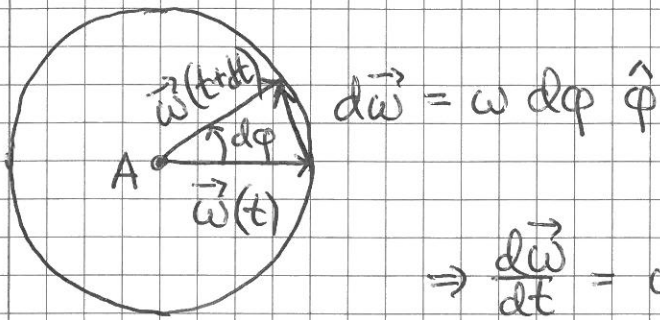
Bare tyngden  $M\vec{g} = -Mg\hat{z}$  har dreiemoment relativt A: (Snordraget  $\vec{S}$  går gjennom A.)

$$\vec{\tau}_A = \vec{R}_{cm} \times M\vec{g} = R_{cm} Mg (\hat{s} \times (-\hat{z})) = R_{cm} Mg \hat{\phi}$$

N2 för rotation, med A som ref. punkt (se s46): (53)

$$\vec{\tau}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt} \approx \frac{d\vec{L}_S}{dt} = I_0 \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \left( \frac{d\vec{L}_b}{dt} \approx 0 \right)$$

Sett ned längs z-aksen:



$$\Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \omega \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi} = \omega \Omega \hat{\phi}$$

$$\text{Dermed: } \underbrace{R_{cm} Mg}_{\approx} = I_0 \omega \Omega = MR^2 \omega \Omega$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega = R_{cm} g / R^2 \Omega}}$$

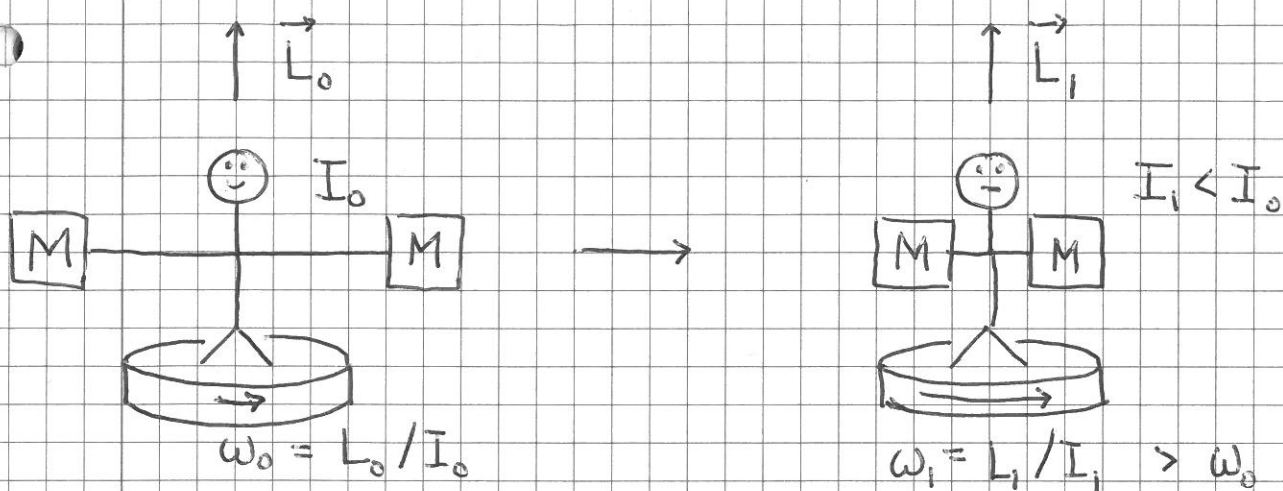
Hjulets omloppstid:

$$\underline{\underline{T_\omega = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{(2\pi R)^2}{R_{cm} g T_\Omega}}}$$

Tallvärde:

$$T_\omega \approx \frac{(2\pi \cdot 0.3)^2}{0.2 \cdot 10 \cdot \underline{4.7}} \approx \underline{\underline{0.38 \text{ s}}}$$

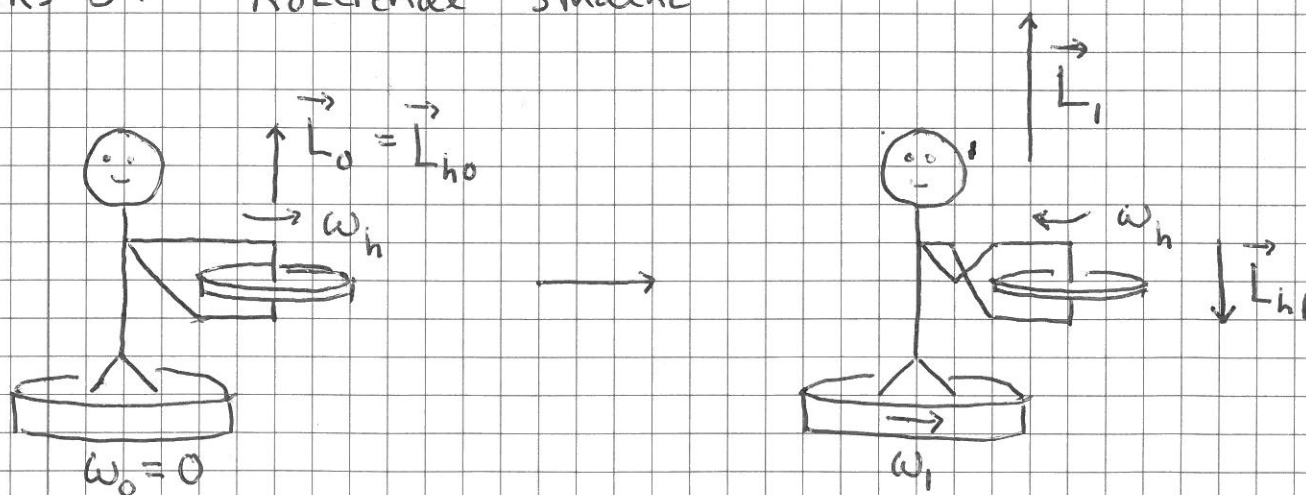
# Eks 4: Piruett [YF 10.6; LL 6.5]



$$\vec{\tau}_{\text{ytre}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_1 = \vec{L}_0 \Rightarrow \omega_1 = L_1 / I_1 = L_0 / I_1 = \underline{\underline{\omega_0 I_0 / I_1}} > \omega_0$$

(Men  $K_1 > K_0$  = Gjør arbeid på "M+M" med kjemisk energi i musklene)

# Eks 5: Roterende student



$$\vec{\tau}_{\text{ytre}} = 0 \Rightarrow \vec{L}_1 + \underbrace{\vec{L}_{h1}}_{-\vec{L}_0} = \vec{L}_0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{L}_1 = 2\vec{L}_0}}$$



# SVINGNINGER

[YF 14; LL 9]

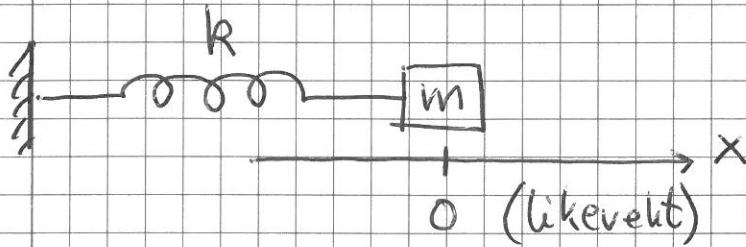
(55)

= oscillasjoner = periodisk oppførsel omkring likevekt

Eks: Masse/fjær, Pendel, Gitarstreng, Luft i blåseinstrument, Atomer i molekyler / krystaller, osv

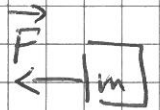
## Harmonisk oscillator

[YF 14.2; LL 9.1-9.3]

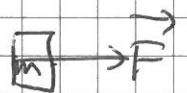


Likevekt ( $F=0$ ) når  $m$  i  $x=0$

$m$  i  $x > 0 \Rightarrow$  strukket fjær  $\Rightarrow \vec{F} \sim -\hat{x}$



$m$  i  $x < 0 \Rightarrow$  sammenpresset fjær  $\Rightarrow \vec{F} \sim +\hat{x}$



Hookes lov (ideell fjær):  $|\vec{F}| \sim |x|$

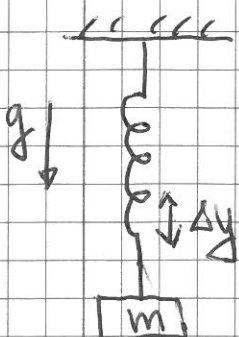
$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = -kx\hat{x}}$$

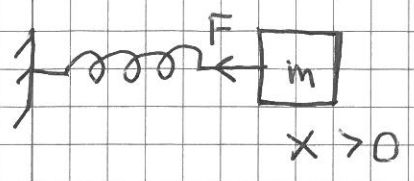
$k$  = fjærkonstant ;  $[k] = N/m$

Vertikalt: Fjæra strekkes  $\Delta y$  når  $m$  henges på.

$$N1 \text{ (i likevekt)} \Rightarrow mg = k\Delta y$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta y = mg/k}$$





N2:  $-kx = m\ddot{x}$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Innfører  $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$

$\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Harv. osc. i 1D

Løsning: Ser at  $\sin \omega_0 t$  og  $\cos \omega_0 t$  løser ligningen

$\Rightarrow$  Generell løsning:

$x(t) = B \cos \omega_0 t + C \sin \omega_0 t$  ert  $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

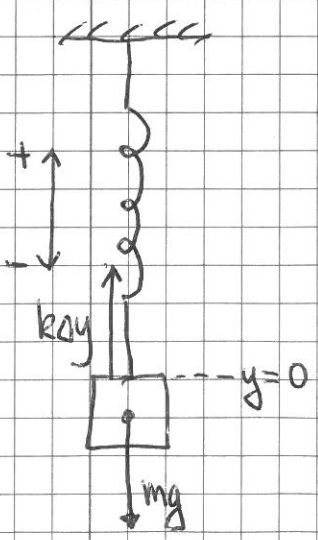
der konstanter  $B, C$  ert  $A, \varphi$  fastlegges med

2 initialbetingelser, f.eks.  $x(0) = x_0$  og  $\dot{x}(0) = v_0$

[Se øving for sammenheng mellom  $B, C$  og  $A, \varphi$ ]

Samme ligning for vertikal bevegelse om "skruket likevekt"

med  $\Delta y = mg/k$ :



N2 med  $y \neq 0$ :

$m\ddot{y} = \Sigma F = -mg + k(\Delta y - y)$

$= -mg + k \cdot \frac{mg}{k} - k \cdot y$

$= -ky$

$\Rightarrow \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$

med  $\omega_0^2 = k/m$

Diverse størrelser og begreber:

$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

A = amplitude = max udsving fra ligestilling [A] = [x]

$\omega_0$  = vinkel-frekvens [ω<sub>0</sub>] = 1/s

T = 2π/ω<sub>0</sub> = periode = tid pr hel svingning [T] = s

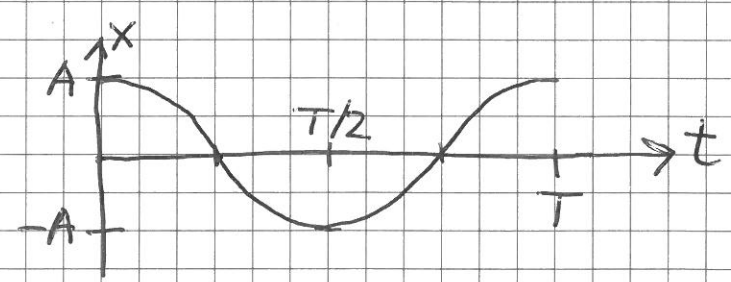
f = 1/T = frekvens = svingninger pr tidsenhed [f] = 1/s = Hz

$\omega_0 t + \varphi$  = svingningens fase

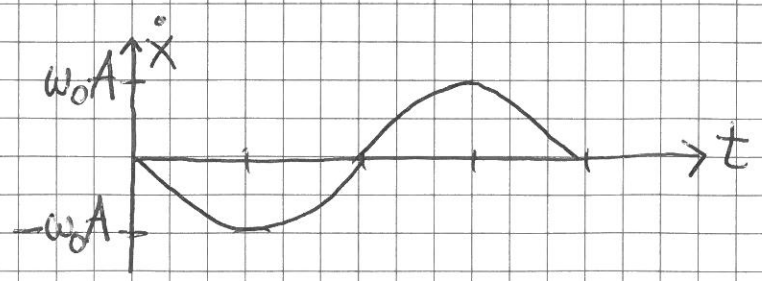
φ = fasekonstant [φ] = 1

Antag φ = 0 og A > 0:

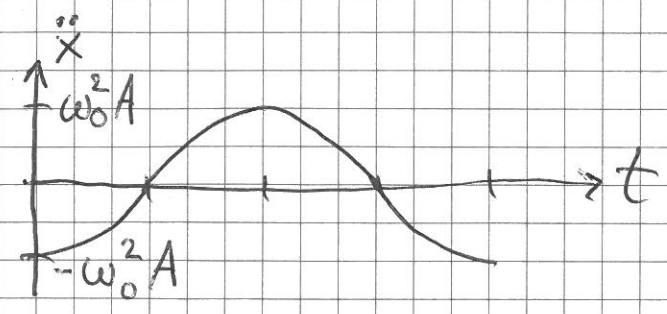
$x(t) = A \cos \omega_0 t$



$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin \omega_0 t$   
 $= \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$



$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 A \cos \omega_0 t$   
 $= -\omega_0^2 x(t)$   
 $= \omega_0^2 A \cos(\omega_0 t + \pi)$



# Energi i harmonisk oscillator [VF 14.3; LL 9.4]

(58)

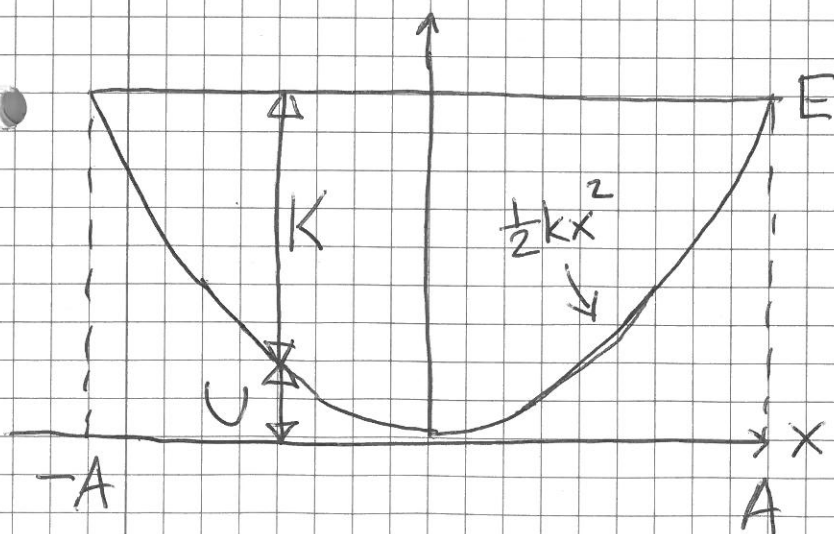
$$\bullet K(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$U = - \int_0^x F(x) dx = - \int_0^x (-kx) dx = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\Rightarrow U(t) = \frac{1}{2} k x(t)^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$\Rightarrow E = K + U = \frac{1}{2} k A^2 = \text{konstant (tidsuafhængig)}$$

$\bullet \Rightarrow$  Systemet er konservativt; mekanisk energi  $E$  er bevaret

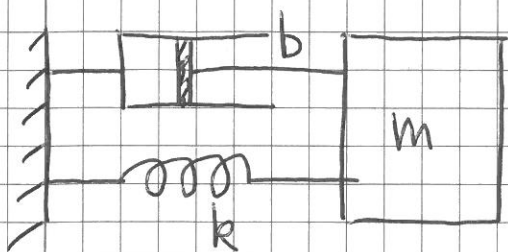




# Dempet fri svingning [YF 14.7; LL 9.7]

(59)

- Anta  $f = -b\dot{x}$  (dvs langsom bevægelse i fluid)



$$NZ: -kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

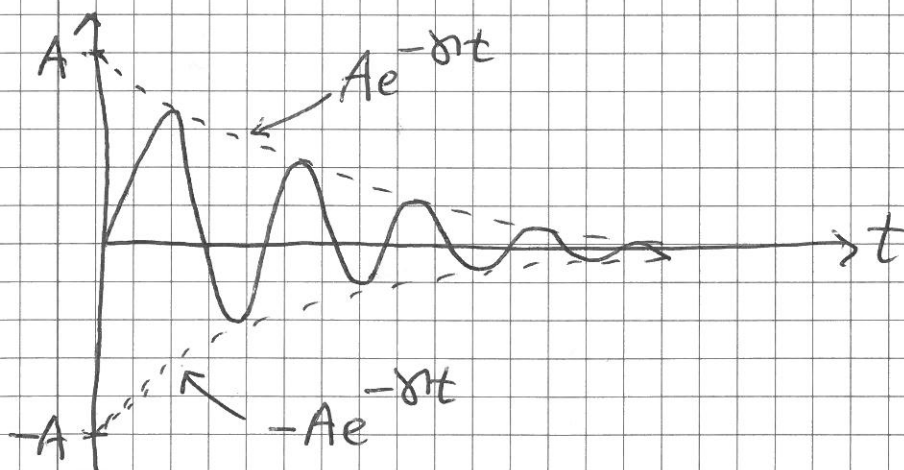
$$\delta \equiv b/2m, \quad \omega_0^2 \equiv k/m$$

$$[\delta] = [\omega_0] = 1/s$$

Form på løsning afhænger af  $\delta/\omega_0$ :

Underkritisk (svak) damping,  $\delta < \omega_0$

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi); \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$



Dempet svingebewægelse med eksponentielt aftagende amplitude  $Ae^{-\delta t}$ .

Overkritisk damping,  $\gamma > \omega_0$

(60)

$$x(t) = Ae^{-\alpha_1 t} + Be^{-\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 = \gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} ; \alpha_2 = \gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Kritisk damping,  $\gamma = \omega_0$

$$x(t) = Ae^{-\gamma t} + Bte^{-\gamma t}$$

- Dvs,  $\gamma > \omega_0$  gir ikke svingninger, men eksponentielt avtagende utsving  $x(t)$ :



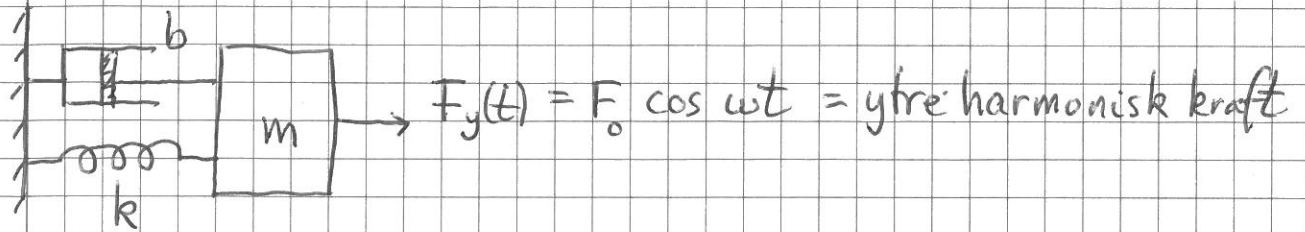
(Her:  $x(0) > 0$   
 $\dot{x}(0) > 0$ )

Eks: Størst komfort på humpete veier

hvis støtdempene gir  $\gamma \approx \omega_0$ .

# Trungen svingning og resonans [YF 14.8; LL 9.9]

(61)



$$N2: -kx - b\dot{x} + F_0 \cos \omega t = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t \quad (\gamma = \frac{b}{2m}, \omega_0^2 = \frac{k}{m})$$

Løsning:  $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ , der  $x_h$  er løsning av

den homogene ligningen, som s. 59 og 60, dvs  $x_h \approx 0$  etter en tid  $t \gg 1/\gamma$ , for da er  $\exp(-\gamma t) \approx 0$ .

Da er  $x(t) = x_p(t)$ , og vi gjetter

$$x_p(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

hvooretter innsetting av  $x_p$ ,  $\dot{x}_p$  og  $\ddot{x}_p$  i N2 gir

$$A(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}; \quad \varphi(\omega) = \arctan\left\{\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2\gamma\omega}\right\}$$

Resonans får vi med svak demping,  $\gamma \ll \omega_0$ , og

$\omega \approx \omega_0$ : Da kan  $A(\omega)$  bli svært stor! Den ytre

kraften driver systemet med frekvens  $\omega$  lik systemets egenfrekvens (ent resonansfrekvens eller naturlige frekvens)

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

Hvis  $\gamma \rightarrow 0$ , vil  $A(\omega) \rightarrow \infty$  når  $\omega \rightarrow \omega_0$ ,

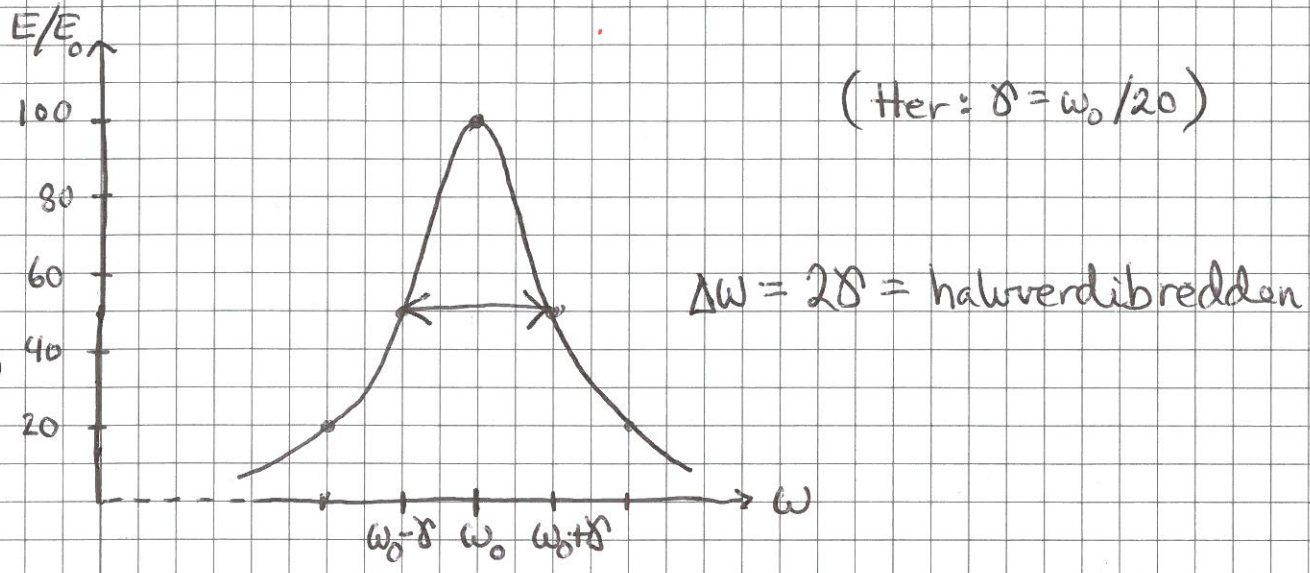
jf. Tacoma bridge, 1940.



Oscillatorens energi:

$$E \approx \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 \frac{\omega_0^4/\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2}$$

$$= E_0 \cdot \frac{\omega_0^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\delta\omega)^2} ; \quad E_0 = F_0^2/2k$$



Oscillatorens Q-faktor ("quality"):

$$Q \equiv \omega_0/\Delta\omega = \omega_0/2\delta \quad (\text{Her: } Q=10)$$

Mål for hvor skarp resonanstoppen er.

- Mindre damping  $\Rightarrow$  smalere (og høyere) resonans
- $\Rightarrow$  større Q-verdi

Exp 22.02.16:

Stav + 1 messinglodd  $\Rightarrow T_0 \approx 0.65s, f_0 \approx \frac{1.55}{0.65} \text{ Hz} \approx 2.38 \text{ Hz}$  (Målt)

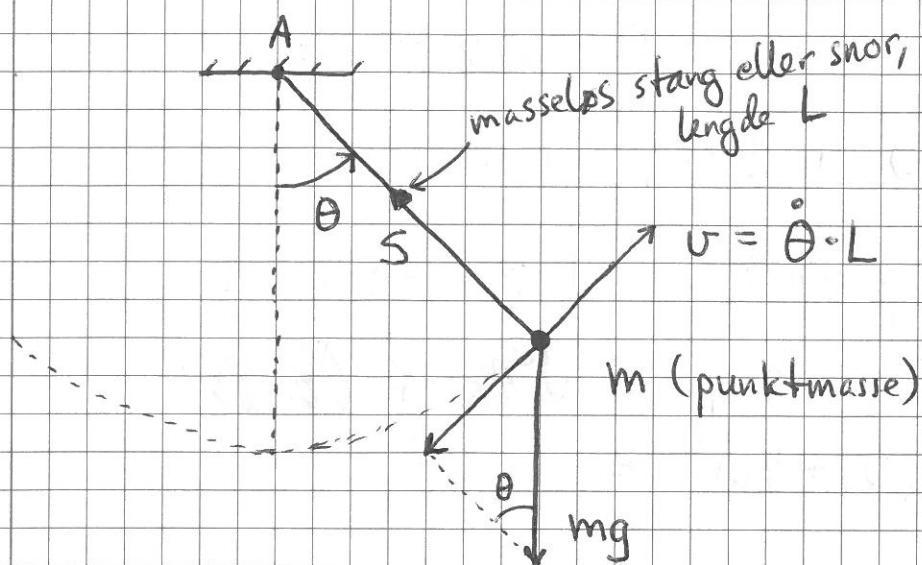
Målt halvverdibredde:  $\Delta f \approx 0.14 \text{ Hz}$

$$\Rightarrow Q = f_0/\Delta f \approx \underline{\underline{11}}$$



# Matematisk pendel [VF 14.5; LL 9.6]

(63)



Er her interessant i beregelsen // sirkelbanen:

$$\left. \begin{aligned} F_{||} &= -mg \sin \theta \\ a_{||} &= \dot{v} = L \ddot{\theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -mg \sin \theta = mL \ddot{\theta}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0}$$

Hvis vi hele tiden har små utsving,  $|\theta| \ll 1$ , er  $\sin \theta \approx \theta$ , og vi har en enkel harmonisk oscillator:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{g/L}}$$

Med større utsving må  $\theta(t)$  bestemmes numerisk.

Anta  $\theta(0) = \theta_0$  og  $v(0) = v_0$ .

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v}{L} \Rightarrow d\theta = \frac{v}{L} dt \Rightarrow \Delta\theta \approx \frac{v}{L} \Delta t$$

$$\frac{dv}{dt} = a_{||} \Rightarrow dv = a_{||} dt \Rightarrow \Delta v = a_{||} \Delta t = -g \sin \theta \cdot \Delta t$$

Dermed:

$$\theta(0) = \theta_0, \quad v(0) = v_0$$

$$\theta(\Delta t) \approx \theta(0) + \frac{v(0)}{L} \Delta t; \quad v(\Delta t) \approx v(0) - g \sin \theta(0) \cdot \Delta t$$

$$\theta(2\Delta t) \approx \theta(\Delta t) + \frac{v(\Delta t)}{L} \Delta t; \quad v(2\Delta t) \approx v(\Delta t) - g \sin \theta(\Delta t) \cdot \Delta t$$

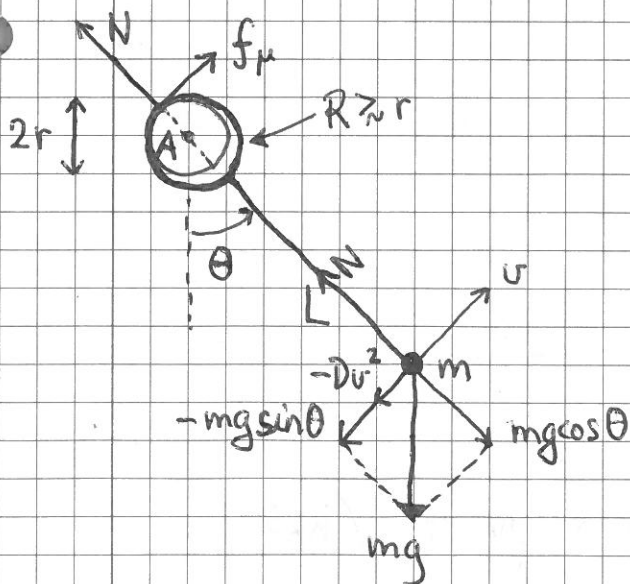
osv.

Dette er Eulermetoden ("Forward Euler"). "Rett linje" fra  $\theta_n (= \theta(n \cdot \Delta t))$  til  $\theta_{n+1}$  og fra  $v_n$  til  $v_{n+1}$

→ må typisk bruke et lite tidssteg  $\Delta t$ .

### Numerisk obligatorisk øving (skisse)

- Tilnærmet matematisk pendel, masse  $m$ , lengde  $L$
- Startbetingelser  $v(0) = v_0$  og (f.eks.)  $\theta(0) = \theta_0 = 0$
- Luftmotstand:  $f_D = -Dv^2$  ( $D \sim 10^{-3} - 10^{-4} \text{ kg/m}$ )
- Tynn pendelstang svinger rundt horisontal stang med radius  $r$ :



Friksjon mellom "pendelring" (radius  $R \approx r$ ) og horisontal stang (radius  $r$ ):

$$f_\mu = \mu N$$

↑ kinetisk friksjonskoeff

$N_2 \perp$  sirkelbanen i

$$N - mg \cos \theta = m a_\perp = m v^2 / L$$

$$\Rightarrow N = m(g \cos \theta + v^2 / L)$$

$$\Rightarrow f_\mu = \mu m (g \cos \theta + v^2 / L)$$

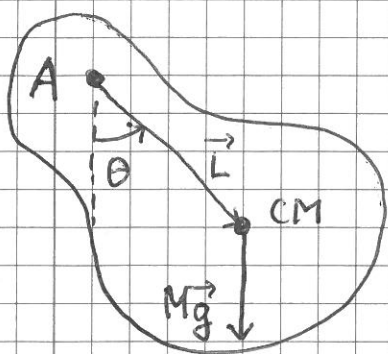
$N_2$ , rotasjon om A:  $\tau = I_A \ddot{\theta} = mL^2 \ddot{\theta}$ ;  $\tau = -mgL \sin \theta - D \frac{v^3 L}{2} - f_\mu r$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta + \frac{Dv^2}{mL} + \frac{\mu r}{L^2} (g \cos \theta + \frac{v^2}{L}) = 0$$

# Fysisk pendel

[YF 14.6 ; LL 9.6]

(65)



Stivt legeme, masse  $M$ . Anta friksjonsfri svingning om akse gjennom  $A$ .

$I$  = treghetsmoment mhp rot.aksen

$\vec{R}_{CM} = \vec{L}$  ;  $\hat{A}$  = enhetsvektor ut av planet

Ydre krefter:

$\vec{F}_A$  = kraft fra aksling på legemet ; null arm mhp  $A$   
 $\Rightarrow$  null dreiemoment mhp rot.aksen

$M\vec{g}$  = tyngdekraften, angriper i  $CM$ , arm  $\vec{L}$  mhp rot.aksen

$$\Rightarrow \vec{\tau} = \vec{L} \times M\vec{g} \Rightarrow \vec{\tau} = -MgL \sin\theta \hat{A}$$

N2 for rot. om  $A$  gir nå ( $\tau = I\ddot{\theta}$ )

$$-MgL \sin\theta = I\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{MgL}{I} \sin\theta = 0}$$

Med små utsving:  $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \omega_0 = \sqrt{\frac{MgL}{I}}}$$

Fysisk pendel,  
små utsving

Steiners sats:  $I = I_0 + ML^2$  ;  $I_0$  = tregh.mom. mhp  $CM$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ML^2}{MgL}}$$

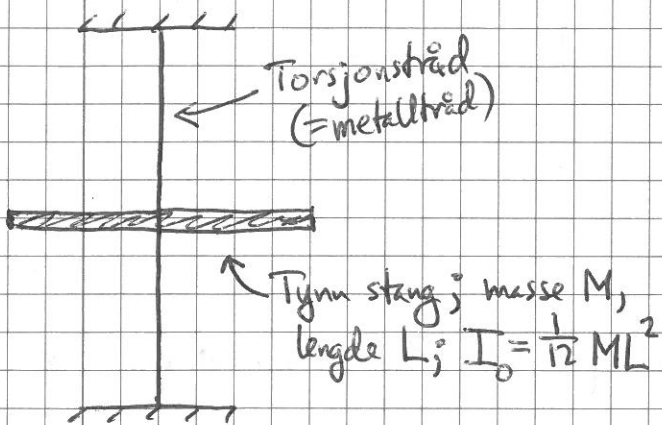
• Ser at  $T \rightarrow \infty$  når  $L \rightarrow 0$ , som ventet

• Matem. pendel:  $I_0 = 0 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{g/L}$  ; OK!



# Torsjonspendel

[YF 14.4; LL 9.6]



Hookes lov: Tråden motvirker vridning og virker på pendelen med dreiemoment prop. med vridn.vinkelen:

$$\tau = -\kappa \theta$$

der  $\kappa$  = torsjonsstivheten (LL:  $\tau = -\Gamma \theta$ )

N2 for rot. om trådens akse:  $\tau = I_0 \ddot{\theta}$

$$\Rightarrow -\kappa \theta = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ; \quad \omega_0 = \sqrt{\kappa / I_0}$$

Swingeperiode:  $T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{I_0 / \kappa}$

Enheter:  $[\kappa] = [\tau] = \text{Nm} = \text{kg m}^2 / \text{s}^2$

$$[I_0] = \text{kg m}^2$$

$$\Rightarrow [\sqrt{I_0 / \kappa}] = \text{s} ; \quad \text{OK}$$

Exp: Mål  $M$ ,  $L$  og  $T$  og beregn  $\kappa$ !

$$\kappa = 4\pi^2 I_0 / T^2 = \frac{4\pi^2 ML^2}{3T^2}$$

Tallverdier:  $M = 50\text{g}$  ;  $L = 11\text{cm}$  ;  $T = 0.8\text{s}$

$$\Rightarrow \kappa \approx \underline{\underline{3 \cdot 10^{-3} \text{ Nm}}}$$

[NB: Oppgave for uten L på forelesning !!]



# BØLGER [YF 15,16,11.4; LL 10,7,2]

(67)

Bølge = forplantning av forstyrrelse fra kikkerekt  
(f.eks. svingning)

Masser (partikler) svinger, men forplanter seg ikke

Energi (og impuls) svinger og forplanter seg med bølgen.

Transversal (T) bølge: partikler svinger  $\perp$  bølgen forplant. retn.

Longitudinal (L)  $\leftarrow$   $\rightarrow$   $\parallel$   $\parallel$   $\parallel$   $\parallel$

Eks:

Streng/Fjer: T-utsving av streng-/fjerelementer

Lyd: L-utsving av molekylene i mediet

Overflatebølger (f.eks vann): T+L-utsving av vannet

Lys, Elektromagn. bølger: Elektrisk felt  $\vec{E}$  og magnetfelt  $\vec{B}$  svinger  $\perp$  forpl. retn.

Bølgefenomener:

Dopplereffekt, Interferens (Diffraksjon).

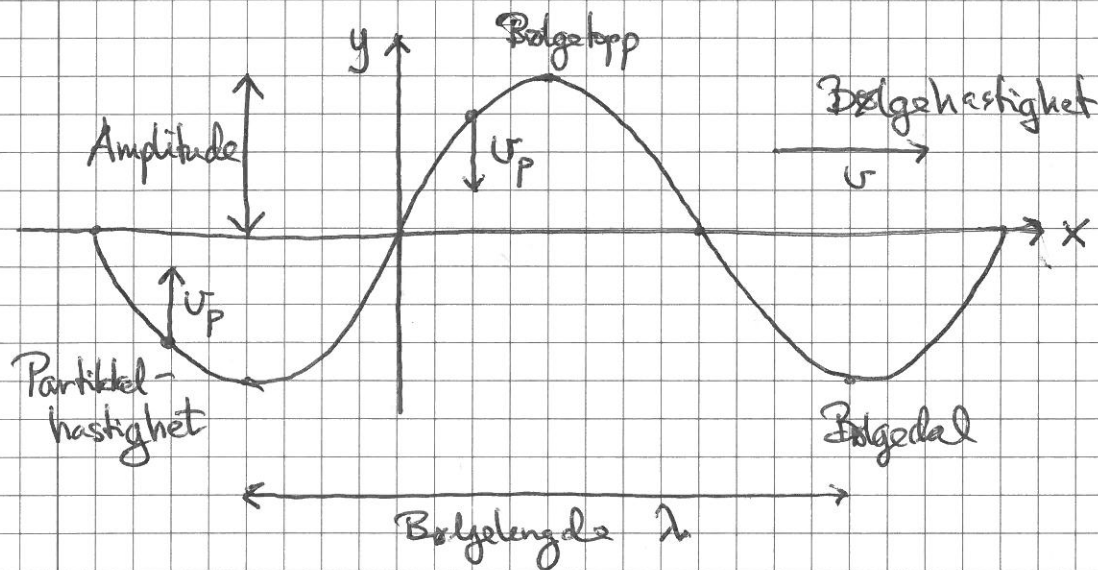
Stående bølger, resonans.

Brytning, Dispersjon  $\rightarrow$  Regnbue etc.

Sjokkbølger.

# Harmonisk bølge [YF 15.2, 15.3; LL 10.2]

- Anta T-bølge på ( $\infty$  lang) streng,  
 $y(x,t)$  = utsving fra likevekt ( $y=0$ ) i pos.  $x$  ved tid  $t$



$T$  = periode = tiden det tar for bølgemønsteret å bevege seg en bølglengde  $\lambda$

$\Rightarrow$  Bølgehastighet:  $v = \lambda / T$  (= "fasehastighet")

•  $f$  = frekvens = antall svingninger (ved gitt pos.  $x$ ) pr tidsenhet

$\Rightarrow f = 1/T$

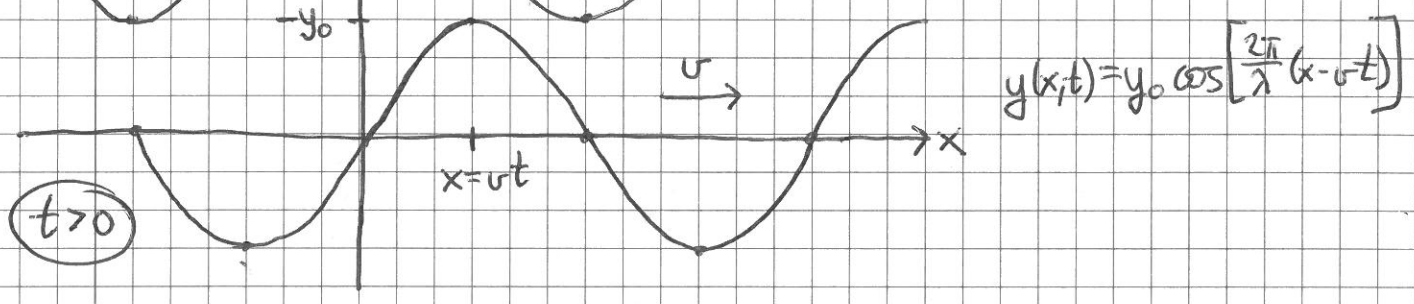
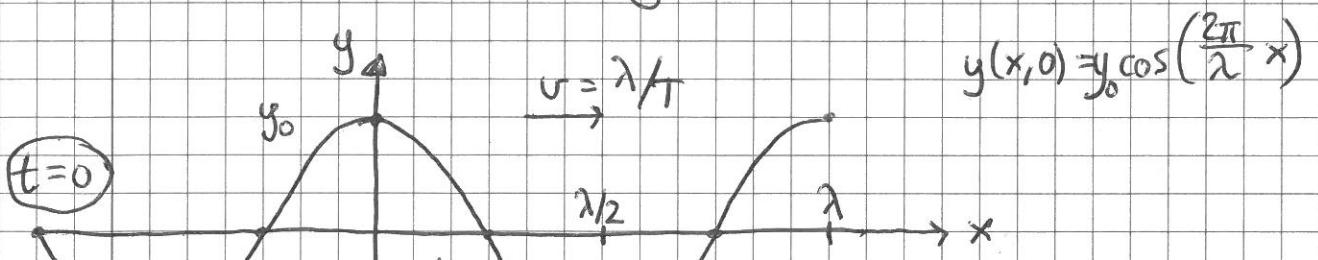
$\omega$  = vinkelfrekvens = bølgens faseendring (ved gitt  $x$ ) pr tidsenhet

•  $\Rightarrow \omega = 2\pi / T = 2\pi f$

Partikkelhastighet:  $v_p = dy/dt$

• [Med L-bølge:  $v_p = d\xi/dt$ ;  $\xi = L$ -utsving]

Matematisk formulering:



Vi har  $v = \lambda/T = \lambda \cdot \omega / 2\pi \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v$

Bølgetallet:  $k \equiv 2\pi/\lambda$   $[k] = m^{-1}$

$\Rightarrow$   $y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t)$

Harmonisk bølge, forpl. i pos. x-retning,  $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$

Tilsvarende:

$y(x,t) = y_0 \cos(kx + \omega t)$  Forpl. i negativ x-retning.

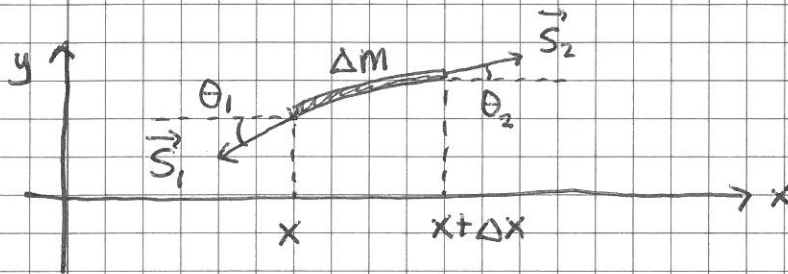
Generelt: T-bølge  $\vec{D}(x,t) = \hat{y} D_0 \cos(kx \pm \omega t + \phi)$   
L-bølge  $\vec{D}(x,t) = \hat{x} D_0 \cos(kx \pm \omega t + \phi)$

# Transversal bølge på streng [YF 15.4; LL 10.1]

70



Strategi: Bruk Newtons 2. lov på lite strengsegment med masse  $\Delta m = \mu \cdot \Delta x$ :



Anta små utsving  $y(x,t)$  [dvs  $y \ll \lambda$  overalt].

Anta kun vertikal bevegelse.

$$\Rightarrow |S_{1x}| = |S_{2x}| = S_x \quad \text{og} \quad S_x \approx S$$

● N2:  $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \Delta m \cdot \vec{a}$

Horisontalt:  $S_{1x} + S_{2x} = \Delta m \cdot a_x = 0$

$$S_{1x} = -S_1 \cos \theta_1 = -S$$

$$S_{2x} = S_2 \cos \theta_2 = S$$

Vertikalt:  $S_{1y} + S_{2y} = \Delta m \cdot a_y = \Delta m \cdot \ddot{y} = \Delta m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

$$S_{1y} = -S_1 \sin \theta_1$$

$$S_{2y} = S_2 \sin \theta_2$$



$$\Rightarrow S_2 \sin \theta_2 - S_1 \sin \theta_1 = \Delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (71)$$

• Dividerer ligningen med  $S$ :

$$\frac{S_2 \sin \theta_2}{S_2 \cos \theta_2} - \frac{S_1 \sin \theta_1}{S_1 \cos \theta_1} = \frac{\Delta m}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \Delta x \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\tan \theta_2} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\tan \theta_1}$

Ser fra figuren at  $\tan \theta = \partial y / \partial x =$  strengens "helling"

$$\Rightarrow \frac{(\partial y / \partial x)_{x+\Delta x} - (\partial y / \partial x)_x}{\Delta x} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$= \partial^2 y / \partial x^2 \quad \text{når } \Delta x \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{S} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

Bølgligning for (små) transversale udsving  $y(x,t)$  på streng med strekkraft  $S$  og masse  $\mu$  pr. længdeenhet

• Generell løsning er

$$\boxed{y(x,t) = f(x-ut) + g(x+ut) ; \quad v = \sqrt{S/\mu}}$$

der  $f$  og  $g$  er vilkårlige to ganger deriverbare funktioner.

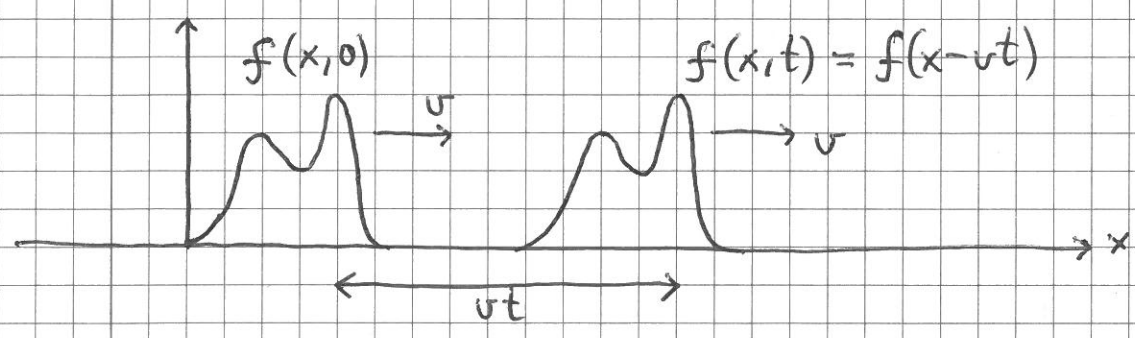
Bevises med  $z = x \pm ut$  og kjernerregel for derivasjon:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

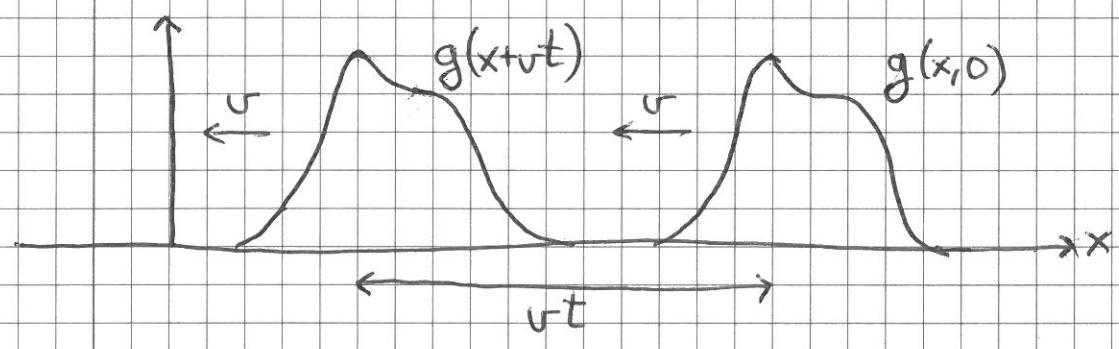
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -v \frac{\partial f}{\partial z} ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -v \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left( -v \frac{\partial f}{\partial z} \right) \frac{\partial z}{\partial t} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Rightarrow \partial^2 f / \partial x^2 = (1/v^2) \partial^2 f / \partial t^2 ; \quad \text{og helt tilsvarende for } g(x+ut) \text{ (ged)}$$

Som på s. 69 ser vi at  $f(x-ut)$  er bølge som forplanter seg i positiv  $x$ -retning, med hastighet  $v$ :



Tilsvarende er  $g(x+ut)$  bølge som forplanter seg i negativ  $x$ -retning, med hastighet  $v$ :



Elastisitet [YF 11.4; LL 7.2]

Hooke's law / Linear respons:

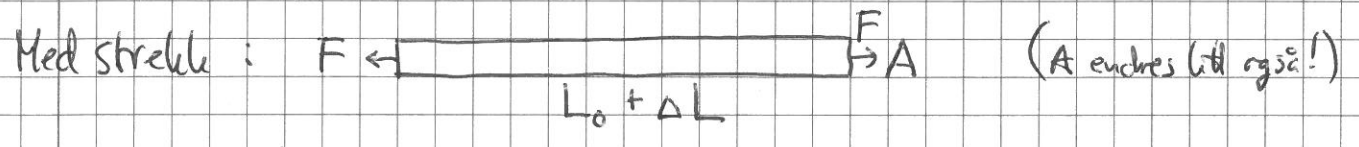
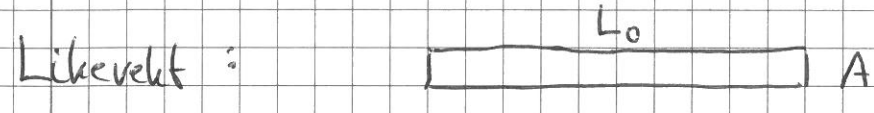
Deformasjon (=relativ lengde-/volumendring) er prop. med mekanisk spenning (=kraft pr flateenhet).

$$\text{Elastisk modul} = \frac{\text{mek. spenning}}{\text{deformasjon}}$$

(elastic modulus = stress/strain)

$$[\text{modul}] = [F/A] = N/m^2 = Pa$$

# Tynn stang (strekk, sammenpressing):



Hookes lov:

$$E = \frac{F/A}{\Delta L/L_0} = \text{elastisitetsmodul}$$

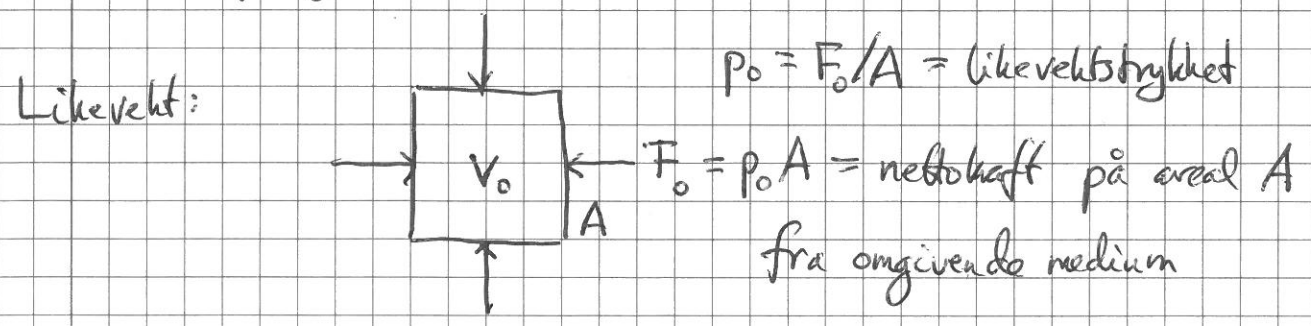
(YF: Youngs modul Y)

Som ideell fjær,  $F = k \cdot \Delta L$ , med fjærkonstant

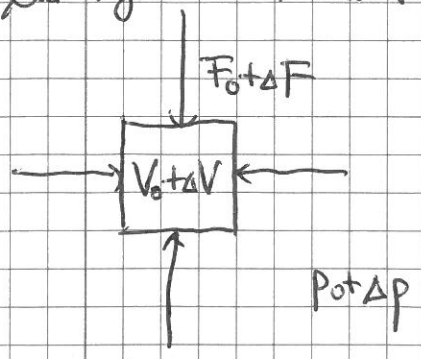
$$k = E \cdot A / L_0$$

Tallos: Stål  $E = 200 \text{ GPa} (= 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa})$

# Volumkompresjon:



Det trykk  $\Rightarrow$  Redusert volum:



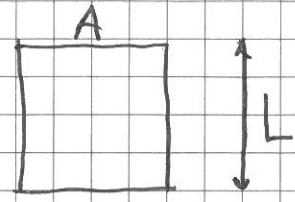
$$B = - \frac{\Delta F/A}{\Delta V/V_0} = - \frac{\Delta P}{\Delta V/V_0}$$

= bullemodul ( $B^{-1} = \text{s\ikkelt kompressibilitet}$ )

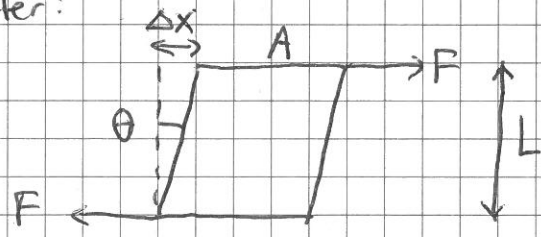
Stål:  $B = 160 \text{ GPa}$     Vann:  $2 \text{ GPa}$   
 Luft:  $10^{-4} \text{ GPa}$

Skjærmodul:

• Likevekt:



Med skjærefreter:



•  $G = \frac{F/A}{\Delta x/L} = \frac{F/A}{\tan \theta} = \text{skjærmodul}$

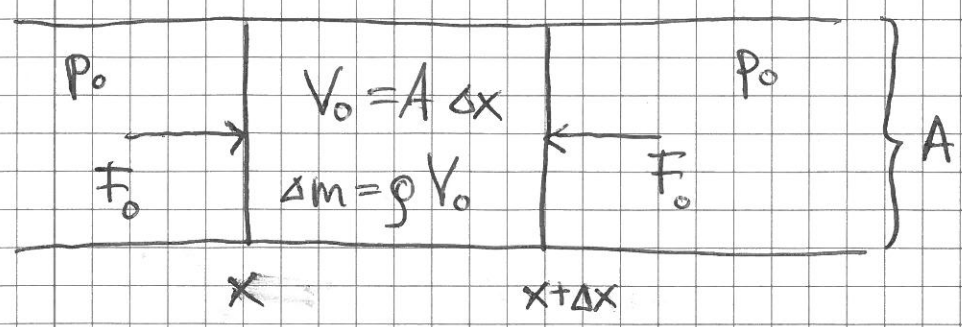
Stål:  $G \approx 79 \text{ GPa}$

( $\Rightarrow E \sim B > G$  for de fleste faste stoffer)

Lyd; longitudinale mekaniske bølger

• [YF 16.1, 16.2; LL 10.6]

Sylinder med fluid, i likevekt:



•  $\rho = \text{masse pr volumenhett}$



Strategi: Bruker Newtons 2 lov på  $\Delta m$ ;

$\xi(x,t)$  = midlere utsving fra likevekt for maldyber med likevektsposisjon  $x$

[ Skriver bare  $\xi(x)$  så lenge vi fokuserer på hvordan  $\xi$  varierer med  $x$  ]

Med forstyrrelse fra likevekt endres ulike størrelser:

Venstre grenseflate flyttes til  $x + \xi(x)$

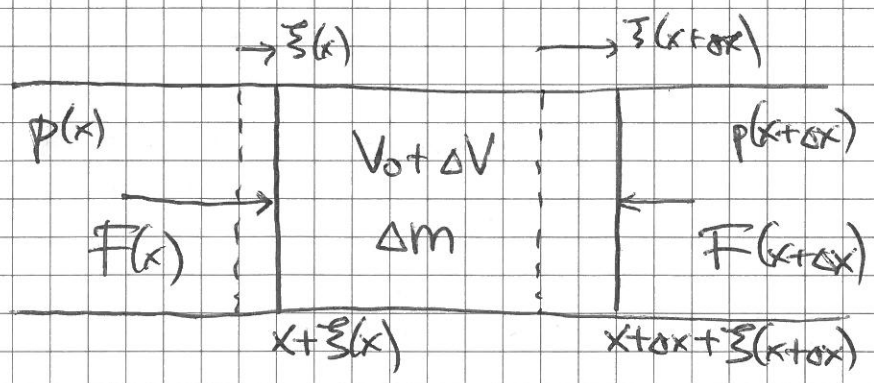
Høyre  $\xrightarrow{\quad}$   $x + \Delta x + \xi(x + \Delta x)$

$\Rightarrow$  Volumet blir  $V_0 + \Delta V$ , Tynghet til venstre blir  $\rho(x) + \Delta\rho(x)$ ,

Tynghet til høyre blir  $\rho(x + \Delta x) = \rho_0 + \Delta\rho(x + \Delta x)$ ,

$\Rightarrow$  Kraft på venstre grenseflate:  $F(x) = F_0 + A \cdot \Delta\rho(x)$

$\xrightarrow{\quad}$  høyre  $\xrightarrow{\quad}$ :  $F(x + \Delta x) = F_0 + A \cdot \Delta\rho(x + \Delta x)$



Ser at  $\Delta V = A \cdot \Delta \xi = A \cdot \left\{ \xi(x + \Delta x) - \xi(x) \right\} = A \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \Delta x = \Delta x \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$

$\Rightarrow$  Tynkendingen kan skrives som:

$$\Delta\rho(x) = -B \cdot \frac{\Delta V}{V_0} = -B \cdot \frac{A \cdot \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \cdot \Delta x}{A \cdot \Delta x} = -B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_x$$

$$N/2 \text{ for } \Delta m: F(x) - F(x+\Delta x) = \Delta m \cdot \ddot{\xi}$$

(76)

$$\Rightarrow A \cdot \{ \Delta p(x) - \Delta p(x+\Delta x) \} = \Delta m \cdot \ddot{\xi}$$

$$\Rightarrow A \cdot (-B) \cdot \left\{ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_x - \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)_{x+\Delta x} \right\} = \Delta m \cdot \ddot{\xi}$$

$$= -\Delta x \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = g \cdot V_0 = g \cdot A \cdot \Delta x$$

$$\Rightarrow B \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = g \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \text{ med } v = \sqrt{B/g}}$$

Dvs: Forstyrrelsen fra liggeret,  $\xi(x,t)$ , ~~er~~ opfylder Samme bølgligning som  $y(x,t)$  på streng!

$$\Rightarrow \text{Generell løsning er } \xi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt),$$

dvs forstyrrelsen (udsvinget) fra liggeret,  $\xi(x,t)$ , forplanter sig i mediet med fart  $v = \sqrt{B/g}$ , som dermed blir lydhastigheden i mediet.

Med tykke stang erstattes B med E:  $v = \sqrt{E/g}$

[Generelt blir det mer komplisert i et fast stoff pga både

trykk- og skjærkrefter. I "bulte" fast-stoff blir

$$v = \sqrt{(B+4G/3)/\rho} \text{ for longitudinale bølger og } \sqrt{G/\rho} \text{ for transversale bølger}]$$



## Tallverdier:

77

Medium	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	B (Pa)	G (Pa)	$v$ (m/s)
Luft	1.29	$1.42 \cdot 10^5$	—	332
Vann	1000	$2.2 \cdot 10^9$	—	1483
Stål	7800	$1.6 \cdot 10^{11}$	$0.8 \cdot 10^{11}$	5800 (longit.) 3200 (transv.)

Seismikk: Transv. bølger gir ~~vibbende~~ <sup>saltene</sup> enn longit. bølger,

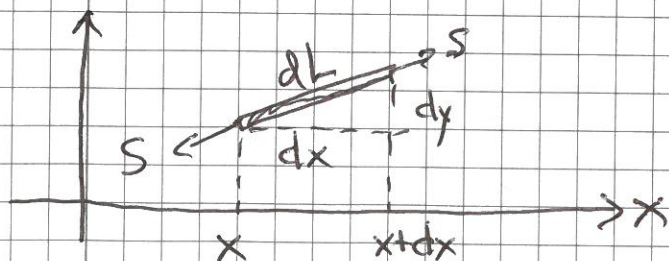
$$v_s = \sqrt{G/\rho} \quad \text{vs} \quad v_p = \sqrt{(B+4G/3)/\rho}$$

("sekunder bølge") ("primær bølge")

Utnyttes til å lokalisere "sentrum" av jordskjelver.

## Energistransport med bølger [YF 15.5; LL 10.5]

Transv. bølge på streng:



Strengelament,  
lengde  $dL$ , masse  $dm = \mu dx$ ,  
strekkraft  $S$

$$\text{Kin. energi: } dK = \frac{1}{2} dm \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \mu dx \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$$

$$\text{Pot. energi: } dU = S \cdot \underbrace{(dL - dx)}_{= \text{forlengelsen}} \quad (\text{Hookes lov})$$

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx \sqrt{1 + (dy/dx)^2}$$

78

$$\bullet \approx dx \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) \quad (\text{fordi } dy \ll dx \text{ for } \underline{\text{små}} \text{ utsving})$$

$$\Rightarrow dU = \frac{1}{2} S dx \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

$\Rightarrow$  Mechanisk energi pr lengdeenhet:

$$\varepsilon = dE/dx = dK/dx + dU/dx$$

$$\bullet = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} S \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

Med  $y(x,t) = y(x \pm vt)$  blir (med  $z = x \pm vt$ )

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \pm v \frac{\partial y}{\partial z} = \pm v \frac{\partial y}{\partial x},$$

og videre er  $v = \sqrt{S/\mu}$ , dvs  $S = \mu v^2$

$$\bullet \Rightarrow \varepsilon = \mu v^2 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 = \mu \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 = \pm \mu v \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$[\varepsilon] = \text{J/m}$$

Med  $y(x,t) = y(x \pm vt)$  er også  $\frac{\partial y}{\partial t}$  og  $\frac{\partial y}{\partial x}$  funksjoner av

kombinasjonen  $x \pm vt \Rightarrow \varepsilon(x,t) = \varepsilon(x \pm vt)$

$\Rightarrow \varepsilon$  oppfyller bølge lign.  $\partial^2 \varepsilon / \partial x^2 = (1/v^2) \partial^2 \varepsilon / \partial t^2$

$\Rightarrow$  energien forplanter seg "med bølgen" / "som en bølge", med samme hastighet som utsvinget  $y$  (ert  $\S$  vår langit. bølge; lyd)



Eks: Harmonisk bølge

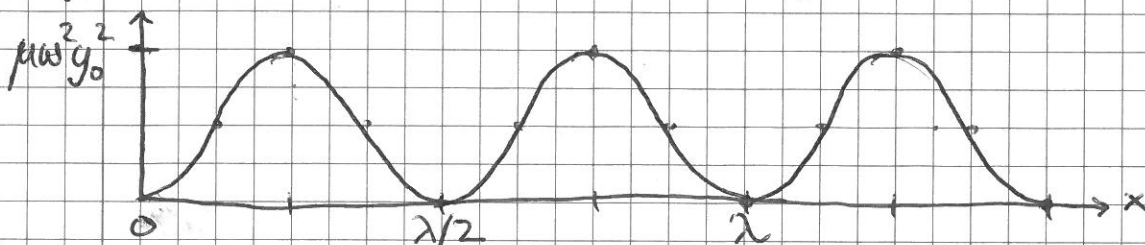
(79)

$$y(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t) \quad (k = 2\pi/\lambda, \omega = 2\pi/T, v = \omega/k)$$

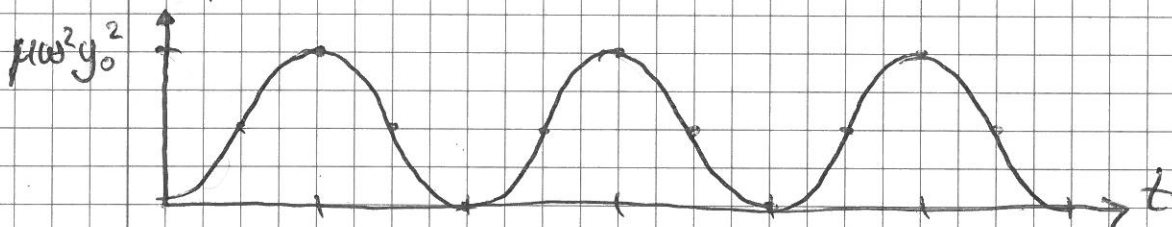
$$\Rightarrow \partial y / \partial x = -ky_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\Rightarrow \epsilon(x,t) = \mu v^2 \cdot k^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Øjebliksbilde,  $t=0$ :  $\epsilon(x,0) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 kx$



Faststed,  $x=0$ :  $\epsilon(0,t) = \mu \omega^2 y_0^2 \sin^2 \omega t$



Her er her en plan longitudinal bølge (lydbølge):

1D  $\rightarrow$  3D;  $\mu \rightarrow \rho =$  masse pr vol. enh.

$\epsilon = dE/dx \rightarrow dE/dV =$  energi pr vol. enh.

$y \rightarrow \xi =$  partikkelens (midlere) utsving fra likevekt

$$\Rightarrow \epsilon(x,t) = \rho v^2 \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 = \rho \left( \frac{\partial \xi}{\partial t} \right)^2 = \pm \rho v \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$[\epsilon] = \text{J/m}^3$$

Midlere energitæthed i harmoniske bølge.

Figur s. 79 for  $\epsilon(x,0)$  viser at

$$\bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \quad (\text{romlig middelværdi over en bølglængde})$$

og fig. for  $\epsilon(0,t)$  viser at

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y_0^2 \quad (\text{tidsmiddel over en periode})$$

Formelt er

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^\lambda \epsilon(x,t) dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \epsilon(x,t) dx$$

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{\int_0^T \epsilon(x,t) dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T \epsilon(x,t) dt$$

Merk at  $\langle \sin^2 \varphi \rangle = \langle \cos^2 \varphi \rangle = \frac{1}{2}$ , fordi

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1, \text{ dvs } \langle \sin^2 \varphi \rangle + \langle \cos^2 \varphi \rangle = \langle 1 \rangle = 1.$$

For plan harmonisk lydølge:

$$\bar{\epsilon} = \langle \epsilon \rangle = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

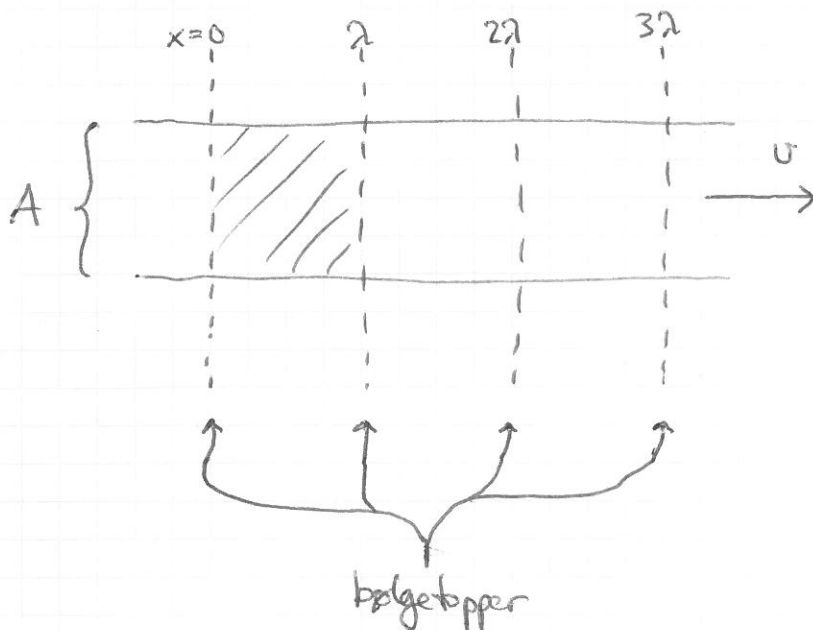
$$\text{når } \xi(x,t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

## Bølgens intensitet [YF 16.3; LL 10.5]

$I$  = middlere overført energi pr tidsenhet og pr flateenhet  
 = middlere overført effekt pr flateenhet

$$\Rightarrow [I] = \text{W/m}^2$$

Med plan harmonisk lydølge:



Energiinnhold i bølgen, mellom  $x=0$  og  $x=\lambda$ :

$$\bar{E} \cdot V = \bar{E} \cdot A \cdot \lambda$$

Denne energien passerer arealet  $A$  ved  $x=\lambda$  i løpet av en periode  $T$ :

$$\Rightarrow I = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{\bar{E} A \lambda / T}{A} = \underline{\underline{\bar{E} \cdot v}} \quad (v = \lambda / T)$$

Desibelskalaen:

Knapt hørbar lyd:  $I = 10^{-12} \text{ W/m}^2$

Smertegrensen:  $I = 1 \text{ W/m}^2$

Dvs: Stort spenn i tallverdiene

⇒ Hensiktsmessig med logaritmisk skala

$$\boxed{\beta \text{ dB} = \beta = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right)} \quad (\text{Lydtrykksnivå})$$

med  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2 = \text{standard referanseverdi}$

Dermed:

Høregrensen:  $\beta = 10 \log \frac{10^{-12}}{10^{-12}} = \underline{0 \text{ dB}}$

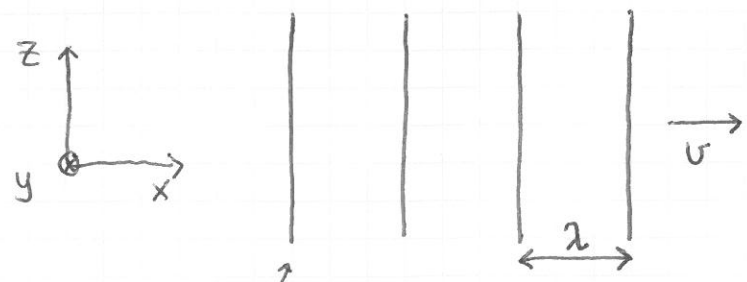
Normal samtale:  $\beta = 10 \log \frac{10^{-6}}{10^{-12}} = \underline{60 \text{ dB}}$

Smertegrensen:  $\beta = 10 \log \frac{1}{10^{-12}} = \underline{120 \text{ dB}}$



# Bølger i vilkårlig retning

Plan harmonisk bølge i pos. x-retning:



$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$k = 2\pi/\lambda, \quad \omega = 2\pi/T$$

$$v = \lambda/T = \omega/k$$

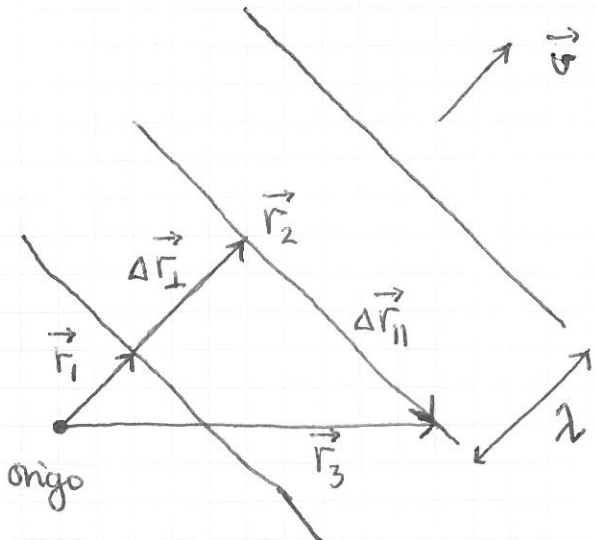
$$\vec{v} = v \hat{x}$$

bølgefronter (feks. topper);

flater med lik fase overalt i gitt ~~fl~~ bølgefront,

faseforskjell  $2\pi$  mellom "nabo-bølgefronter" (med  $\Delta x = \lambda$ )

Plan harm. bølge i vilkårlig retning:



$$\vec{\xi}(\vec{r},t) = \xi_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

Longit:  $\xi_0 \parallel \vec{v}$

Transv:  $\xi_0 \perp \vec{v}$

Anta feks.  $t=0$  :  $\vec{\xi}(\vec{r},0) = \xi_0 \sin \vec{k} \cdot \vec{r}$

Lik fase i  $\vec{r}_2$  og  $\vec{r}_3 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}_2 = \vec{k} \cdot \vec{r}_3 \Rightarrow \vec{k} \cdot (\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = 0$

$\Rightarrow \vec{k} \cdot \Delta\vec{r}_{II} = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \Delta\vec{r}_{II} \Rightarrow \vec{k} \parallel \vec{v}$

$\Rightarrow$  Bølgetallsvektoren  $\vec{k}$  har samme retning som bølgens forpl.ktn. retning ( $\vec{v}$ )

Faseforskjell  $2\pi$  mellom  $\vec{r}_1$  og  $\vec{r}_2$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{r}_2 = \vec{k} \cdot \vec{r}_1 + 2\pi \Rightarrow \vec{k} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 2\pi$$

$$\Rightarrow \vec{k} \cdot \Delta\vec{r}_\perp = 2\pi \Rightarrow k \cdot \lambda = 2\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{v}}$$

Hvis  $\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)$  er  $\vec{k} = -\frac{2\pi}{\lambda} \hat{v}$

På komponentform:  $\vec{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$

$$k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$\lambda = 2\pi/k$$

### Kulebølger

Kulesymmetrisk bølgekilde (høytaler, evt. sola for E.M. bølger)

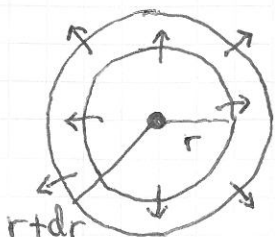
$\Rightarrow$  bølge med  $\vec{k} = k \hat{r}$  og lik  $I$  i alle retninger,  $I = I(r)$

Bølgefronter: Kuleskall med areal  $A = 4\pi r^2$

Energibevarelse  $\Rightarrow$  Samme energi  $E(r)$  pr tidsenhet

gjennom  $A(r)$  som energi  $E(r+dr)$  pr tidsenhet

gjennom  $A(r+dr)$ :  $\langle P(r_1) \rangle = \langle P(r_2) \rangle$  nærtliggende av  $r$



$$\Rightarrow 4\pi r_1^2 I(r_1) = 4\pi r_2^2 I(r_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{I(r) \sim 1/r^2 \text{ for kulebølger}}$$

### Sylinderbølger

Sylindersymmetrisk bølgekilde (f.eks. lang tynd højttaler)

⇒ sylinderformede bølgefronter med omkrets  $2\pi r$ , længde  $L$ , og dermed areal  $A = 2\pi r \cdot L \sim r$  (r = afstand fra kilden)

⇒  $I(r) \sim 1/r$  for sylinderbølger

### Plane bølger

Plan bølgekilde (f.eks. stor vibrerende plade)

⇒ plane bølgefronter med areal  $A$  uafhængig af afstanden fra kilden

⇒  $I = \text{konstant}$  (uafh. af  $r$ ) for plane bølger

Eks: Du står 10 m fra en kuleformet lydkilde.

Hvor langt ude må du gå for at senke lydtrykniveauet med 30 dB?

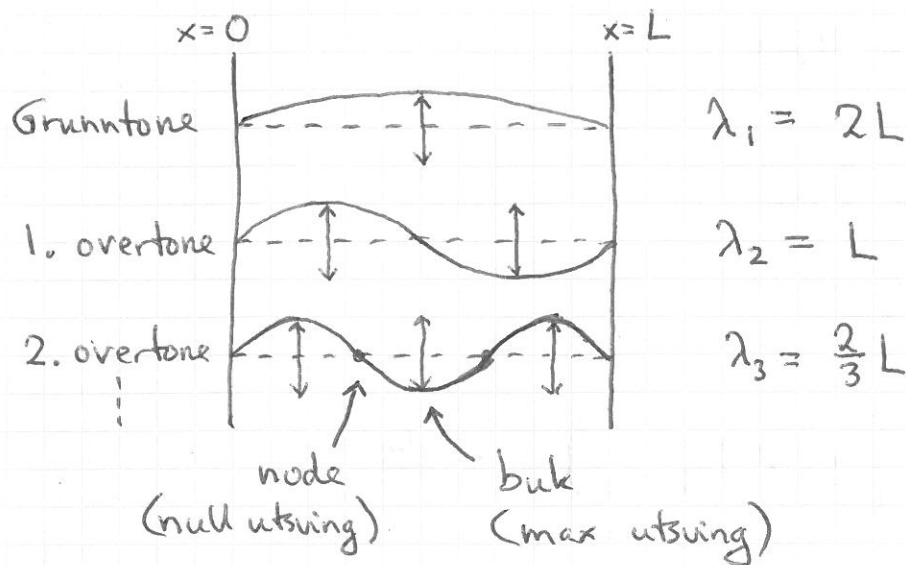
Løsn: 
$$-30 = \beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} - 10 \log \frac{I_1}{I_0}$$

$$= 10 \log(I_2/I_1) = 20 \log(r_1/r_2) = -20 \log(r_2/r_1)$$

$$\Rightarrow r_2/r_1 = 10^{1.5} \approx 32 \Rightarrow \underline{\underline{r_2 \approx 320 \text{ m}}}$$

# Stående bølger [YF 15.7, 15.8, 16.4; LL 10.3] (86)

Ren harm. bølge på streng, længde  $L$ , fast i begge ender, må ha  $L = n \cdot \lambda/2$ ;  $n=1, 2, 3, \dots$



Streng-  
instruenter

Generell <sup>(harmonisk!)</sup> løsning av bølglign:  $y(x,t) = y_1 \sin(kx - \omega t) + y_2 \sin(kx + \omega t)$

$$y(0,t) = 0 \Rightarrow -y_1 \sin \omega t + y_2 \sin \omega t = 0 \Rightarrow y_2 = y_1 = y_0$$

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(x,t) &= y_0 [\sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t] \\ &= 2y_0 \sin kx \cos \omega t \end{aligned}$$

Dvs: Harm. svingn. ( $\cos \omega t$ ) med stedsabh. amplitude ( $2y_0 \sin kx$ )

Kalles stående bølge; ingen netto energitransport.

$$y(L,t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n},$$

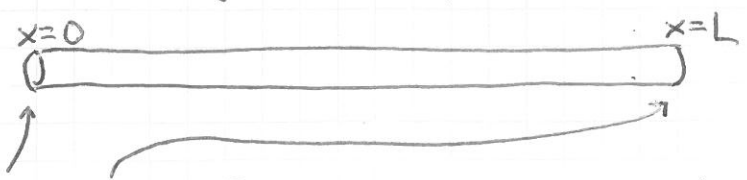
som allerede fastslått. Med  $v = \sqrt{S/\mu}$  blir mulige frekvenser for stående bølger (længde  $L$ ; fast i begge ender)

$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \sqrt{S/\mu} \cdot n/2L$

 $n=1, 2, 3, \dots$



Tilsvarende får vi stående lydbølger i langt, tynt rør, længde  $L$ , åbent (eller lukket) i begge ender:



Blåseinstrumenter

Max udsving for udsvingsbølgen  $\Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} \Rightarrow$

(evt. null udsving hvis lukket i begge ender)

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{\sqrt{B/\rho} \cdot n}{2L}$$

( $n=1,2,3, \dots$ )

Med "to ulige" ender:

(Streng med 1 fast og 1 fri ende; Rør med 1 åben og 1 lukket ende)

$$\lambda_1 = 4L, \lambda_2 = 4L/3, \lambda_3 = 4L/5, \dots \Rightarrow \lambda_n = \frac{4L}{2n-1}; n=1,2, \dots$$

Trykbølgen:  $\Delta p(x,t) = -B \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x}$  (se s.75)

Eks: Rør, to åbne ender,  $\xi(x,t) = 2\xi_0 \sin kx \cos \omega t$

$$\Rightarrow \Delta p(x,t) = -2kB\xi_0 \cos kx \cos \omega t$$

$\Rightarrow$  max amplitude for  $\Delta p$  der  $\xi$  har nullpunkt, og omvendt

Eks: Cellostreng, grundtone 146.8 Hz (D), længde 700 mm, masse 4.0 g/m. Bestem  $S$ .

Løs:  $f_1 = v/\lambda_1 = \sqrt{S/\mu}/2L$

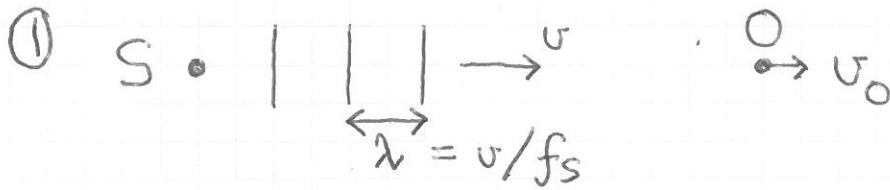
$$\Rightarrow S = 4f_1^2 L^2 \mu = 4 \cdot 146.8^2 \cdot 0.700^2 \cdot 4.0 \cdot 10^{-3} \frac{s^{-2} m^2 kg}{m} = N$$

$$\approx \underline{\underline{169 N}}$$

# Dopplereffekten [YF 16.8; LL 10.8]

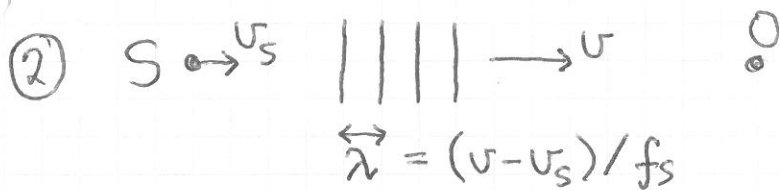
(88)

Lydkilde (S) og observatør (O) i relativ bevægelse langs forbindelseslinjen  $\Rightarrow$  Observeret frekvens  $f_o \neq$  Utsendt frekvens  $f_s$

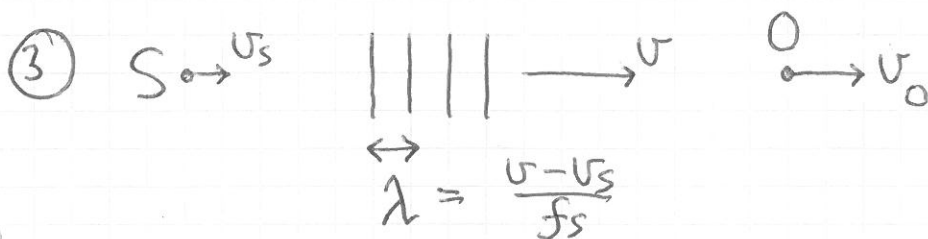


Bølgefart relativt O:  $v - v_o$

$$\Rightarrow f_o = \frac{v - v_o}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v} \cdot f_s < f_s \text{ hvis } v_o > 0$$



$$\Rightarrow f_o = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{v - v_s} \cdot f_s > f_s \text{ hvis } v_s > 0$$



$$\Rightarrow f_o = \frac{v - v_o}{\lambda} = \frac{v - v_o}{v - v_s} \cdot f_s$$

④ Hvis vind:  $v_m =$  luftas fart  $\Rightarrow v$  erstattes av  $v + v_m$

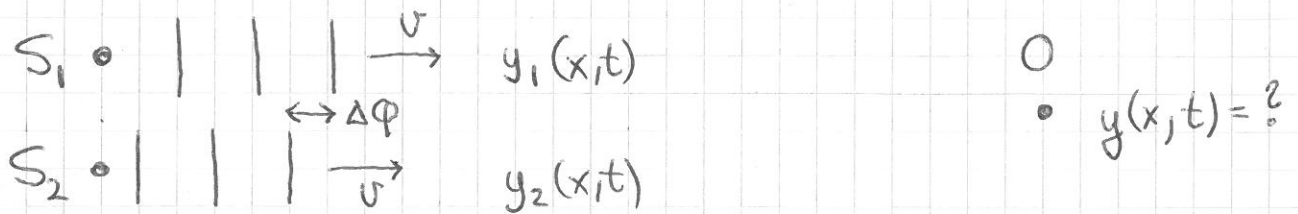
$$\Rightarrow \boxed{f_o = \frac{v + v_m - v_o}{v + v_m - v_s} f_s}$$

# Interferens [YF 15.6, 16.6; LL 10.7]

(89)

= overlappning (sum!) av to eller flere bølger på samme sted til samme tid

1) Samme retning og frekvens, ulik fase



Total bølge ved 0:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_0 \cos(kx - \omega t) + y_0 \cos(kx - \omega t + \Delta\phi)$$

$$\text{Bulker } \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow y(x,t) = 2y_0 \cos \frac{\Delta\phi}{2} \cdot \cos(kx - \omega t + \frac{\Delta\phi}{2})$$

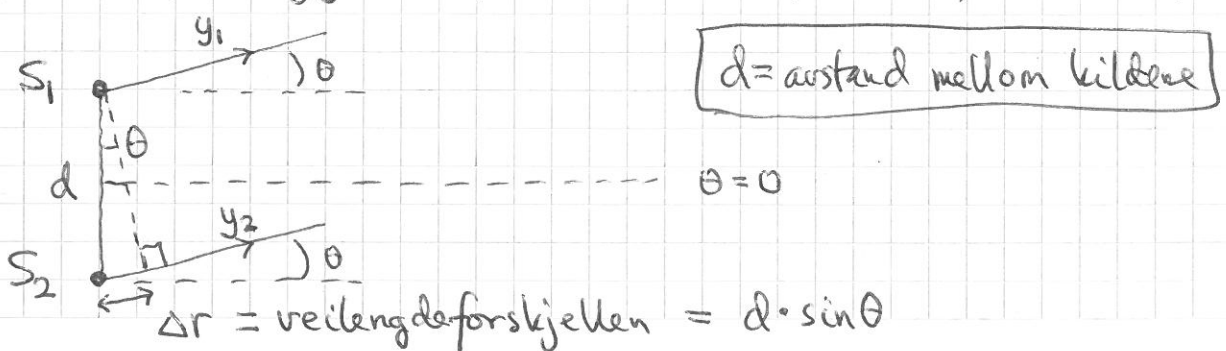
$\Rightarrow$  Konstruktiv interferens hvis  $\Delta\phi = 0$ , dvs  $y_1$  og  $y_2$  i fase ved 0.

Hvis en bølge gir <sup>utviklet</sup>  $I_1$  ved 0, vil to bølger i fase gi  $I_2 = 4I_1$

Destruktiv interferens hvis  $\Delta\phi = \pi$ , dvs  $y_1$  og  $y_2$  i motfase ved 0.

Da blir  $I_2 = 0$  ved 0.

2) Retningsavhengig interferens med 2(eller flere)kilder i fase



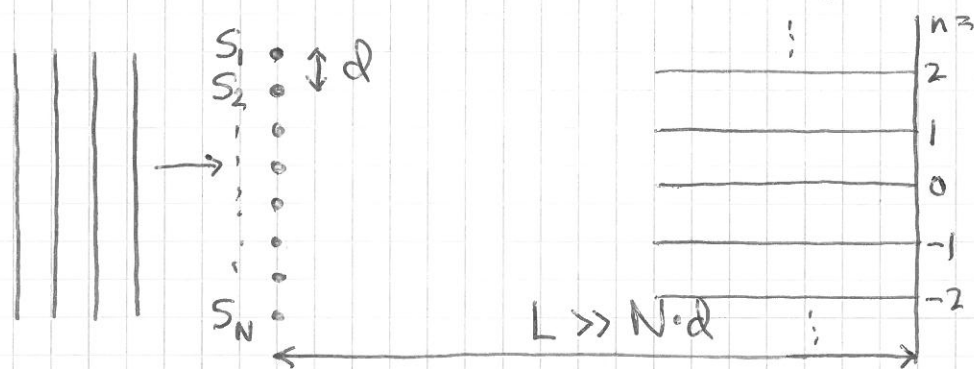
Antar at  $y_1$  og  $y_2$  observeres på skjerm/detektor i avstand  $L \gg d$  fra kildene.

(90)

Konstruktiv interferens når  $\Delta r = d \sin \theta = n \cdot \lambda$   
Destruktiv " " " "  $\Delta r = d \sin \theta = (n + 1/2) \lambda$  }  $n = 0, \pm 1, \dots$

3) Samme som 2), men med mange bølgekilder i fase.

Oppnås med diffraksjonsgitter: Mange smale spalteåpninger med avstand  $d$  i mellom. Plan bølge inn fra venstre:



Med retninger som oppfyller  $d \sin \theta = n \lambda$  for

Konstruktiv interferens mellom alle  $N$  delbølger.

Alle andre retninger gir intensitet  $\approx$  null.

Demo: Laserpenner + diffraksjonsgitter.

Laserlys er E.M. bølge med skarpt definert bølglengde  $\lambda$ .

Rød: 650 nm Grønn: 532 nm Blå: 405 nm

Gitter: 100, 300 og 600 spalter pr mm

$\Rightarrow d = \frac{1}{100}$  mm osv.



4) Svevning - "Interferens i tid"  
 [YF 16.7; LL 10.7]

To lydtilde med ~~litt~~ forskjellig frekvens:

$S_1 \cdot | | | \rightarrow \xi_1 = \xi_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t) \quad x=0$

$S_2 \cdot | | | \rightarrow \xi_2 = \xi_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t) \quad \xi(0,t) = ?$   
 (din trommehinne!)

$\leftarrow \lambda_2 > \lambda_1$

$\Rightarrow \xi(x,t) = 2 \xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta \omega}{2} t\right) \cdot \cos(kx - \omega t)$

der  $\Delta k = k_1 - k_2$ ,  $\Delta \omega = \omega_1 - \omega_2$ ,  $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$ ,  $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ,

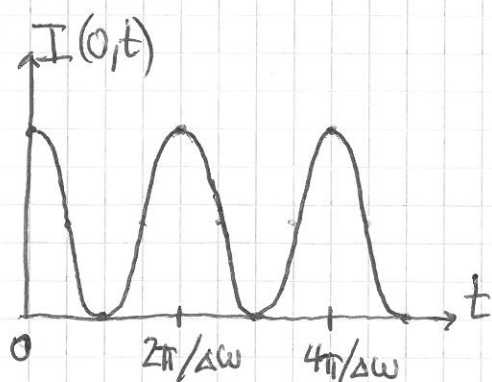
og vi antar  $\Delta k \ll k$ ,  $\Delta \omega \ll \omega$

Ved  $x=0$ :  $\xi(0,t) = 2 \xi_0 \cos\left(\frac{\Delta \omega}{2} t\right) \cdot \cos \omega t$

Intensitet ved  $x=0$ :

$I(0,t) = \langle \epsilon \rangle \cdot v = \frac{1}{2} \rho \omega^2 (2 \xi_0)^2 v \cdot \cos^2\left(\frac{\Delta \omega}{2} t\right)$   
 $= \rho \omega^2 \xi_0^2 v \{ 1 + \cos(\Delta \omega \cdot t) \}$

der  $\langle \epsilon \rangle$  er tidsmiddel over en periode  $T = 2\pi/\omega$  av den raske svingningen (den som gir tonen)



$\Rightarrow$  Vi hører tonen  $f = \frac{f_1 + f_2}{2}$ , med modulert intensitet ("svevning", "beats") med svevefrekvens

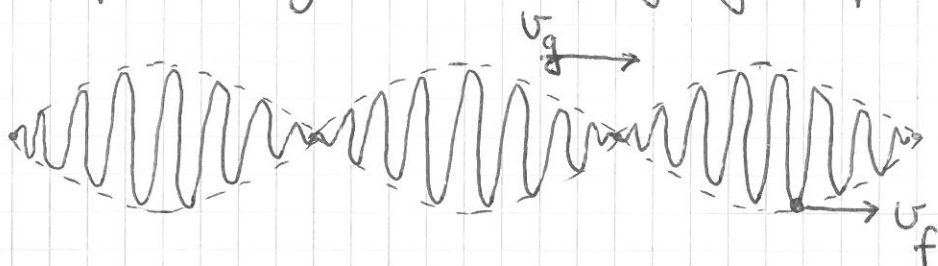
$\underline{f_s} = \frac{1}{T_s} = \frac{\Delta \omega}{2\pi} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = \underline{\underline{f_1 - f_2}}$

# Grppehastighet og dispersjon

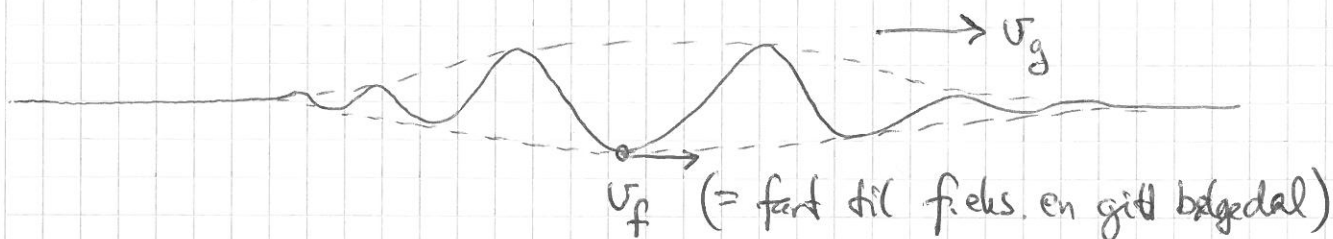
(92)

Sum av  $\xi_1$  og  $\xi_2$  på s. 91 utgjør bølgepakke med raskt varierende bærebølge  $\cos(kx - \omega t)$  med hastighet  $v = \omega/k = v_f =$  fasehastigheten, og en langsomt varierende modulasjonsbølge  $\cos(\frac{1}{2}\Delta kx - \frac{1}{2}\Delta \omega t)$  med hastighet  $\Delta \omega / \Delta k$ . Med små  $\Delta \omega$  og  $\Delta k$  blir dette

$v_g = \frac{d\omega}{dk} =$  grppehastigheten,  
dvs felleshastigheten til bølgetopp/-pakken/-gruppen.



En sum av mange harmoniske delbølger med bølglengder omkring en "typisk" bølglengde  $\lambda$  kan gi totalt sett en romlig avgrenset bølgepakke:



- Energien forplanter seg nå med farten  $v_g = d\omega/dk$
  - Dispersjonsrelasjonen  $\omega(k)$  bestemmer  $v_g$
  - Bølger på streng og lydbølger i fluid har fasefart uavh. av  $k$  (hvor  $v_f = \sqrt{S/\mu}$  og  $v_f = \sqrt{B/\rho}$ ).
- Da er  $\omega = v_f k$ , og  $v_g = d\omega/dk = v_f$  (linear dispersjon).

## Overflatebølger på vann (Video på hjemmesida!)

(93)

To typer krefter påvirker "overflatens dynamikk":

Tyngdekraften og overflatespenningen. Dette gir (på dypt vann):

$$\omega(k) = \sqrt{g \cdot k + \delta k^3 / \rho} ; \text{ med } g = 9.81 \text{ m/s}^2, \rho = 1000 \text{ kg/m}^3 \\ \text{og } \delta = 0.073 \text{ N/m (} = \text{overflatespenningen).}$$

Tyngdebølger:  $gk \gg \delta k^3 / \rho$ . Kapillarbølger:  $gk \ll \delta k^3 / \rho$

$$\text{Like viktige når } gk = \delta k^3 / \rho \Rightarrow \lambda = 2\pi \sqrt{\delta / g\rho} \approx \underline{1.7 \text{ cm}}$$

Generelt, for tyngdebølger;  $D = \text{vanndybden}$ :

$$\omega^2(k) = gk \tanh(kD)$$

Eks: Tyngdebølger på dypt vann.

$$\omega \approx \sqrt{gk} \Rightarrow v_f = \sqrt{g/k}, v_g = \frac{1}{2} \sqrt{g/k} = \frac{1}{2} v_f$$

$\Rightarrow$  Bølgetopper spaserer framover i bølgetoget!

Kapillarbølger.

$$\omega = \sqrt{\delta k^3 / \rho} \Rightarrow v_f = \sqrt{\delta k / \rho}, v_g = \frac{3}{2} v_f$$

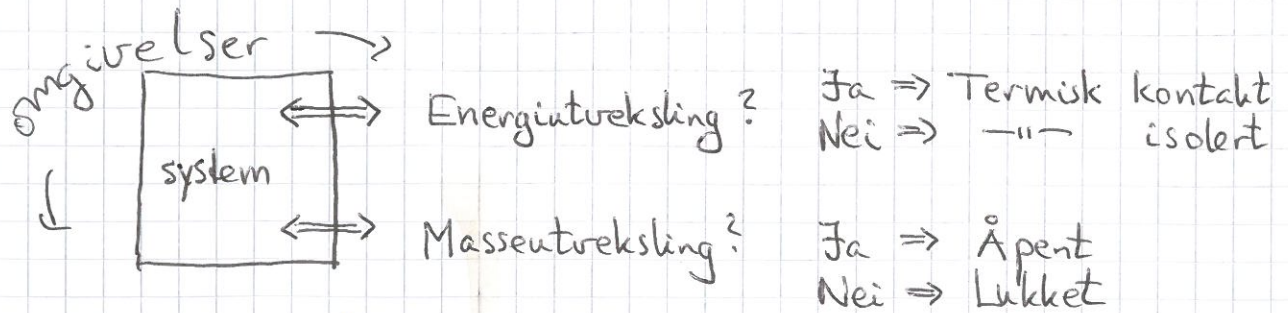
$\Rightarrow$  Bølgetopper spaserer bakover i bølgetoget!

Tyngdebølger på grunt vann ( $\tanh x \approx x$  når  $|x| \ll 1$ )

$$\omega^2 = gDk^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{gD} \cdot k \Rightarrow v_g = v_f = \sqrt{gD} \quad \left( \begin{array}{l} \text{Jf.} \\ \text{Tsunami} \end{array} \right)$$



System og omgivelser



En kaffekopp utveksler både energi (varme) og masse (molekyler) med omgivelsene, dvs et åpent system i termisk kontakt.

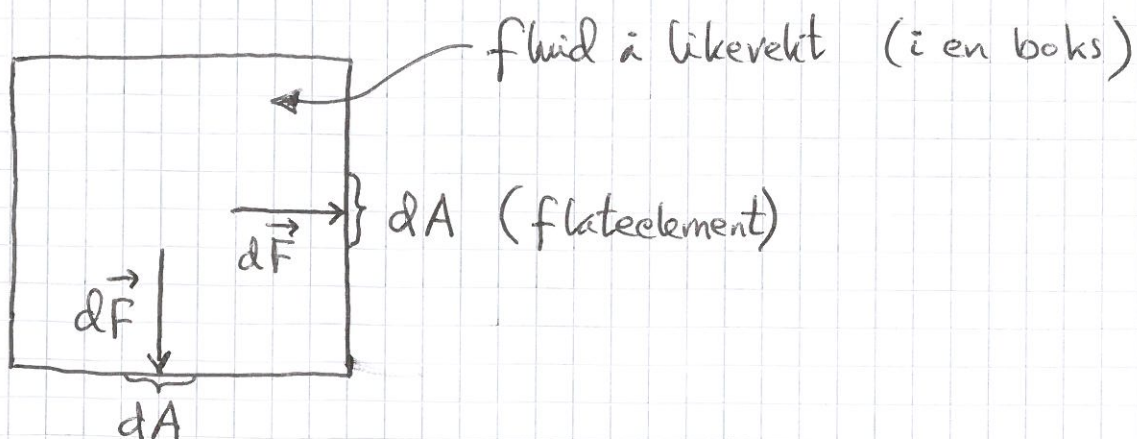
En god termos utveksler verken energi eller masse, dvs lukket system, termisk isolert fra omgivelsene.

~ ~ ~ ~ ~

Sentrale størrelser er trykk og temperatur!

~ ~ ~ ~ ~

Trykk [YF 11.4, 12.2, 12.3; ~~LL~~ LL 7.2, 8.1-8.4]



$p = dF/dA = \text{trykket i fluidet (skalar, isotrop)}$

$[ d\vec{F} = -p d\vec{A} \quad \begin{matrix} d\vec{F} \uparrow \\ \text{-----} \\ d\vec{A} \downarrow \end{matrix} ]$



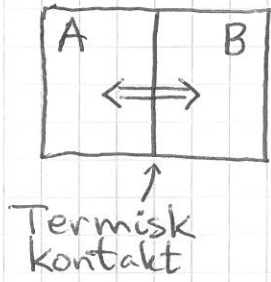
[p] = N/m<sup>2</sup> ≡ Pa (pascal)

1 atm = 1.01325 · 10<sup>5</sup> Pa (≈ 10<sup>5</sup> Pa)

1 bar = 10<sup>5</sup> Pa

1 psi ("pound pr square inch") =  $\frac{0.454 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2}{(25.4 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2} \approx 6.9 \text{ kPa}$

Temperatur. Termisk likevekt [YF 17.1; LHL 13.1]



Hvis null netto energistrom mellom A og B, så er A og B i termisk likevekt, og har samme temperatur,  $T_A = T_B$

Metoder for måling av T (dvs termometre):

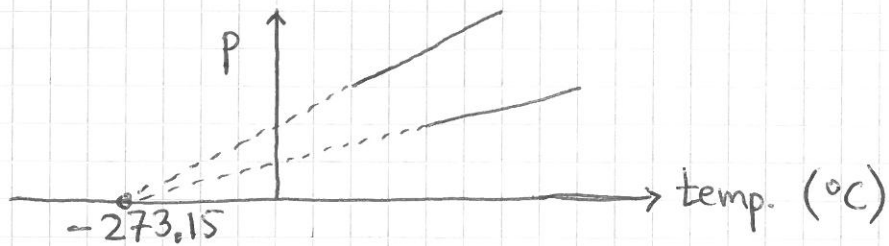
Endring i T gir endring i væskevolum, gasstrykk, lengde av fast stoff, elektrisk motstand etc,

Tallfesting av T (Celsius og andre):

H<sub>2</sub>O fryser ved 1 atm : 0 °C

H<sub>2</sub>O koker —"—" : 100 °C

Måling av  $p(T)$  for ulike gasser (lav tetthet; konstant volum) (96)



Dvs:  $p$  er prop. med temp., og ekstrapolering til  $p=0$  gir  $-273.15$  °C for alle gasser

Innfører absolutt temperatur  $T$ , med enhet K (kelvin) slik at  $0$  K tilsvarer  $-273.15$  °C (det absolutte nullpunkt). Lar  $\Delta T = 1$  K tilsvare  $\Delta T = 1$  °C.

$\Rightarrow$   $H_2O$  fryser ved  $273.15$  K, koker ved  $373.15$  K.

Standard referansesystem:

$H_2O$  med damptrykk  $p_t = 612$  Pa og temperatur  $T_t = 273.16$  K. Kalles trippelpunktet for  $H_2O$ , fordi is, vann og vanndamp kan være i samtidig likevekt ved  $p_t$  og  $T_t$ .

(Ikke mulig ved andre kombinasjoner av  $p$  og  $T$ )

# Ideell gass [YF 18.1; LHL 13.3]

(97)

Empirisk, for gasser med lav tetthet: [Senere: Mikroskopisk utledning]

$$pV = nRT$$

Tilstandsligning for ideell gass

Tilstandsvariable:  $p = \text{trykk}$  ( $\text{N/m}^2 = \text{J/m}^3$ )

$V = \text{volum}$  ( $\text{m}^3$ )

$T = \text{temperatur}$  (K)

$n = \text{stoffmengde}$  (mol)

Gasskonstanten:  $R = 8.314 \text{ J/mol} \cdot \text{K}$

1 mol =  $6.022 \cdot 10^{23}$  molekyl (partikler)  
=  $N_A$  (Avogadros tall)

$\Rightarrow N = n \cdot N_A$  (antall molekyl)

$[n] = \text{mol}$

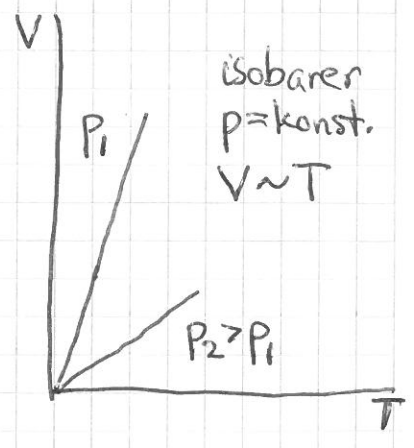
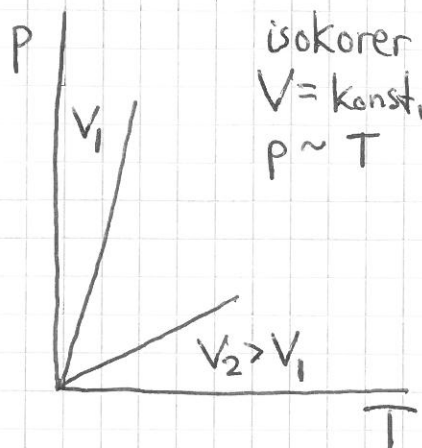
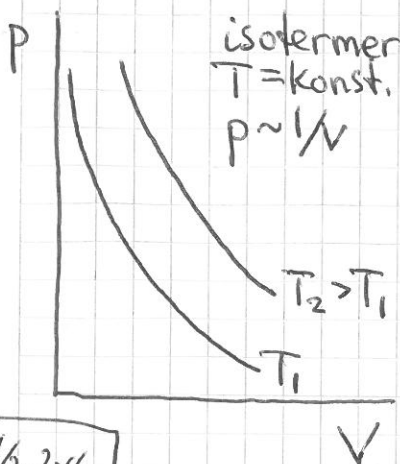
$[N] = 1$

$\rightarrow [N_A] = 1/\text{mol}$

$\Rightarrow pV = \frac{N}{N_A} RT = Nk_B T$

$k_B = R/N_A = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  (Boltzmanns konstant)

Grafisk, med konstant stoffmengde ( $n$ ):



17.03.16

## Noen termodynamiske koeffisienter [YF 17.4; LHL 13.2] (98)

Volumutvidelseskoeff:

$$\beta = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left\{ \frac{\Delta V/V}{\Delta T} \right\}_{p=\text{konst.}} = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p$$

Lineær utvidelseskoeff: (kun faste stoffer)

$$\alpha = \frac{1}{L} \left( \frac{\partial L}{\partial T} \right)_p = \frac{1}{3} \beta \quad (\text{da } L = V^{1/3})$$

Kompressibilitet; bulkmodul: (isoterm)

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = B^{-1}$$

Trykk-koeff:

$$\gamma = \frac{1}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$$

Eks 1:  $\beta(\text{H}_2\text{O}) < 0$  for  $0^\circ\text{C} < T < 4^\circ\text{C}$

$\Rightarrow \rho(4^\circ\text{C}) > \rho(0^\circ\text{C}) \Rightarrow$  (dype) innsjøer bunnfryser ikke  
[ $\rho = m/v = \text{masse tettheten}$ ]

Eks 2: Hva er  $\beta$ ,  $B$  og  $\gamma$  for ideell gass?

Løsning:  $\beta = \frac{1}{V} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{Nk_B T}{p} \right)_p = \frac{Nk_B}{pV} = \frac{1}{T}$

$$B = -V \left( \frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = -V \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{Nk_B T}{V} \right)_T = \frac{Nk_B T}{V} = p$$

$$\gamma = \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{Nk_B T}{V} \right)_V = \frac{Nk_B}{pV} = \frac{1}{T} = \beta$$

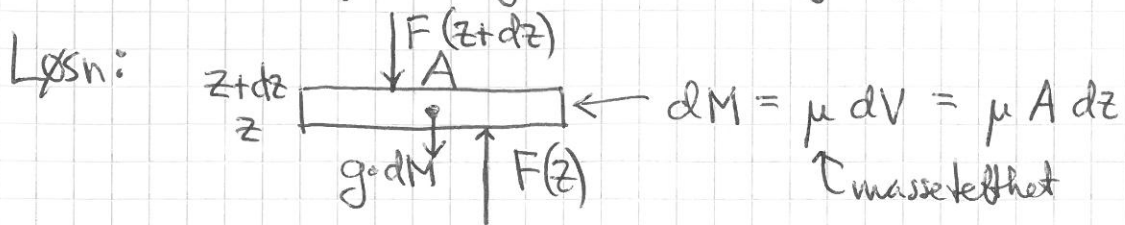
Eks 3: Hvorfor stiger spritzøylen i termometeret når  $T$  øker?

Svar: Fordi  $\beta(\text{glass}) \approx 2.7 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \ll \beta(\text{etanol}) \approx 10^{-3} \text{ K}^{-1}$



Eks: Hvordan avtar trykket oppover i atmosfæren? (99)

Anta ideell gass, og konstant  $g$  og  $T$ .



Likevekt for  $dM$  (N1):  $F(z+dz) - F(z) + g dM = 0$

$$\underbrace{[p(z+dz) - p(z)] A}_{dp} \quad \underbrace{mg A dz}_{\mu g A dz}$$

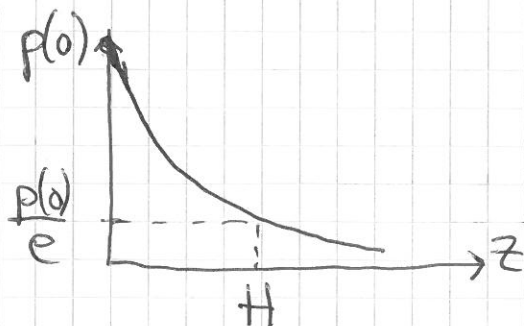
$\mu = \langle m \rangle N/V$ ;  $\langle m \rangle =$  midlere molekylmasse  $\approx 4.8 \cdot 10^{-26}$  kg  
(tilsvarende ca 29 g/mol)

$N/V = p/k_B T$  (ideell gass)

$\Rightarrow dp = - \langle m \rangle \frac{p}{k_B T} g dz$

$\Rightarrow \int_{p(0)}^{p(z)} \frac{dp}{p} = - \frac{\langle m \rangle g}{k_B T} \int_0^z dz \Rightarrow \ln \frac{p(z)}{p(0)} = - \frac{z}{H}$ ;  $H = \frac{k_B T}{\langle m \rangle g}$

$\Rightarrow p(z) = p(0) e^{-z/H}$ ; med  $T=260$  K er  $H \approx 7.6$  km



Øving 10/nr 3:

Numerisk løsning  
med  $z$ -avhengig  
temperatur  $T$

# Varme. Varmekapasitet [YF 17.5; LHL 13.2]

(100)

Kun to typer energioverføring i termisk fysikk:

Varme = energi som overføres pga. temperatursforskjeller

Andre former for energioverføring er arbeid.

Hvor mye varme  $\Delta Q$  må tilføres et system for å øke temperaturen fra  $T$  til  $T + \Delta T$ ?

Svar:  $\Delta Q = C \cdot \Delta T$ ;  $C$  = systemets varmekapasitet

$$\Rightarrow \boxed{C = \Delta Q / \Delta T} \Rightarrow [C] = \text{J/K}$$

$C$  måles ved å måle sammenhengende  $\Delta Q$  og  $\Delta T$ , typisk med konstant trykk  $p$  eller konstant volum  $V$ :

$$C_p = \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_p ; \quad C_V = \left( \frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_V$$

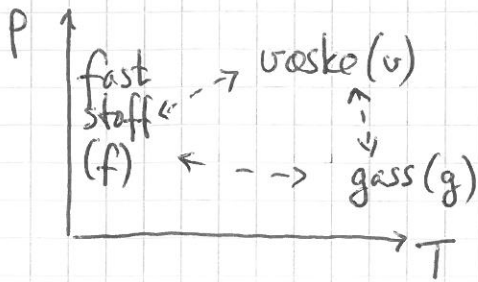
For tabulering er molekylspesifikke størrelser hensiktsmessig:

$$c = C/M = \text{varmekap. pr masseenh.} \Rightarrow [c] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

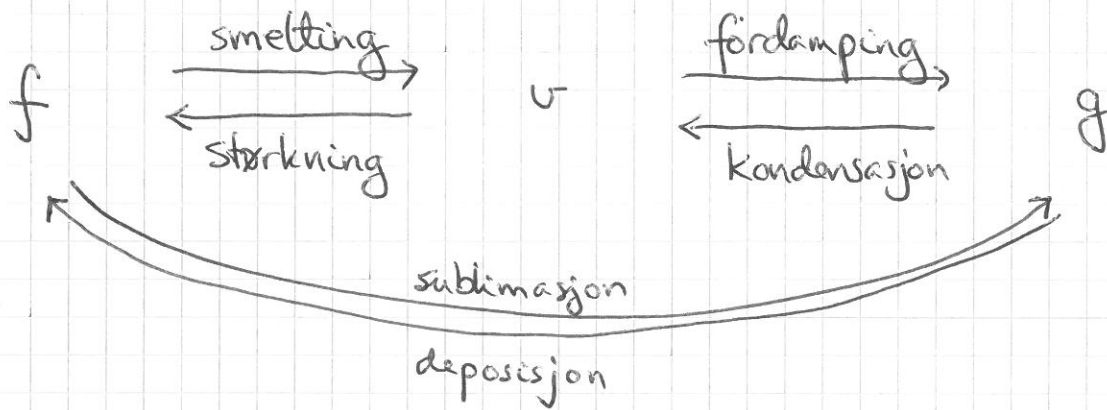
$$c_m = C/n = \text{varmekap. pr mol (et molekyl varmekap.)} \\ \Rightarrow [c_m] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Faseoverganger. Latent varme [YF 17,6; LHL 17,10] (101)

Kvalitativt pT-diagram:



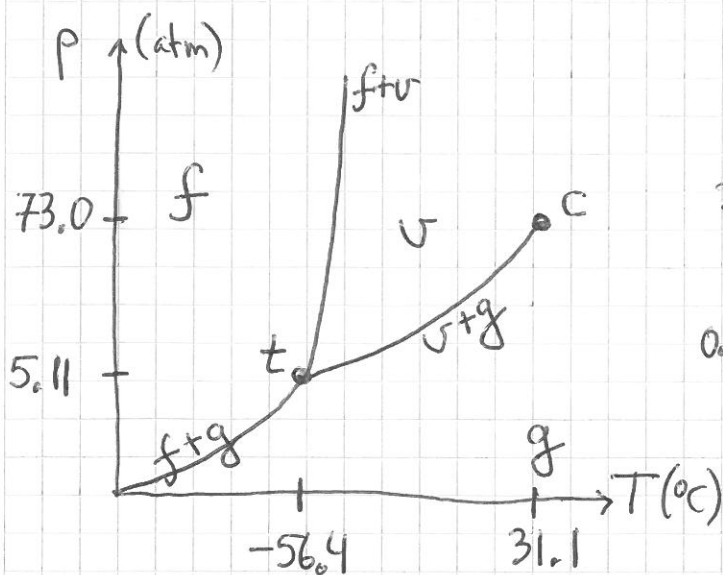
Koeksistenslinjer i (p,T)-diagram markerer faseoverganger:



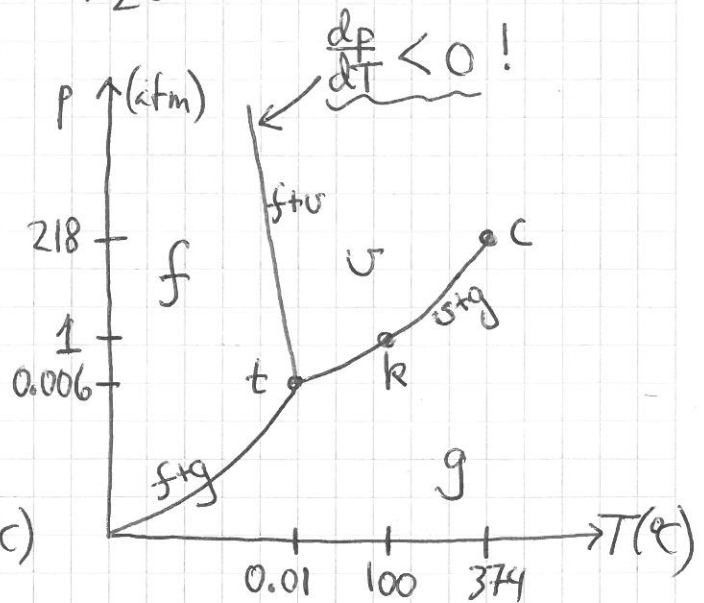
Eks: CO<sub>2</sub> v/1atm, -78.5°C ; tørris

Is → Vanndamp i kuldegrader ; frysetørring

Fasediagram for CO<sub>2</sub> og H<sub>2</sub>O:



CO<sub>2</sub>



H<sub>2</sub>O

Koeksistensligner: Likevekt mellom to faser, (102)  
 $f+u$ ,  $u+g$  eller  $f+g$

Kokepunkt: (k) "Voldsom fordamping" når damptrykket er like stort som det omgivende lufttrykket.

Det dannes dampbobler i væsken når  $T \rightarrow T_k$  (=  $100^\circ\text{C}$  for  $\text{H}_2\text{O}$  ved  $1\text{ atm}$ ).

Hvis høyt til fjells: Lavere lufttrykk  
 $\Rightarrow$  Kommer til  $u+g$  likevektslinjen nedenfor k  
 $\Rightarrow$  Koker ved lavere temperatur  
 $\Rightarrow$  Eggene våre koke litt lenger tid enn hjemme...

Trippelpunkt (t): Samtidig likevekt  $f$ ,  $u$  og  $g$

Kritisk punkt (c): Enden av  $u+g$  koeksistenslinjen.

Her opphører forskjellen på væske og gass! Hvis  $p > p_c$  og  $T > T_c$ , har vi bare en fluid fase, et såkalt supercritisk fluid.

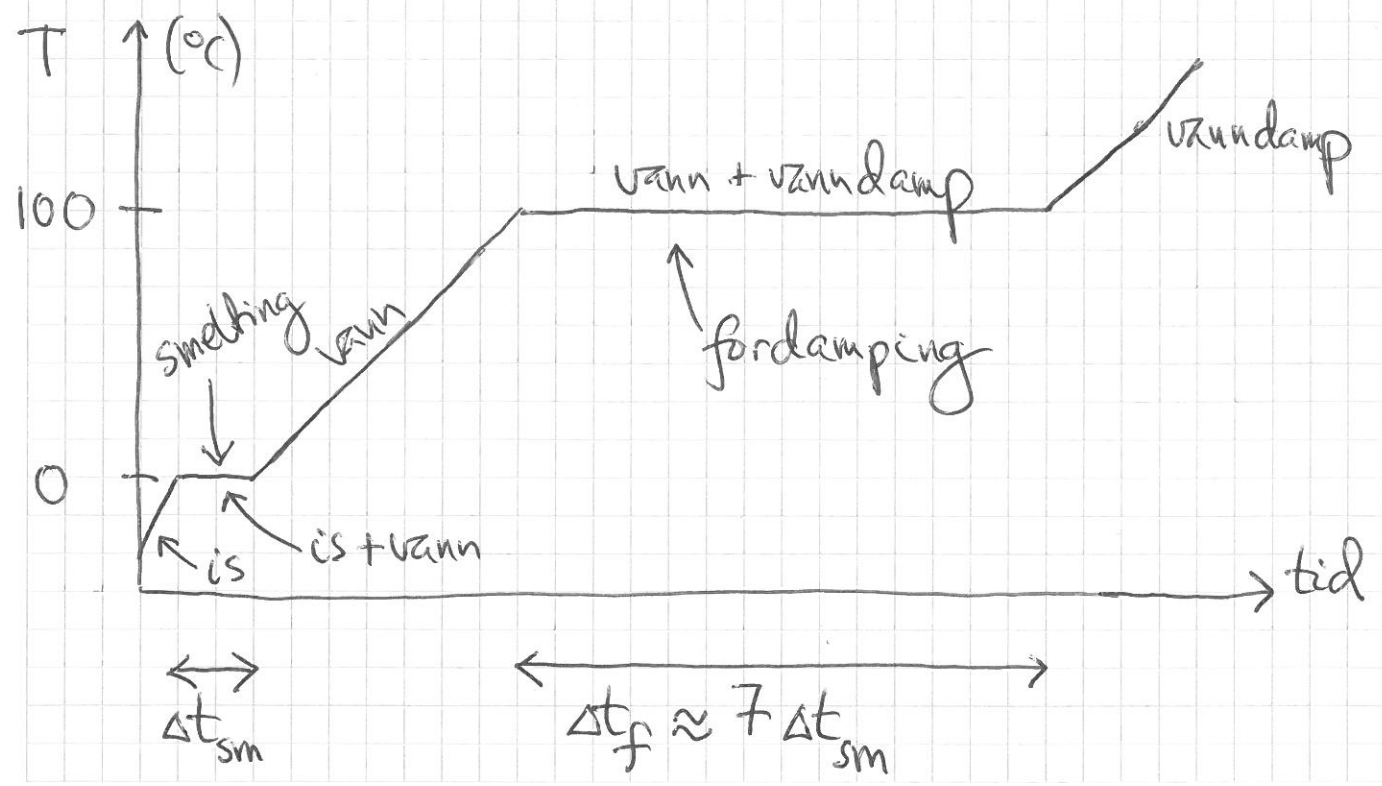


# Latent varme:

$L$  = varmen som trengs for å smelte ( $L_{sm}$ ),  
 fordampe ( $L_f$ ) eller sublimere ( $L_{sub}$ )  
 en viss mengde stoff, ved gitt temperatur. Dvs:  
 $\Delta T = 0$ , selv om varme tilføres! Energien  
 tilført går med til å bytte bindinger mellom  
 atomer/molekyler.

Eks:  $H_2O$ . Nær trippelpunktet er  $L_{sm} \approx 80 \text{ cal/g}$ ,  
 $L_f \approx 600 \text{ cal/g}$ ,  $L_{sub} = L_{sm} + L_f \approx 680 \text{ cal/g}$ .

Her er 1 cal (kalori) = varmemengden som øker  $T$   
 fra  $14.5^\circ C$  til  $15.5^\circ C$  i 1 g  $H_2O$  ved  $p = 1 \text{ atm}$ .  
 $1 \text{ cal} \approx 4.184 \text{ J}$ . Anta konstant tilførsel av varme:



## Clapeyrons ligning for koeksistenslinjene [LHL 17.10]

$$\boxed{\frac{dp}{dT} = \frac{L}{T \cdot \Delta V}}$$

$\Delta V$  = volumendringen (f.eks.  $V_g - V_v$ )

$L$  = latent varme (f.eks.  $L_f$ )

Både  $L$  og  $\Delta V$  er prop. med  $N$  (dvs stoffmengden)  
 $\Rightarrow L/T \cdot \Delta V$  blir uavh. av stoffmengden, OK.

[Ligningen kan utledes fra termodynamikkens 1. og 2. lov.]

### Luftfuktighet:

$$p = p_{N_2} + p_{O_2} + p_{CO_2} + p_{H_2O} + \dots = \text{sum av } \underline{\text{partialtrykk}}$$

Luft mettet med vanndamp:

$$p_{H_2O} = p_d = \text{damptrykket p\aa } v+g \text{ koeks.linjen}$$

$$= \text{max partialtrykk av } H_2O \text{ i luft ved gitt } T$$

$p_{H_2O} > p_d$  : Ikke likevekt. Vi får kondensasjon

$p_{H_2O} < p_d$  : Da er relativ luftfuktighet  $\phi < 100\%$

$$\boxed{\phi = \frac{p_{H_2O}}{p_d} \cdot 100\%}$$



# Damptrykk-kurven

Med vanddamp (g) som den ene fasen er

$$\Delta V = V_g - V \approx V_g \stackrel{\text{ideell gass}}{=} nRT/p_d \quad (V = V_f \text{ evt } V_v)$$

Antar at  $L = n \cdot l$  er uafhængig af  $T$ ;  $l$  = molar latent varme

Dermed kan  $p_d(T)$  bestemmes fra Clapeyrons ligning:

$$\frac{dp_d}{dT} = \frac{L}{T \cdot \Delta V} = \frac{n \cdot l}{T \cdot nRT/p_d} = \frac{l p_d}{RT^2}$$

$$\Rightarrow \int_{p_d(T_0)}^{p_d(T)} \frac{dp_d}{p_d} = \frac{l}{R} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T^2} \quad \text{med } T_0, p_d(T_0) \text{ valgt ref. punkt på koeks. linjen}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \frac{p_d(T)}{p_d(T_0)} \right\} = - \frac{l}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{p_d(T) = p_d(T_0) \exp \left\{ \frac{l}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right\}} \quad \text{Damptrykk-kurven}$$

Med trippelpunktet som referanse:

$$T_0 = T_t = 273.16 \text{ K}, \quad p_d(T_0) = 612 \text{ Pa}$$

$$l_f = 598 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = \frac{598}{1000} \frac{\text{kcal}}{\text{g}} \cdot 4.184 \frac{\text{kJ}}{\text{kcal}} \cdot 18 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \approx 45 \text{ kJ/mol}$$

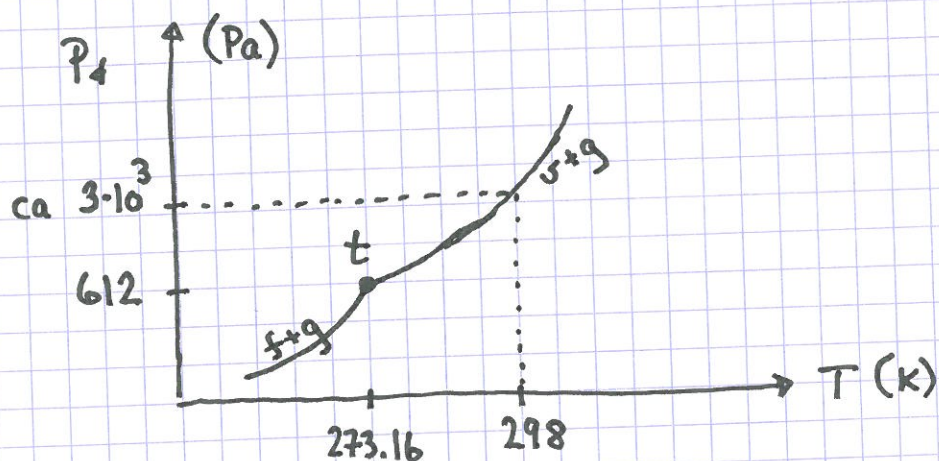
$$l_{\text{sub}} = 678 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = \frac{678}{1000} \frac{\text{kcal}}{\text{g}} \cdot \text{---} \text{---} \text{---} \approx 51 \text{ kJ/mol}$$



$$\Rightarrow p_d(T > T_t) = 612 \text{ Pa} \cdot \exp\left\{19.8 - \frac{5413}{T}\right\}$$

$$p_d(T < T_t) = 612 \text{ Pa} \cdot \exp\left\{22.5 - \frac{6134}{T}\right\}$$

(med  $T$   
i enheten K)



Smeltelinjen for  $\text{H}_2\text{O}$  ( $f+u$  koeksistens):

$$\Delta V_{sm} = V_u - V_f < 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dT} < 0 \Rightarrow \text{peker (svakt) mot } \underline{\text{venstre}} \text{ (som s. 95)}$$



Frå sist:

$$p_d(T) = p_d(T_0) \exp \left\{ \frac{l}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right\}; \text{ damptrykk-kurven}$$

Eks: Tørr luft om vinteren

Anta  $-20^\circ\text{C}$  ute,  $+20^\circ\text{C}$  inne,  $\phi = 100\%$  ute.

Hva blir  $\phi$  inne hvis all inneluft byttes med uteluft?

Løsn:

$$\phi = 100\% \cdot \frac{p_{\text{H}_2\text{O}}}{p_d}; \text{ her er } p_{\text{H}_2\text{O}} = p_d(253\text{K}) \text{ siden}$$

$$\phi = 100\% \text{ ute.}$$

$$\Rightarrow \phi_{\text{inne}} = 100\% \cdot \frac{p_d(253\text{K})}{p_d(293\text{K})}$$

$$p_d(293\text{K}) = p_d(T_0) \exp \left\{ \frac{l_f}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right\}; T = 293\text{K}$$

$$p_d(253\text{K}) = p_d(T_0) \exp \left\{ \frac{l_{\text{sub}}}{R} \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right\}; T = 253\text{K}$$

$$T_0 = T_t = 273.16\text{K}, p_d(T_0) = 612\text{Pa} \text{ (trengs ikke!)}$$

$$l_f = 45\text{kJ/mol}, l_{\text{sub}} = 51\text{kJ/mol}, R = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{mol}\cdot\text{K}}$$

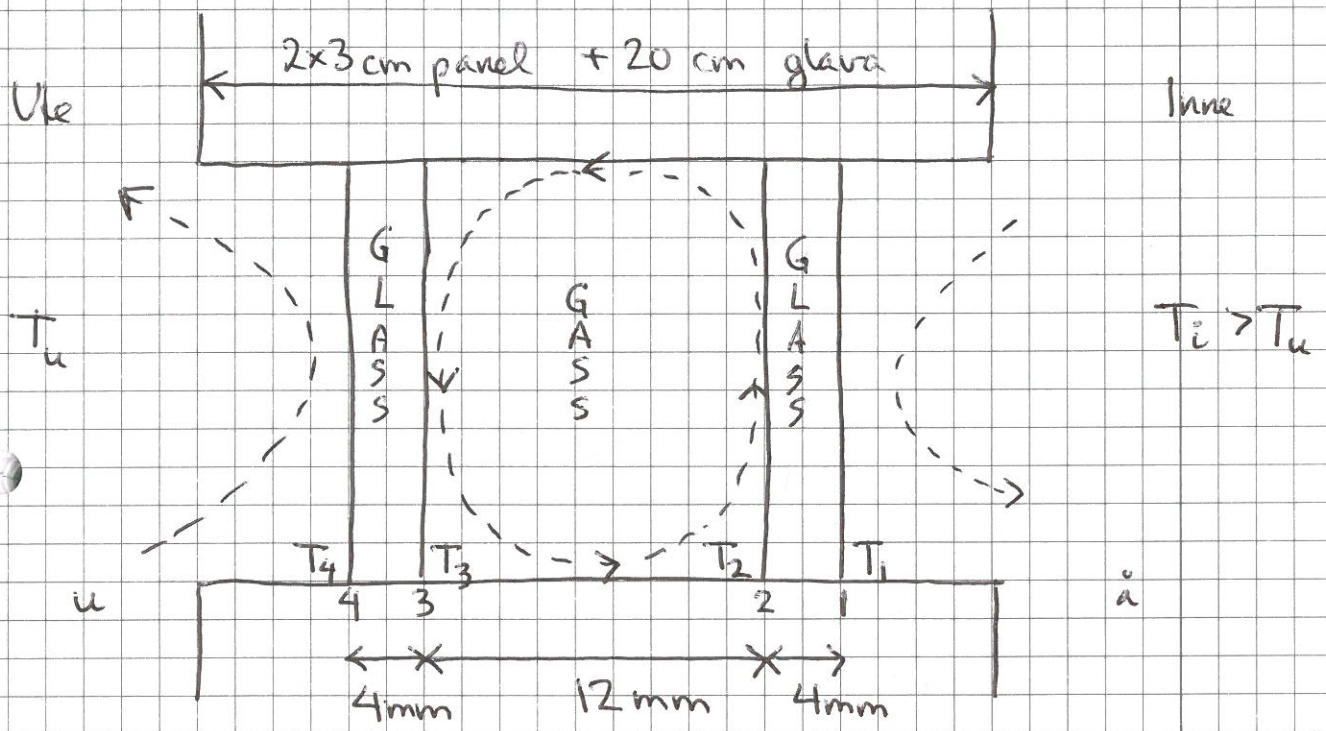
$$\phi_{\text{inne}} = 100\% \cdot \exp \left\{ \frac{l_{\text{sub}} - l_f}{R T_0} + \frac{l_f}{R \cdot 293} - \frac{l_{\text{sub}}}{R \cdot 253} \right\}$$

$$= 100\% \cdot \exp \{ 2.64 + 18.47 - 24.25 \} \approx \underline{\underline{4\%}}$$

[Problemer med for tørr luft: Tørre slimhinner, Statisk elektrisitet...  
 — u — for fuktig luft: Husstrømidl, Muggjapp — ]

# VARMETRANSPORT [YF17; LHL18]

Tolagsvindu som eksempel:

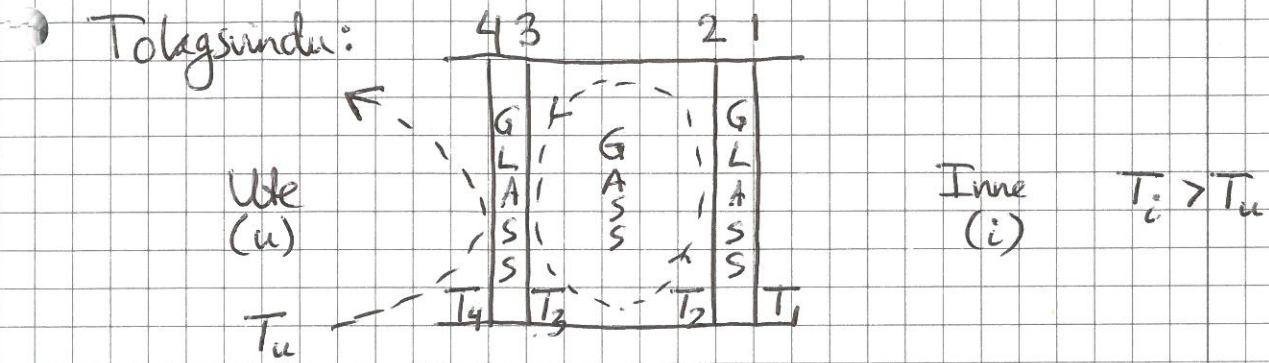


Tre mekanismer:

- Konveksjon (varmeoverføring pga strømming)
- Varmeledning (forplantning av kinetisk energi på mikroskopisk nivå gjennom et medium)
- Stråling (legeme med temperatur  $T$  sender ut elektromagnetiske bølger; utsendt energi prop. med  $T^4$ )



# Konveksjon [YF 17.7; LHL 18.2]



$T_2 > T_3 \Rightarrow$  gassen varmes opp, utvider seg og stiger ved 2,  
— " — avkjøles, trekker seg sammen og faller ved 3

$\Rightarrow$  sirkulasjon  $\curvearrowright$  og netto varmeoverføring fra 2 mot 3

Vind ute  $\Rightarrow$  forsterket varmeoverføring fra 4 til u

Vanskelig å regne på, men grovt sett:  $|j| \sim |\Delta T|$   
dvs overført varme pr tids- og flateenhet ( $j$ )  
prop. med temp. forskjellen ( $\Delta T$ )

Ute:  $j_u = \alpha_u (T_4 - T_u)$

Inne:  $j_i = \alpha_i (T_i - T_1)$

Varmeovergangstall, anslått gjennom "Byggeforskriften":

$\alpha_u = 25 \frac{W}{m^2 \cdot K}$  (med vind; 5-6 m/s i snitt)

$\alpha_i = 7.5$  — " — (uten vind)

EKS: Hvis 25°C på stille, overskyet dag er "OK" i bidekukse, hvz bør temp. være med 5 m/s vind? ( $T_{hud} \approx 30^\circ\text{C}$ )

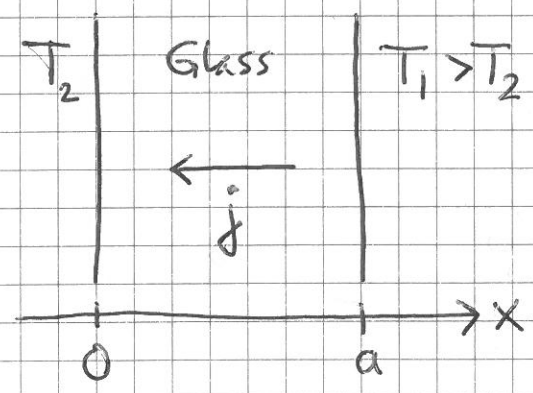
Løsn: Ønsker samme  $j$  som ved 25°C uten vind.

$$j = \alpha_i \cdot \Delta T_{stille} = 7.5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}} \cdot 5\text{K} = 37.5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\Rightarrow \text{Må ha } \alpha_u \cdot (30^\circ\text{C} - T) = 37.5 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

$$\Rightarrow T = 30^\circ\text{C} - 37.5/25^\circ\text{C} \approx \underline{\underline{28.5^\circ\text{C}}}$$

### Varmeledning [YF 17.7; LHL 18.1]



Som ventet finner en empirisk (eksperimentelt):

$$|j| \sim \Delta T = T_1 - T_2$$

$j$  motsatt rettet  $\Delta T$

$$j \sim 1/a$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{j = -\kappa \cdot \frac{\Delta T}{a}}}$$

$\kappa$  = materialets varmeledningsevne ( $\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}}$ )



Ved stasjonære forhold (dvs: fast  $T$  ved gitt  $x$ ) (III)

er  $j$  uavhengig av  $x$  (ellers netto<sup>varme</sup>strøm inn i skive mellom  $x$  og  $x+dx \Rightarrow T \neq \text{konst.} \Rightarrow$  ikke stasjonært)

$$\Rightarrow \frac{\Delta T}{a} = \frac{dT}{dx} \quad (= \text{konst. for materiale med gitt } \kappa)$$

$$\Rightarrow \boxed{j = -\kappa \frac{dT}{dx}} \quad \text{Fouriers lov for varmeledning (i 1D)}$$

I 3D:  $\vec{j} = -\kappa \nabla T$ ;

der  $\nabla T = \hat{x} \frac{\partial T}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial T}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial T}{\partial z} =$  gradienten til  $T$   
(= vektor som peker i den retning som  $T$  øker raskest)

Noen tallverdier:

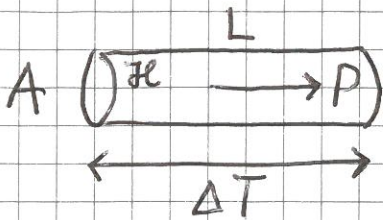
Stoff	Luft	Glava	Vann	Is	Glass	Tre	Stål
$\kappa$ (W/m·K)	0.026	0.035	0.61	2.2	0.7-1.1	0.1-0.2	43

Glava istedoff for luft i veggene hindrer både konveksjonstap og strålingstap (se senere).



# Analogier mellom Fouriers lov og Ohms lov:

Värmemotstand:  $j = P/A$ ,  $\nabla T = \frac{\Delta T}{L}$

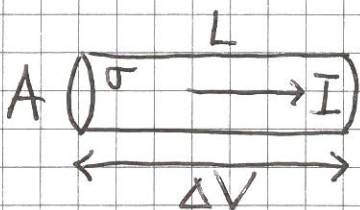


$$\Rightarrow P/A = \kappa \Delta T/L$$

$$\Rightarrow \Delta T = P \cdot R_Q$$

$$\text{med } R_Q = \frac{L}{\kappa A}; [R_Q] = K/W$$

Elektrisk motstand:



$$j = I/A, E = \frac{\Delta V}{L}, \overset{\text{Ohms lov}}{j = \sigma E}$$

$$\Rightarrow I/A = \sigma \Delta V/L$$

$$\Rightarrow \Delta V = I \cdot R \quad (\text{Ohms lov})$$

$$\text{med } R = \frac{L}{\sigma A}; [R] = \frac{V}{A} = \Omega$$

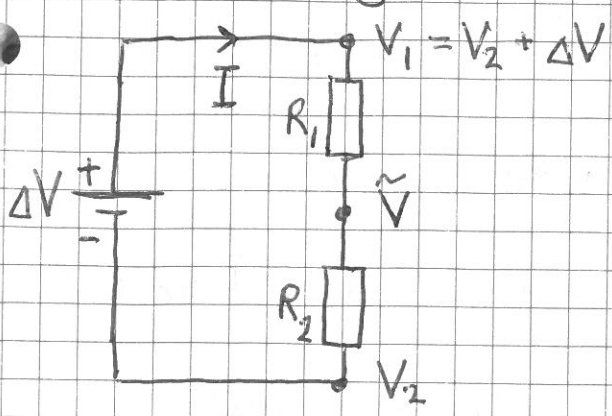
## Analogier:

Størrelse	Fouriers lov	Ohms lov
drivkraft	$\Delta T$ (K)	$\Delta V$ (V)
strøm	$P$ (J/s = W)	$I$ (C/s = A)
resistans	$R_Q = \frac{L}{\kappa A}$ (K/W)	$R = \frac{L}{\sigma A}$ (V/A)
konduktans	$R_Q^{-1} = \kappa A/L$ (W/K)	$G = R^{-1} = \sigma A/L$ (A/V)

$\kappa$  = varmeledningsevne

$\sigma$  = elektrisk ledn. evne

# Seriekobling av motstander:



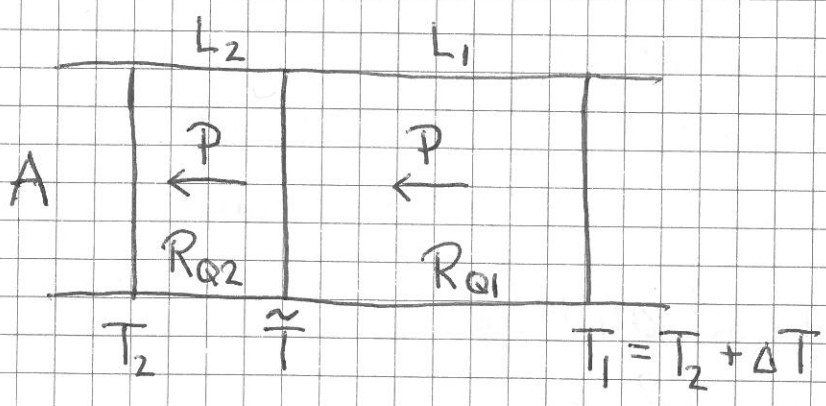
$$\left. \begin{aligned} V_1 - \tilde{V} &= R_1 I \\ \tilde{V} - V_2 &= R_2 I \end{aligned} \right\} \text{Ohms lov}$$

$$\Rightarrow \Delta V = (R_1 + R_2) I$$

Dvs:  $R_1 + R_2$  er total motstand for seriekobling av  $R_1$  og  $R_2$

Varmeledningsanalogi: Vegg med areal  $A$  og to lag (f.eks. tre og glass) med tykkelser  $L_1, L_2$  og varmeledningsemer  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ , dvs varmemotstander hvor

$$R_{Q1} = \frac{L_1}{\mathcal{H}_1 A} \text{ og } R_{Q2} = \frac{L_2}{\mathcal{H}_2 A} .$$



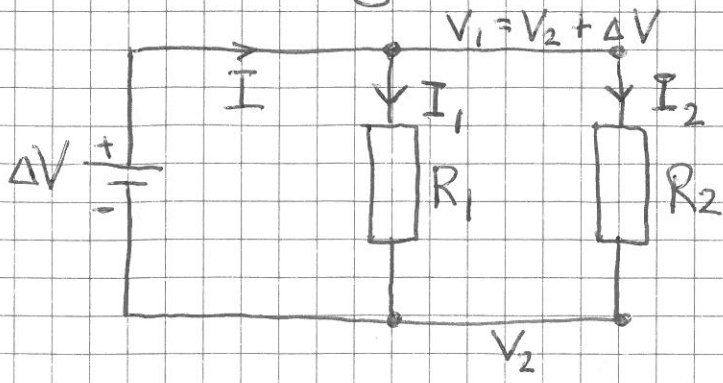
$$\left. \begin{aligned} T_1 - \tilde{T} &= R_{Q1} P \\ \tilde{T} - T_2 &= R_{Q2} P \end{aligned} \right\} \text{Fouriers lov}$$

$$\Rightarrow \Delta T = (R_{Q1} + R_{Q2}) P$$

Dvs:  $R_{Q1} + R_{Q2}$  er total varmemotstand for seriekobling av  $R_{Q1}$  og  $R_{Q2}$



# Parallellkobling av motstander :



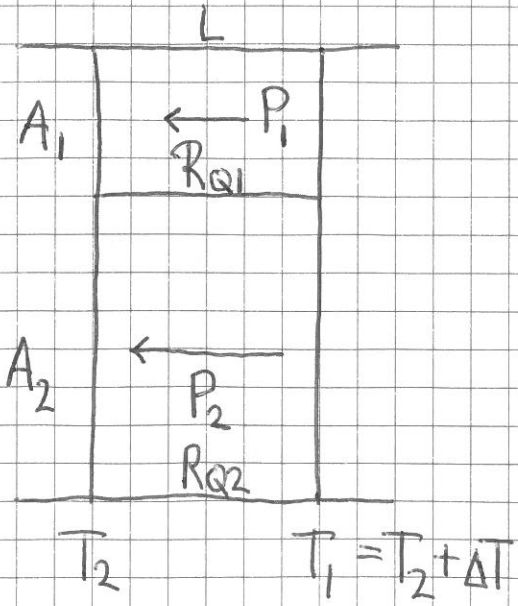
$\Delta V = R_1 I_1 = R_2 I_2$  (Ohms lov)

$I = I_1 + I_2 = \Delta V / R_1 + \Delta V / R_2 = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) \Delta V$

Dus:  $(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})^{-1}$  er total motstand for parallellkobling av  $R_1$  og  $R_2$

Varmeledningsanalogi: Vegg med tykkelse  $L$  og to "parallele" lag med arealer  $A_1, A_2$  og varmeledningsener  $\kappa_1, \kappa_2$ , dvs varmemotstander hvor

$R_{Q1} = \frac{L}{\kappa_1 A_1}$  og  $R_{Q2} = \frac{L}{\kappa_2 A_2}$ .



$\Delta T = R_{Q1} P_1 = R_{Q2} P_2$  (Fouriers lov)

$P = P_1 + P_2 = \Delta T / R_{Q1} + \Delta T / R_{Q2} = (\frac{1}{R_{Q1}} + \frac{1}{R_{Q2}}) \Delta T$

Dus:  $(\frac{1}{R_{Q1}} + \frac{1}{R_{Q2}})^{-1}$  er total varmemotstand for parallellkobling av  $R_{Q1}$  og  $R_{Q2}$

Eks: Vegg, 20 cm glava ( $\lambda_g = 0.035 \frac{W}{m \cdot K}$ ) mellom 2 cm innerpanel og 3 cm ytterpanel ( $\lambda_t = 0.12 \frac{W}{m \cdot K}$ ),  $\Delta T = 20 K$ .  
 Regn ut effekttap pr  $m^2$  og  $T(x)$  gjennom vegg. (Se bort fra vind)

Løsn: Med  $A = 1 m^2$ ,  $L_g = 0.20 m$  og  $L_t = 2 cm + 3 cm = 0.05 m$  blir

$$R_Q^g = 0.20 m / (0.035 \frac{W}{m \cdot K} \cdot 1 m^2) = \frac{200}{35} \frac{K}{W} = 5.71 \frac{K}{W} \quad \text{og}$$

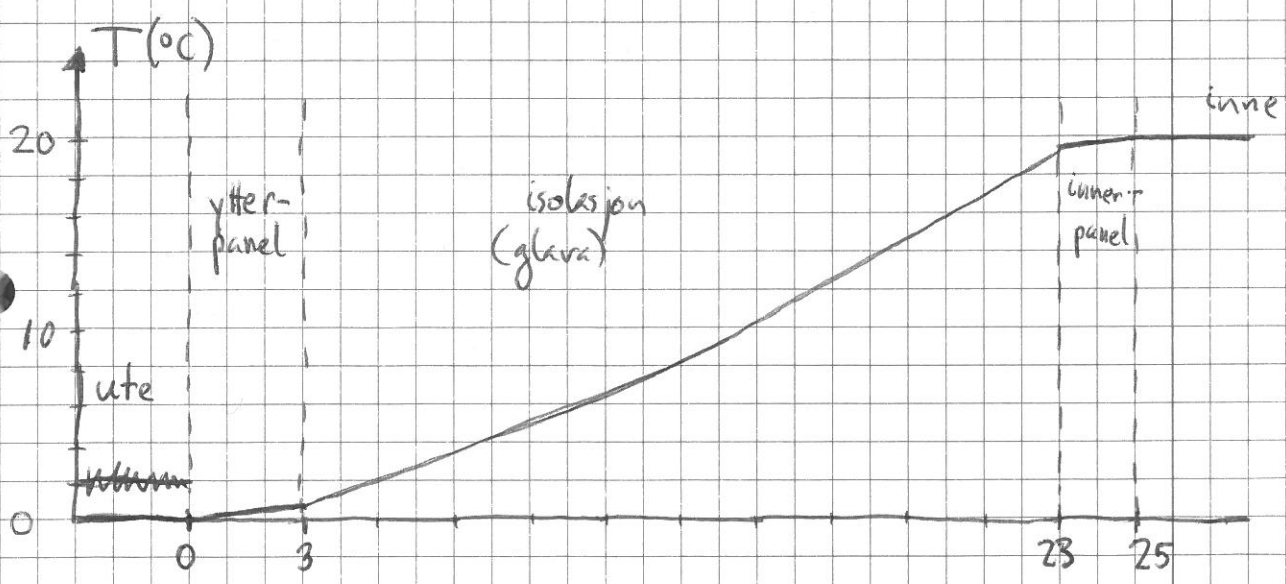
$$R_Q^t = 0.05 m / (0.12 \frac{W}{m \cdot K} \cdot 1 m^2) = \frac{5}{12} \frac{K}{W} = 0.42 \frac{K}{W}, \quad \text{dvs}$$

$$R_Q = R_Q^g + R_Q^t = 6.13 \frac{K}{W}. \quad \text{Effekt tap pr } m^2 \text{ blir da}$$

$$P = \Delta T / R_Q = 20 K / (6.13 \frac{K}{W}) \approx \underline{\underline{3.3 W}}$$

Temp. fall gjennom 1 cm panel:  $P \cdot R_Q^t / 5 = \frac{3.3 W \cdot 0.42 \frac{K}{W}}{5} = 0.27 K$

glava:  $P \cdot R_Q^g / 20 = \frac{3.3 W \cdot 5.71 \frac{K}{W}}{20} = 0.93 K$



Merk at  $dT/dx = P/\lambda A$  er betydelig større i isolasjons-  
 laget enn i panellagene. Og klart størst temp. endring gjennom  
 glavaen, det materialet som isolerer best!

# Stråling [YF 17.7; LHL 18.4]

(116)

- Akselererte ladninger emitterer elektromagnetiske (EM) bølger, dvs stråling, som kan absorberes, reflekteres og transmitteres av legemer omkring. ( $a+r+t=1$ )
- Svart legeme:  $a=1$  ( $r=t=0$ ); absorberer all innkommende stråling.
- Legeme i termisk likevekt, dvs konstant  $T$ , emitterer like mye strålingsenergi som det absorberer, for enhver bølglengde:  
$$e(\lambda) = a(\lambda) \leq 1 \quad (e=1 \text{ for svart legeme})$$

- Stefan-Boltzmanns lov: (svart legeme,  $e=1$ )

$$j = \sigma T^4; \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \approx 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$$

[Reelle legemer:  $j = e\sigma T^4$ ;  $e < 1$ ]

- Kvantemekanikk og statistisk mekanikk gir Plancks fordelingslov (M. Planck, 1900).

Frekvensfordeling:

$$j(T) = \int_0^{\infty} \frac{dj}{df} df; \quad \frac{dj}{df} = \frac{2\pi h f^3 / c^2}{\exp[hf/k_B T] - 1} \quad (\text{W/m}^2 \text{Hz})$$

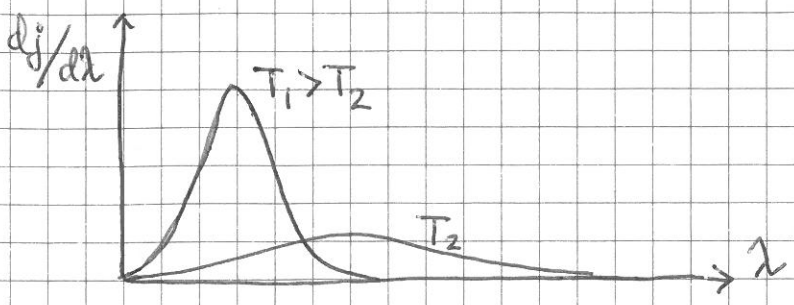
Bølglengdefordeling: ( $c = \lambda f$ )

$$j(T) = \int_0^{\infty} \frac{dj}{d\lambda} d\lambda; \quad \frac{dj}{d\lambda} = \frac{2\pi h c^2 / \lambda^5}{\exp[hc/\lambda k_B T] - 1} \quad (\text{W/m}^3)$$



- Wiens forskybningslov:  $d_j/d\lambda$  har max-verdi for  $\lambda \cdot T \approx 2.90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$

[ $d_j/df$  har maxverdi for  $f/T \approx 5.88 \cdot 10^{10} \text{ Hz/K}$ ]



Solas overflade:  $T \approx 6 \cdot 10^3 \text{ K} \Rightarrow \text{max for } \lambda \approx 480 \text{ nm}$   
 (Blågrønt; synlig lys fra 400 til 700 nm; blått, ..., rødt)

Kroppens overflade:  $T \approx 303 \text{ K} \Rightarrow \text{max for } \lambda \approx 10 \mu\text{m}$  (IR)

Merk, skyfri nattehimmel:  $T \approx 240 - 260 \text{ K}$  (afhængig af relativ luftfugtighed og temperatur ved bakken)  $\Rightarrow \text{max for } \lambda \approx 12 \mu\text{m}$

"CMB" (Cosmic Background Radiation):  $T \approx 2.73 \text{ K}$   
 $\Rightarrow \text{max for } \lambda = 1.87 \text{ mm}$

pga stråling

Ek5: Finn effektbep fra naken kropp i omgivelser ved  $+5^\circ\text{C}$ .  
 Anta svart legeme,  $T_{\text{hud}} = 30^\circ\text{C}$  og  $A = 1.75 \text{ m}^2$ .

Løsn:  $P_{\text{kp}} = P_{\text{ut}} - P_{\text{inn}} = (j_{\text{ut}} - j_{\text{inn}}) \cdot A = \sigma (T_{\text{hud}}^4 - T_{\text{omg}}^4) \cdot A$   
 $= 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} \cdot (303^4 - 278^4) \text{ K}^4 \cdot 1.75 \text{ m}^2 \approx \underline{\underline{244 \text{ W}}}$

(Kler hindrer det meste av dette; se øv. 11 nr 4)

# U-verdier i byggebransjen

Defineres ved

$$j = U \cdot (T_i - T_u)$$

dvs

U = varmetekning pr m<sup>2</sup> og pr grad temp. forskjell mellom inne (i) og ute (u)

Eks: Lagdelt vegg s. 115.  $j = 3,3 \text{ W/m}^2$  når  $\Delta T = 20 \text{ K}$

$$\Rightarrow U = \frac{3,3}{20} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \approx \underline{\underline{0,16 \text{ W/m}^2 \text{ K}}}$$

Krav i Tek 10 (byggeforskrifter):

Yttervegg  $U < 0,18$

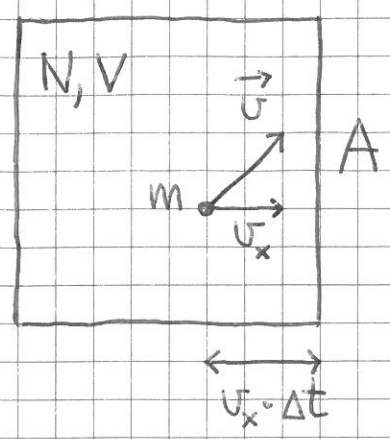
Tak  $U < 0,13$

Gulv  $U < 0,15$

Vindu  $U < 1,2$

# Mikroskopisk tolkning av p og T [YF 18.3; LHL 14.1]

- Antagelser: Gass, lav tetthet, elastiske kollisjoner (mot veggene), isotrope (retningsuavhengige) forhold.



$\Delta P_x$  = overført impuls fra gassmolekylene til vegg (areal  $A$ ) i løpet av tiden  $\Delta t$

$$\Delta P_x = \underbrace{2mv_x}_{\text{overført impuls pr molekyl}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}N}_{\text{antall molekyler med } v_x > 0} \cdot \underbrace{\frac{Av_x \Delta t}{V}}_{\text{andel av molekylene som treffer høyre vegg i løpet av } \Delta t}$$

Newtons 2. lov gir nå trykket i gassen:

$$p = F_x/A \stackrel{N2}{=} (\Delta P_x/\Delta t)/A = \frac{N}{V} \cdot mv_x^2$$

Men: Molekylene har en fordeling av hastigheter, som er isotrop

$\Rightarrow v_x^2$  erstattes av  $\langle v_x^2 \rangle$ , der  $\langle \dots \rangle$  angir middelværdi over  $N$  molekyler

Isotrop fordeling  $\Rightarrow \langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle v^2 \rangle$   
 (fordi  $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ )

Dermed: 
$$p = \frac{N}{V} \cdot \frac{1}{3} m \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} \frac{N}{V} \langle K_{\text{trans}} \rangle$$



der  $\langle K_{trans} \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle =$  midlere kinetiske

• translasjonsenergi pr molekyl.

Sammenligning med ideell gass tilstandsligning,  $pV = Nk_B T$ ,

gir nå

$$k_B T = \frac{2}{3} \langle K_{trans} \rangle$$

Dvs: Absolutt temp.  $T$  er et mål på gassmolekylenes midlere translasjonsenergi.

•  $\langle v_x \rangle = \langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0$  pga symmetri

$$\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle = 3k_B T / m$$

RMS-hastighet ("Root Mean Square"):

$$v_{rms} \stackrel{def}{=} \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_B T / m} \quad (= \sqrt{3RT / M}; M = \text{midlere molar masse})$$

• Eks: Luft, 300 K;  $v_{rms} = ?$

$$\text{Løsn: } v_{rms} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8.314 \frac{J}{mol \cdot K} \cdot 300 K}{0.029 \text{ kg/mol}}} \approx \underline{\underline{508 \text{ m/s}}}$$

# Termodynamikkens 1. lov [YF 19,20; LHL 15,13]

Antar som regel reversible termodyn. prosesser:

Idealisert "uendelig langsom" prosess som kan reverseres, slik at både system og omgivelser kommer tilbake til starttilstanden.

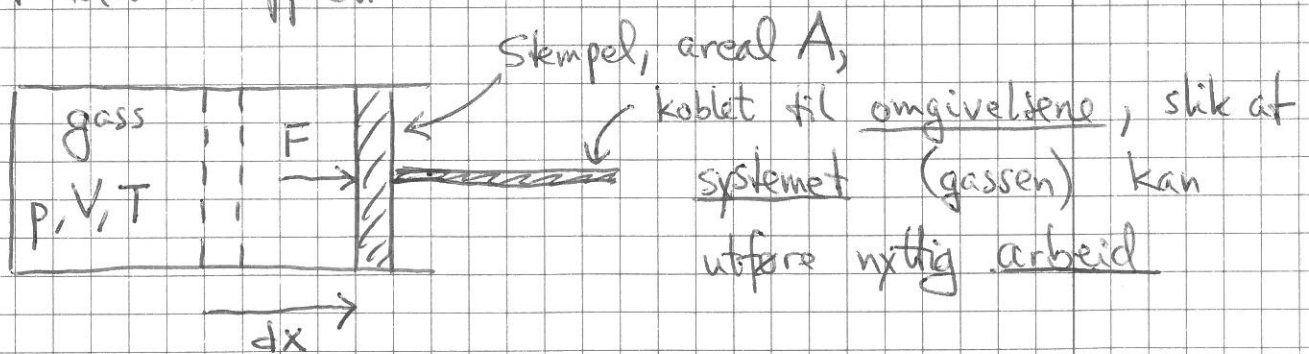
Men alle reelle prosesser er mer eller mindre irreversible, pga friksjon, turbulens osv.

## Arbeid [YF 19.2; LHL 13.5]

Varme = energitveksling pga temp. forskjeller

Arbeid = alle andre former for energitveksling

"Standard - oppsett":



Arbeid utført av gassen på omgivelsene ved utvidelse fra  $V$  til  $V + dV$  (ved trykk  $p$ ):

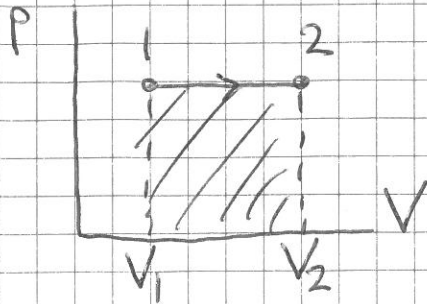
$$dW = F \cdot dx = p \cdot A \cdot \frac{dV}{A} = p \cdot dV$$

Fortegnssalg:  $dW > 0$  når systemet gjør positivt arbeid på omgivelsene

# Exemplar:

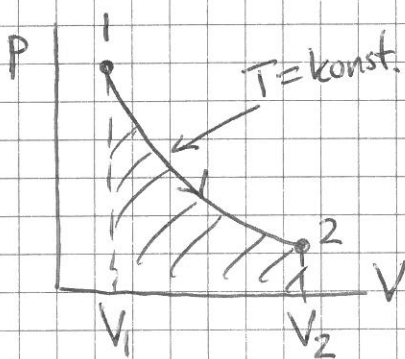
122

Isobar utvidelse:



$$W = \int_1^2 dW = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \underline{\underline{p(V_2 - V_1)}}$$

Isoterm utvidelse av ideell gass:



$$p(V) = Nk_B T / V$$
$$\Rightarrow W = Nk_B T \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \underline{\underline{Nk_B T \ln \frac{V_2}{V_1}}}$$

Dvs:  $W = \text{arealet under kurven } p(V)$

Indre energi [YF 19.4, 19.6; LHL 13.6]

$U$  = systemets indre energi

= den totale energien til partiklene i systemet

Ideell gass: Ingen vekselvirkning mellom molekylene, dvs ingen potensiell energi, kun kinetisk energi

$$\Rightarrow \boxed{U = U(T) = N \cdot \langle K \rangle} \quad \text{Indre energi, ideell gass}$$

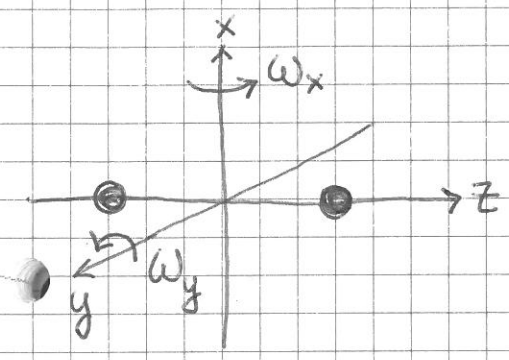


Eks 1: Atomære gasser (He, Ne, ...; <sup>dis</sup>eddgasser)

$\langle K \rangle = \langle K_{trans} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$  pr atom

$\Rightarrow U(T) = \frac{3}{2} N k_B T$

Eks 2: Toatomige gasser (O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, ...)



$\langle K \rangle = \langle K_{trans} \rangle + \langle K_{rot} \rangle$

$= \frac{m}{2} \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle + \frac{I_0}{2} \langle \omega_x^2 + \omega_y^2 \rangle$

[Kvantemekanikk gir I<sub>0</sub>(z) = 0, og dessuten at E<sub>vib</sub> ~~er~~ = konstant ved 300 K!]

Eknipartisjonsprinsippet (bevises ikke her):

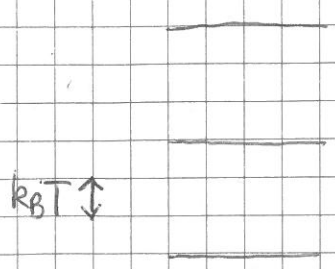
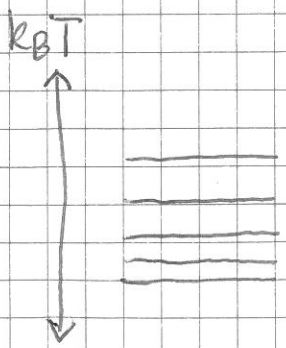
Hvert kvadratiske ledd i energifunksjonen bidrar med 1/2 k<sub>B</sub>T til indre energi pr partikkel.

$\Rightarrow U = N \cdot \left\{ \underbrace{3 \cdot \frac{1}{2} k_B T}_{\langle K_{trans} \rangle} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{2} k_B T}_{\langle K_{rot} \rangle} \right\} = \frac{5}{2} N k_B T$

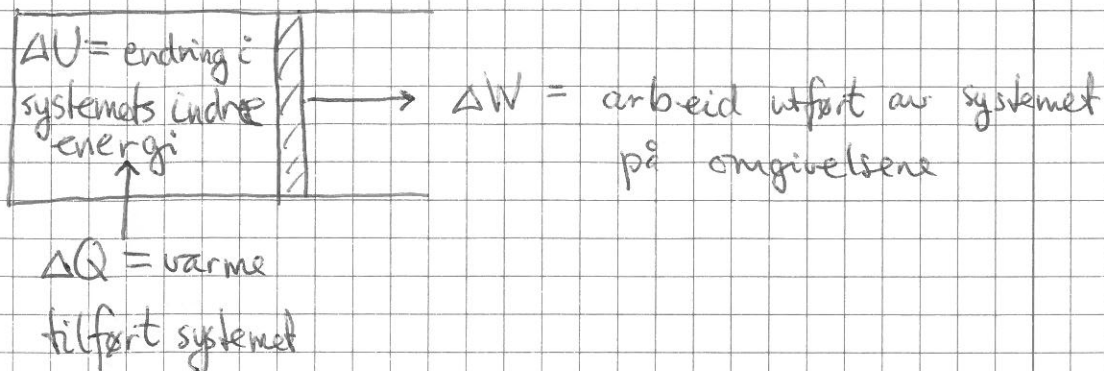
(+ en "uinteressant" T-uavhengig E<sub>vib</sub> ved normale T)

Rotasjonsenergier:

Vibrasjonsenergier:



## Energiebevarelse:



$$\Rightarrow \boxed{\Delta Q = \Delta U + \Delta W} \quad \text{Termodynamikkens 1. lov}$$

Evt  $dQ = dU + dW$  på differensiell form, men merk at bare  $U$  er en tilstandsfunksjon, mens  $Q$  og  $W$  er prosessvariable

Eks:  $C_V$  og  $C_p$  for ideell gass.

[YF 18.4; LHL 15.2, 14.2]

Løsn:  $C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V \stackrel{dV=0}{=} \left(\frac{dU}{dT}\right)_V = \frac{dU}{dT} \quad (U=U(T))$

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p = \left(\frac{dU}{dT}\right)_p + p \left(\frac{dV}{dT}\right)_p$$

$$= \frac{dU}{dT} + p \frac{d}{dT} \left( \frac{Nk_B T}{p} \right)$$

$$= \frac{dU}{dT} + Nk_B = \frac{dU}{dT} + nR$$

der  $C_p - C_V = nR$  for ideell gass

- $C_p > C_v$  fordi med  $V = \text{konst.}$  går hele  $\Delta Q$  med til økningen  $\Delta U$  i indre energi, og dermed  $\Delta T$ .  
Med  $p = \text{konst.}$  bruges noe av  $\Delta Q$  til arbeidet  $\Delta W = p \Delta V$ , dvs mindre  $\Delta U$  og mindre  $\Delta T$  for samme  $\Delta Q$ .

- Atomær gass:  $C_v = \frac{3}{2} N k_B = \frac{3}{2} n R$ ,  $C_p = \frac{5}{2} N k_B = \frac{5}{2} n R$

Toatomig gass:  $C_v = \frac{5}{2} n R$ ,  $C_p = \frac{7}{2} n R$

Eksp., luft:  $c_{pm} = C_p / n = 29.19 \text{ J/mol}\cdot\text{K} = 3.5 R$   
 $c_{vm} = C_v / n = 20.85 \text{ J/mol}\cdot\text{K} = 2.5 R$  } ok!

## Adiabatisk prosess [YF 19.8; LHC 15.3]

= varmeisoleret prosess,  $\Delta Q = 0 \Rightarrow \Delta U = -\Delta W$

$$\boxed{dU} \quad \left| \begin{array}{l} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right. \rightarrow dW = p dV = -dU = -C_v dT$$

( $dQ=0$ )

Ser på ideell gass:  $C_p - C_v = nR$ ;  $pV = nRT$

$$\Rightarrow p dV = \frac{nRT}{V} dV = (C_p - C_v) T \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow -C_v dT = C_v (\gamma - 1) T \frac{dV}{V}$$

der  $\gamma \equiv C_p / C_v = \text{adiabatkonstanten}$  ( $\gamma > 1$ )

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \frac{dV}{V}$$

$$\Rightarrow \ln T = -(\gamma - 1) \ln V + \text{konst.}$$



$$\Rightarrow \ln T + \ln V^{\gamma-1} = \text{konst.}$$

$$\Rightarrow \ln \{ T V^{\gamma-1} \} = \text{konst.}$$

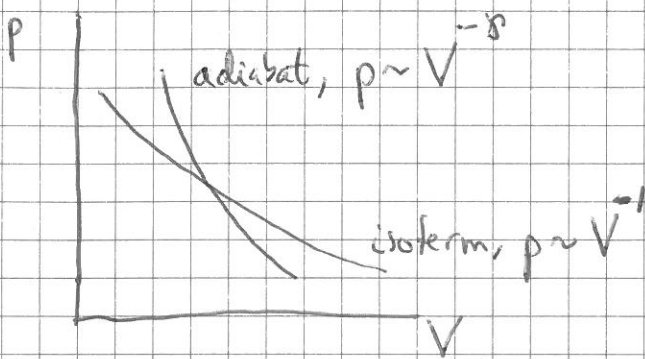
$$\Rightarrow T \cdot V^{\gamma-1} = \text{konst.}$$

Ideell gass:  $T = \text{konst.} = pV$

$$\Rightarrow p \cdot V^{\gamma} = \text{konst.}$$

$$V = \text{konst.} \cdot \frac{T}{p}$$

$$\Rightarrow p \cdot T^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{konst.}$$



$\gamma > 1 \Rightarrow$  en adiabat er  
brattere enn en isoterm  
i pV-diagram for en  
ideell gass

Edelegasser:  $\gamma = 5/3 \approx 1.7$

Luft (2-atomig):  $\gamma = 7/5 \approx 1.4$

Lydarten i luft:

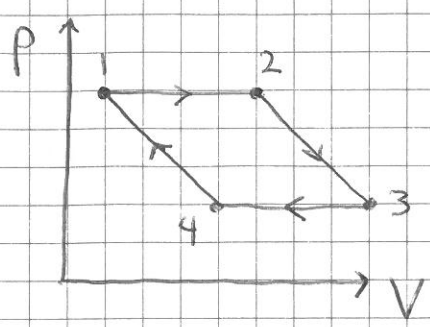
For rask variasjoner i trykk og tetthet til utbreielse av  
varme mellom ulike områder

$\Rightarrow$  ikke isoterme men adiabatisk forhold

$$\Rightarrow v = \sqrt{\gamma k_B T / m} \quad (\text{Ør. 12, nr 1-4})$$

# Kretsprosesser

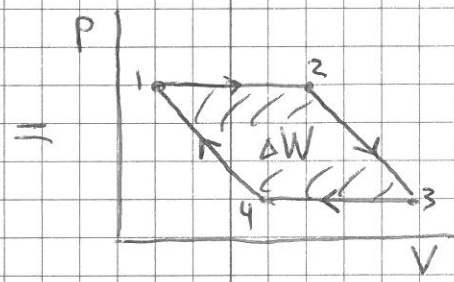
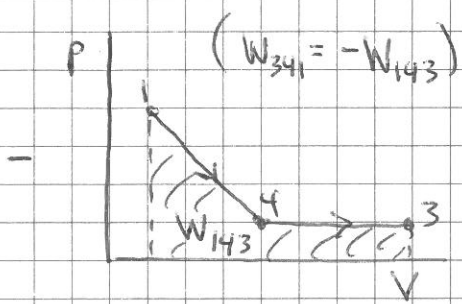
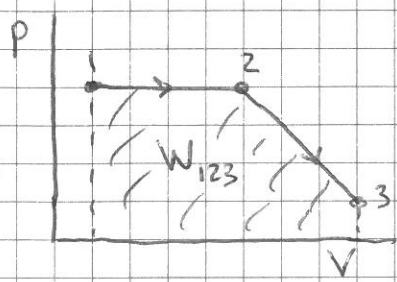
[YF 19.4 ; LHL 15.1]



L = starttilstand = slutt-tilstand

$\Rightarrow \Delta U = 0$  for kretsprosess  
(U er en tilstandsfunksjon)

$\Rightarrow \Delta Q = \Delta W$  for kretsprosess

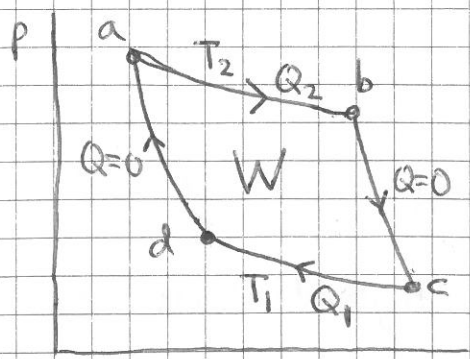


Arb. utf. pr syklus:  $\Delta W =$  omskilt areal i pV-planet

Med klokka  $\Rightarrow \Delta W > 0$  (og omvendt)

# Carnot-prosessen

[YF 20.6 ; LHL 15.4]



ab: isoterm ( $T_2$ );  $Q_2 > 0$  ( $\Delta V > 0$ )

bc: adiabat ( $Q=0$ );  $\Delta T < 0$  ( $\Delta V > 0$ )

cd: isoterm ( $T_1$ );  $Q_1 < 0$  ( $\Delta V < 0$ )

da: adiabat ( $Q=0$ );  $\Delta T > 0$  ( $\Delta V < 0$ )

Verkningsgrad:  $\eta = \left| \frac{\text{nytte}}{\text{kostnad}} \right| = \frac{\text{netto utført arbeid}}{\text{tilført varme}} = \frac{W}{Q_2}$

Skal vise at Carnot-pros. har  $\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2}$

$$\oint dU = 0 \Rightarrow W = Q_2 + Q_1 \quad (Q_1 < 0)$$

$$\Rightarrow \eta_c = \frac{Q_2 + Q_1}{Q_2} = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} < 1$$

Antar ideell gass  $\Rightarrow U = U(T) \Rightarrow \Delta U$  langs de to isotermene

$$\Rightarrow Q_2 = W_{ab} = \int_{V_a}^{V_b} p(V) dV = nRT_2 \int_{V_a}^{V_b} \frac{dV}{V} = nRT_2 \ln \frac{V_b}{V_a}$$

$$Q_1 = W_{cd} = \dots = nRT_1 \ln \frac{V_d}{V_c} \quad (V_d < V_c \Rightarrow Q_1 < 0)$$

Langs adiabatene:  $T \cdot V^{\gamma-1} = \text{konst.}$

$$\Rightarrow T_2 V_b^{\gamma-1} = T_1 V_c^{\gamma-1} \quad \text{og} \quad T_1 V_d^{\gamma-1} = T_2 V_a^{\gamma-1}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_c}{V_b}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_d}{V_a}\right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_b}{V_a} = \frac{V_c}{V_d}$$

$$\text{Dermed: } Q_1 = nRT_1 \ln \frac{V_a}{V_b} = \left[ -nRT_2 \ln \frac{V_b}{V_a} \right] \cdot \frac{T_1}{T_2} = -Q_2 \frac{T_1}{T_2}$$

$$\Rightarrow W = Q_2 + Q_1 = Q_2 \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2}} \quad \text{Virkningsgrad for Carnotprosess}$$

Det kan bevises (gjøres ikke her):

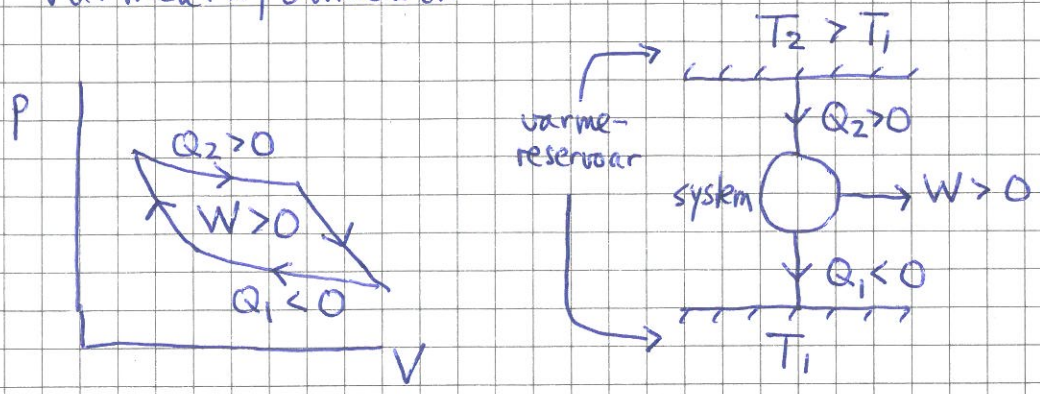
- Alle reelle kretsprosesser har virkningsgrad  $\eta < \eta_c$
- Carnotmaskin har  $\eta_c = 1 - T_1/T_2$  selv med annen "arbeidssubstans" enn ideell gass.



# Varmekraft- og kjølemaskiner

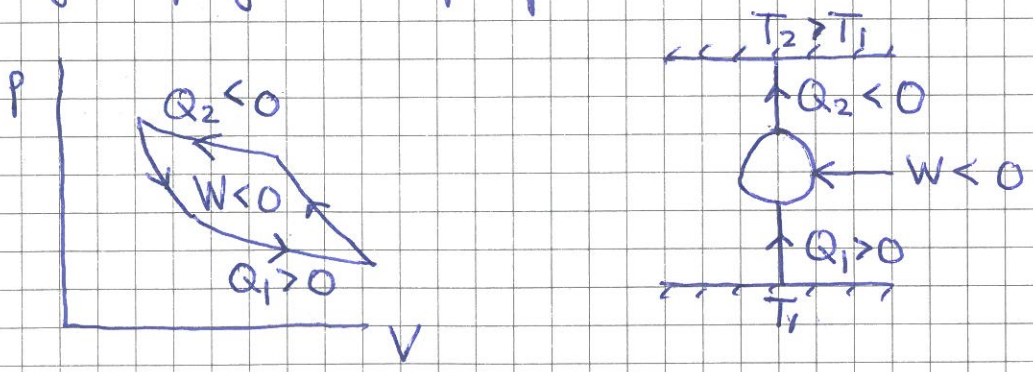
[YF 20.2-20.4 (20.6); LHL 16.3-16.4]

## Varmekraftmaskin



- Tilfører varme  $Q_2$  ; får utført arbeid  $W$
- Virkegrad:  $\eta = Q_2/W$  ;  $\eta < \eta_c = 1 - T_1/T_2 < 1$
- Varmereservoar:  $C \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta T = |Q/C| = 0$

## Kjøleskap og varmepumpe



- Gjør arbeid  $|W|$  på systemet ; får tatt varme  $Q_1$  ut av lavtemp.reservoar (kjøleskap), evt. får tilført varme  $|Q_2|$  til høyttemp.res. (stua)
- Kostnad :  $|W|$     Nytte:  $Q_1$  (kjøleskap), evt  $|Q_2|$  (varmepumpe)
- Effektivitet:  $\epsilon_K = |Q_1/W|$  (kjøleskap)  
 $\epsilon_V = |Q_2/W|$  (varmepumpe)



- Carnot-prosessen gir teoretiske max-verdier:

$$\varepsilon_K^c = \left| \frac{Q_1}{W} \right| = \left| \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2} \right| = \left| \frac{1}{1 + Q_2/Q_1} \right| = \left| \frac{1}{1 - T_2/T_1} \right| = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

$$\varepsilon_V^c = \left| \frac{Q_2}{W} \right| = \left| \frac{Q_2}{Q_2 + Q_1} \right| = \left| \frac{1}{1 + Q_1/Q_2} \right| = \left| \frac{1}{1 - T_1/T_2} \right| = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

Eks 1: Finn  $P_w = |dW/dt|$ , nødvendig elektrisk effekt, for Carnot-kjøleskap ( $T_1 = 4^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = 22^\circ\text{C}$ ) som krever

$P_Q = |dQ_1/dt| = 3.0 \text{ kW}$  for å holde stabil  $T_1$ .

(Varme kommer inn pga varmeledning, varm mat/drikke og åpning av dør.)

Løsn 1:  $\varepsilon_K^c = 277\text{K} / (295\text{K} - 277\text{K}) = 277/18 \approx 15$

$$\Rightarrow P_w = P_Q / \varepsilon_K^c = 3.0 \text{ kW} / 15 = \underline{0.2 \text{ kW}}$$

Eks 2: Finn  $T_1(t)$  hvis "strømmen går" ( $P_w = 0$ ); anta kubisk kjøleskap,  $V = (0.5\text{m})^3$ ,  $L = 5\text{cm}$  (veggtykkelse),  $\lambda = 0.035 \text{ W/m}\cdot\text{K}$  (veggens varmeledn. evne) og  $C_1 = 20 \text{ kJ/K}$  (ca 10 kg mat og drikke).

Løsn 2:  $j = + (dQ/dt) / A = + (C_1 dT_1/dt) / A$ ;  $A = 6 \cdot 0.25\text{m}^2 = 1.5\text{m}^2$

Fouriers lov:  $j = \lambda (T_2 - T_1) / L$  ( $j =$  varmestrøm inn)

$$\Rightarrow \frac{dT_1}{dt} = - \frac{\lambda A}{C_1 L} (T_1 - T_2) = -\alpha (T_1 - T_2); \quad \alpha = \frac{\lambda A}{C_1 L}$$

$$\Rightarrow \frac{dT_1}{T_1 - T_2} = -\alpha dt \Rightarrow \ln |T_1 - T_2| = -\alpha t + \text{konst.}$$

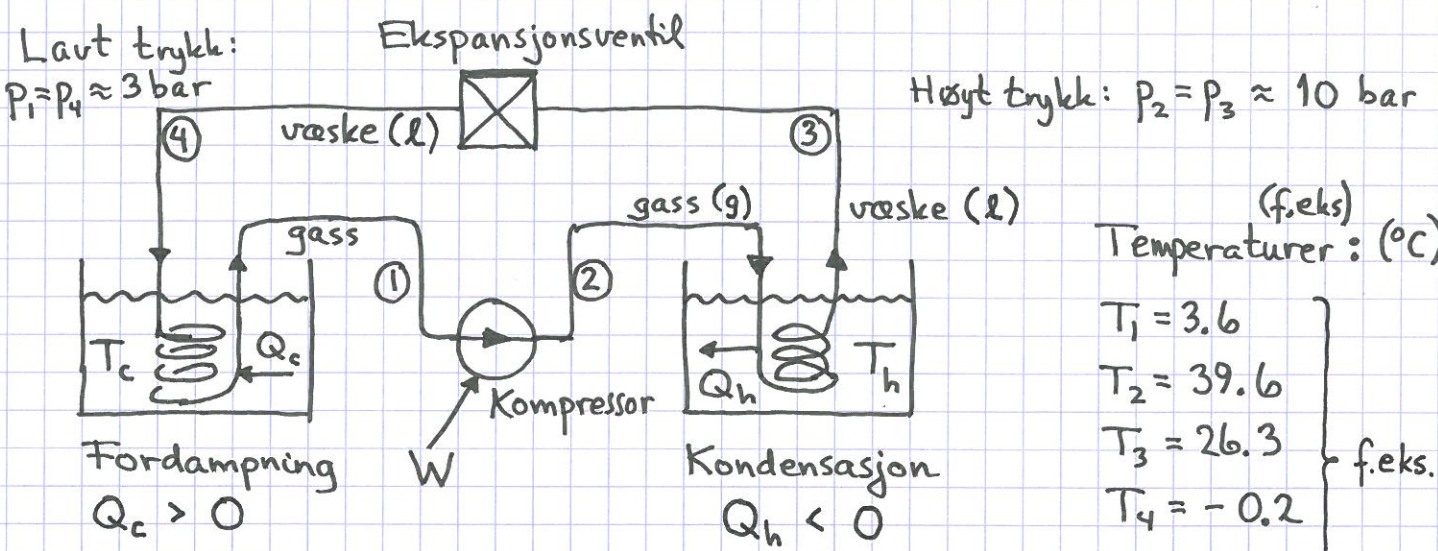
$$\Rightarrow |T_1 - T_2| = |T_1(0) - T_2| e^{-\alpha t} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Newtons} \\ \text{avkjølingslov} \end{array} \right. \quad \ln |T_1(0) - T_2|$$

med  $\alpha = 0.035 \cdot 1.5 / (20 \cdot 10^3 \cdot 0.05) \text{ s}^{-1} = 5.25 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} = 0.189 \text{ h}^{-1}$

dvs  $1/\alpha \approx 5.3 \text{ h}$ , dvs det tar drøyt 5 timer for  $\Delta T = T_2 - T_1$  er redusert fra  $18^\circ\text{C}$  til ca  $7^\circ\text{C}$ , dvs  $T_1$  økt fra  $4^\circ\text{C}$  til  $15^\circ\text{C}$ .

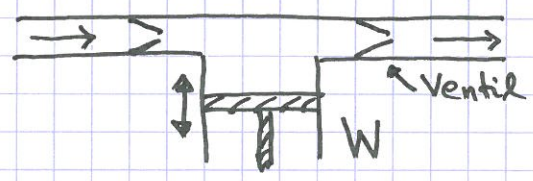


# Demo: Varmepumpe / Kjøleskap

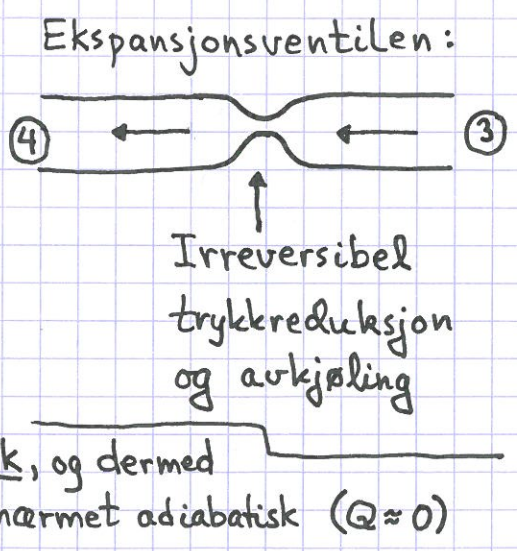
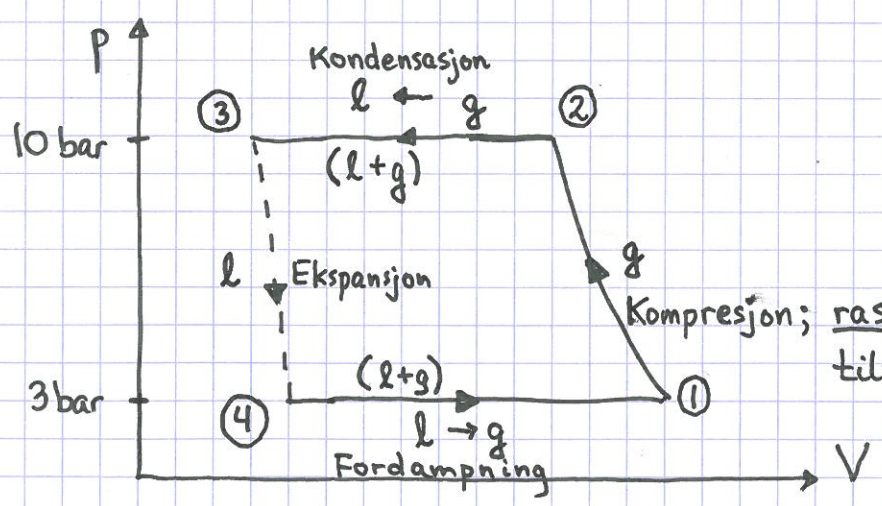


- (f.eks.)  
 Temperaturer: (°C)  
 $T_1 = 3.6$   
 $T_2 = 39.6$   
 $T_3 = 26.3$   
 $T_4 = -0.2$   
 $T_c = 2.9$   
 $T_h = 23.6$  } f.eks.

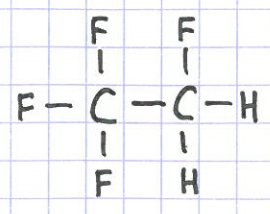
System: Sirkulerende kjølevæske; pumpes av kompressoren:



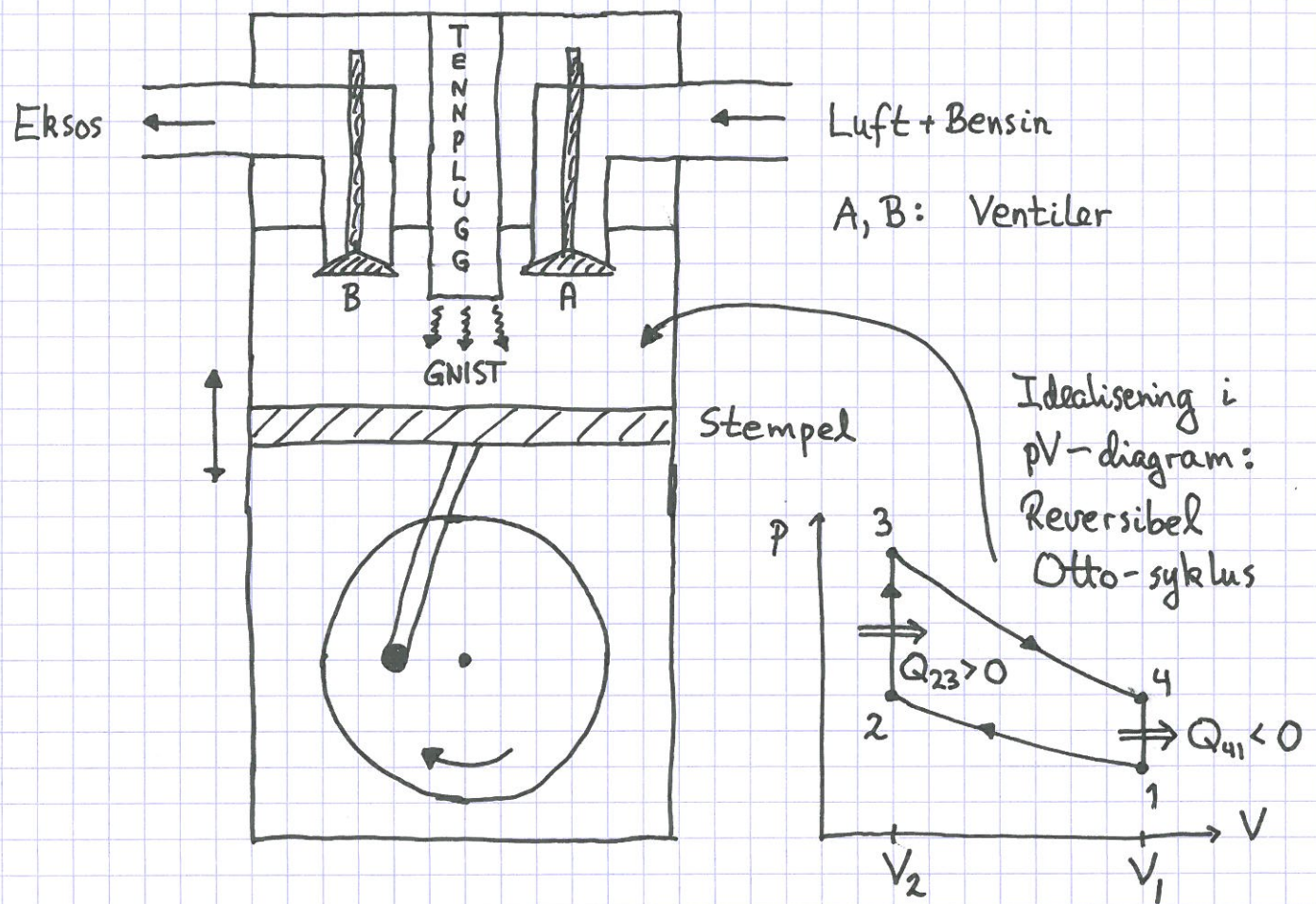
I et pV-diagram:



Kjølemediet: R134a  $\hat{=}$   $C_2H_2F_4$ , (1,1,1,2)-tetrafluoretan







1. A åpen, B lukket, luft+bensin inn

1→2. A og B lukket, adiabatisk kompresjon,  
 $\Delta V < 0$ ,  $\Delta p > 0$ ,  $\Delta T > 0$ ,  $W_{12} < 0$ ,  $Q_{12} = 0$

2→3. A og B lukket, antenning med gnist fra tennplugg,  
 $\Delta V = 0$ ,  $\Delta p > 0$ ,  $\Delta T > 0$ ,  $W_{23} = 0$ ,  $Q_{23} > 0$

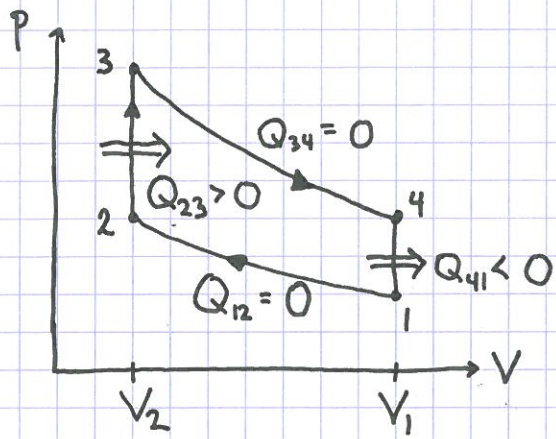
3→4. A og B lukket, adiabatisk utvidelse,  
 $\Delta V > 0$ ,  $\Delta p < 0$ ,  $\Delta T < 0$ ,  $W_{34} > 0$ ,  $Q_{34} = 0$

4→1. A lukket, B åpen, eksos ut,  
 $\Delta V = 0$  (for "systemet", som nå er forbrent luft/bensin-blanding)  
 $\Delta T < 0$ ,  $\Delta p < 0$ ,  $Q_{41} < 0$ ,  $W_{41} = 0$

"1→1". A åpen, B lukket, luft+bensin inn (nytt system!)

osv. osv.





Virkningsgrad for Otto-syklusen:

$$\eta_0 = \frac{W}{Q_{23}} = \frac{Q_{23} + Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{|Q_{41}|}{Q_{23}}$$

$$Q_{23} = C_V (T_3 - T_2) ; |Q_{41}| = C_V (T_4 - T_1)$$

$$\Rightarrow \eta_0 = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{T_4 (1 - T_1/T_4)}{T_3 (1 - T_2/T_3)}$$

1-2 og 3-4 er adiabatere  $\Rightarrow T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} ; T_4 V_1^{\gamma-1} = T_3 V_2^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_4} = \frac{T_2}{T_3} ; \text{ dessuten er } \frac{T_4}{T_3} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \text{ med } \gamma \approx 1.4 \text{ (mest luft!)}$$

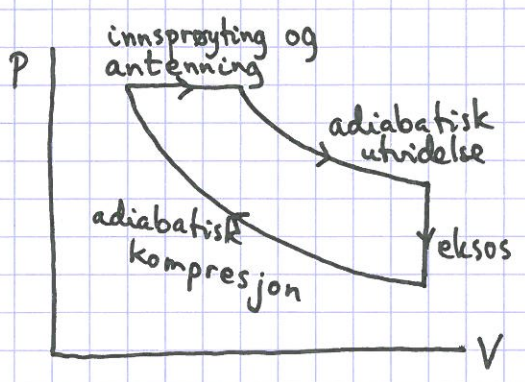
Dermed:

$$\eta_0 = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 1 - \varepsilon^{1-\gamma}$$

der  $\varepsilon = V_1/V_2 =$  kompresjonsforholdet

Her er  $T_4 > T_1 = T_{\min}$ ,  $T_3 = T_{\max}$ , slik at  $\eta_0 < \eta_c = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}$

Idealisert Diesel-syklus:



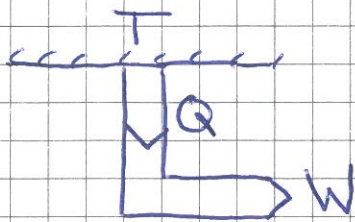
dvs 2 adiabatere, 1 isokor og 1 isobar



## Termodynamikkens 2. lov [YF 20; LHL 16,17]

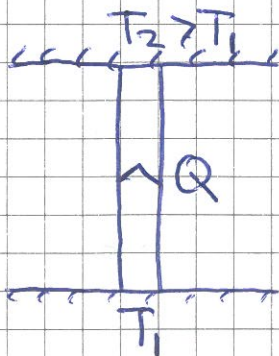
Empirisk lov; setter begrensninger på hva som er mulige prosesser (selv om 1. lov, energibevarelse, er oppfylt):

Kelvin: "Umulig å lage kretsprosess som tar varme  $Q$  fra et varmereservoar og omsetter dette i sin helhet i arbeid  $W$ ."



"K" er ikke mulig!

Clausius: "Umulig å lage kretsprosess som tar varme  $Q$  fra varmeres. med temp.  $T_1$  og avgir dette i sin helhet til varmeres. med temp.  $T_2 > T_1$ ."



"C" er ikke mulig!

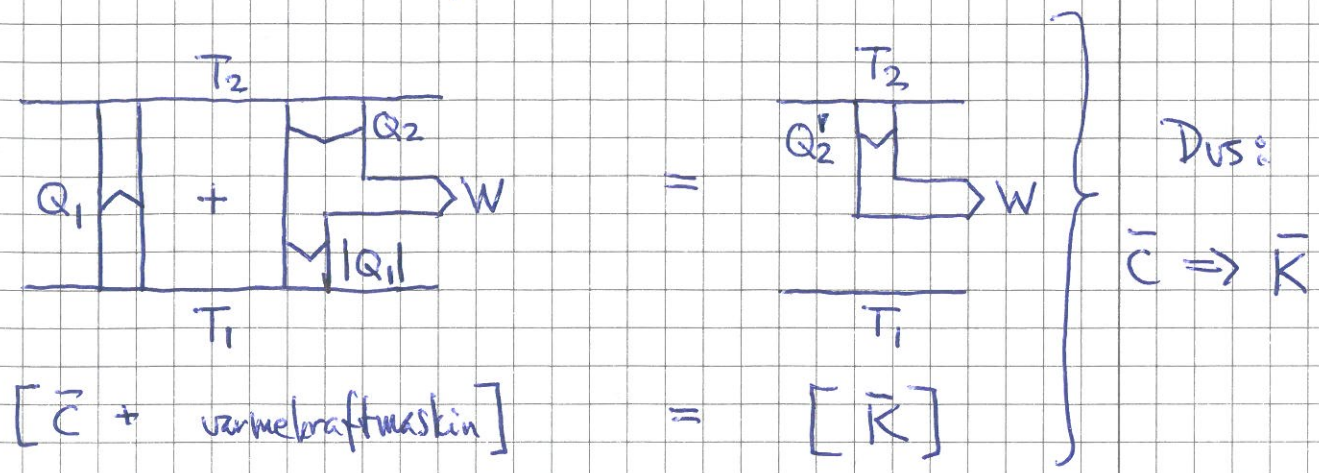
K og C er ekvivalente formuleringer av 2. lov.

Bevises ved å vise at  $\bar{K} \Leftrightarrow \bar{C}$ ,

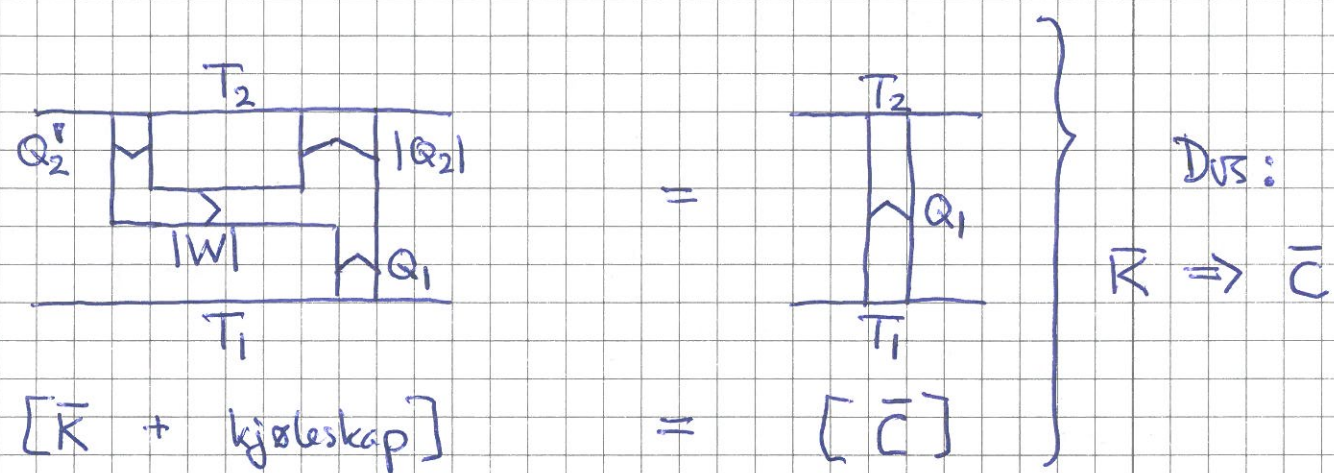
dvs: Hvis Kelvin tar feil, tar også Clausius feil ( $\bar{K} \Rightarrow \bar{C}$ ) og omvendt ( $\bar{C} \Rightarrow \bar{K}$ ).



Anta at Clausius tar feil:



Anta at Kelvin tar feil:



Dermed:  $\bar{K} \Leftrightarrow \bar{C}$

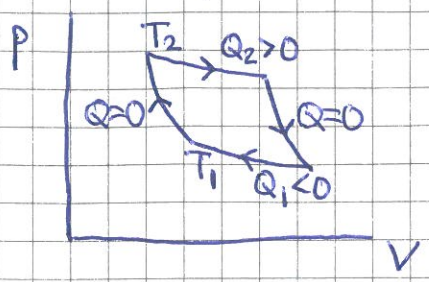
Men da har vi også:  $K \Leftrightarrow C$

(Hvis Kelvin har rett, har også Clausius rett.  
Hvis Clausius har rett, har også Kelvin rett.)



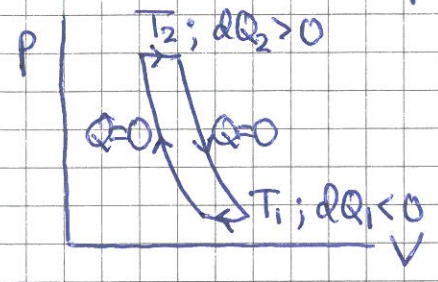
# Entropi [YF 20.7; LHL 17.1]

Carnot-prosess:



$$Q_1 = -Q_2 \cdot \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

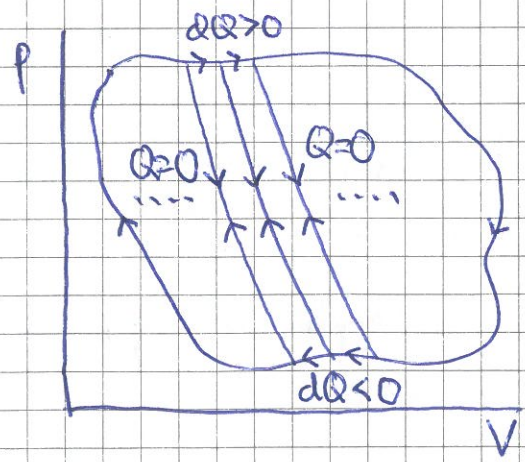
"Liten" Carnot-prosess:



$$\frac{dQ_1}{T_1} + \frac{dQ_2}{T_2} = 0$$

des:  $\oint \frac{dQ}{T} = 0$

Vilkårlig reversibel kretsprosess:



$\Rightarrow$  Den vilkårlige kretsprosessen (ytre kurve) = sum av mange små rev. Carnot-prosesser, fordi alle "indre adiabater" da kjøres både opp og ned

$\Rightarrow \boxed{\oint \frac{dQ}{T} = 0}$  for vilkårlig reversibel kretsprosess

$\Rightarrow \boxed{dS = \frac{dQ}{T}}$  må da være endring i en tilstandsfunk., entropien S. Des:  $\boxed{\oint dS = 0}$

Enhet:  $[S] = J/K$



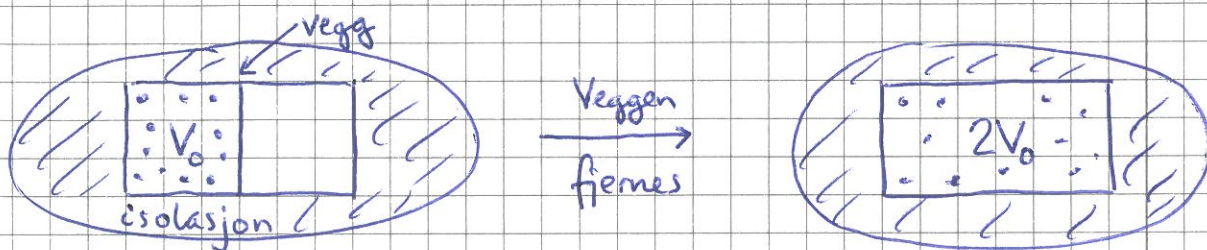
"Den termodynamiske identitet": 1. lov uttrykt  
kun med tilstandsfunksjoner.

137

$$dQ = dU + dW; \quad dW = p dV \quad (\text{reversibelt arbeid})$$
$$dQ = T dS \quad (\text{rev. varme})$$

$$\Rightarrow \boxed{T dS = dU + p dV}$$

Eks:  $\Delta S$  ved utvidelse av ideell gass; varmeisoleret.



Løsning: Dersom  $V_0 \rightarrow 2V_0$  i reversibel adiabatisk prosess, blir  $dQ = T dS = 0$ , dvs  $dS = 0$ , for alle deler av prosessen; dvs  $\Delta S = 0$  for rev. adiabatisk prosess (= isentropisk prosess).

Nå er  $\Delta Q = 0$ , men  $\Delta S \neq \Delta Q/T$  fordi prosessen er irreversibel. Veggen fjernes uten at gassen gjør arbeid,  $\Delta W = 0$ . 1. lov gir da  $\Delta U = 0$ , og dermed  $\Delta T = 0$ , siden  $U = U(T)$  for ideell gass.

$$\Rightarrow dS = dU/T + p dV/T = N k_B dV/V \quad (dU=0)$$

$$\Rightarrow \Delta S = \int dS = N k_B \int_{V_0}^{2V_0} \frac{dV}{V} = N k_B \ln \frac{2V_0}{V_0} = \underline{\underline{N k_B \ln 2}}$$



Merk:

- Vi kan beregne  $\Delta S$  for irreversibel prosess ved å regne på en reversibel prosess, fordi  $S$  er en tilstandsfunksjon. Nok å kjenne start- og slutt-tilstandene.
- Vi fant  $\Delta S > 0$  for irrev. pros. i termisk isolert system. Dette prinsippet om entropiens økning holder alltid:

$$\Delta S \geq 0 \text{ for alle prosesser i et termisk isolert system}$$

$$[\Delta S = 0 \text{ for alle reversible prosesser i term. isolert system}]$$

Mikroskopisk beskrivelse av entropi [YF 20.8; LHL 17.11]

Boltzmann: " $S = k \log W$ ". I vår notasjon:

$k \rightarrow k_B$ ;  $\log \rightarrow \ln$ ;  $W \rightarrow \Omega = \#$  ulike mikrotilstander som er konsistente med den gitte makrotilstanden.

$$\Rightarrow \boxed{S = k_B \ln \Omega}$$



Ekst: Spontan utvidelse ( $V_0 \rightarrow 2V_0$ ) av ideell gass (som s. 137) (139)

Løsning: Tenker oss  $V_0$  inndelt i  $M$  svært små delvolum  $\Delta$ , slik at hver partikkel har  $M$  mulige posisjoner før og  $2M$  mulige posisjoner etter utvidelsen.

$$\Rightarrow \Omega_{\text{før}} = M^N; \quad \Omega_{\text{etter}} = (2M)^N$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta S &= S_{\text{etter}} - S_{\text{før}} = k_B \ln (2M)^N - k_B \ln M^N \\ &= k_B \ln 2^N = \underline{\underline{Nk_B \ln 2}} \end{aligned}$$

- Samme som med termodynamikk, s 137!
- "Økt volumen betyr økt entropi"
- Naturlige (spontane) prosesser går i en bestemt retning, som tilsvarende at entropien øker.
- Oppsummering, termodyn. 1. og 2. lov:  
Energien er bevart. Entropien øker.