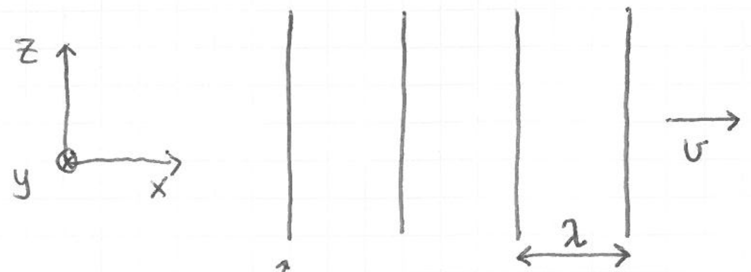
Bølger i vilkårlig retning

Plan harmonisk bølge i pos. x-retning:



$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$

$k = 2\pi/\lambda, \quad \omega = 2\pi/T$

$v = \lambda/T = \omega/k$

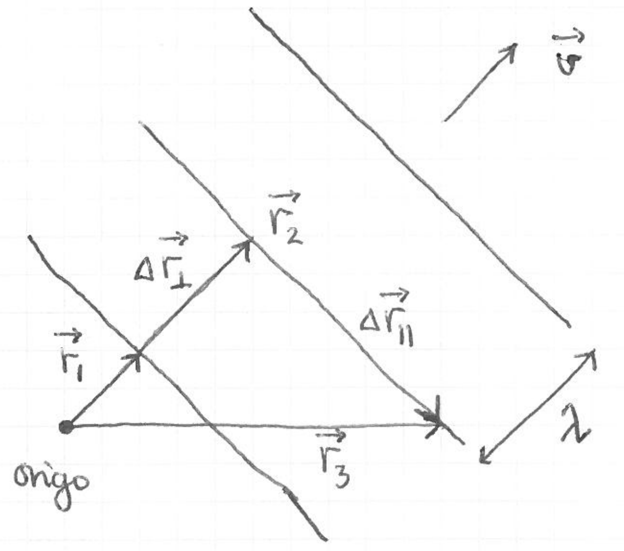
$\vec{v} = v\hat{x}$

bølgefronter (f.eks. topper);

flater med lik fase overalt i gitt ~~ξ~~ bølgefront,

faseforskjell 2π mellom "nabo-bølgefronter" (med $\Delta x = \lambda$)

Plan harm. bølge i vilkårlig retning:



$\vec{\xi}(\vec{r},t) = \vec{\xi}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$

Longit: $\vec{\xi}_0 \parallel \vec{v}$

Transv: $\vec{\xi}_0 \perp \vec{v}$

Anta f.eks. $t=0$: $\vec{\xi}(\vec{r},0) = \vec{\xi}_0 \sin \vec{k}\cdot\vec{r}$

Lik fase i $\vec{r}_2$ og $\vec{r}_3$ $\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r}_2 = \vec{k}\cdot\vec{r}_3 \Rightarrow \vec{k}\cdot(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) = 0$

$\Rightarrow \vec{k}\cdot\Delta\vec{r}_\parallel = 0 \Rightarrow \vec{k} \perp \Delta\vec{r}_\parallel \Rightarrow \vec{k} \parallel \vec{v}$

$\Rightarrow$ **Bølgetallsvektoren $\vec{k}$ har samme retning som bølgens forplantn. retning ($\vec{v}$)**

Faseforskjell 2π mellom $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\vec{r}_2 = \vec{k}\cdot\vec{r}_1 + 2\pi \quad \Rightarrow \quad \vec{k}\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 2\pi$$

$$\Rightarrow \vec{k}\cdot\Delta\vec{r}_\perp = 2\pi \quad \Rightarrow \quad k\cdot\lambda = 2\pi \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{v}}$$

Hvis $\vec{\xi}(\vec{r},t) = \vec{\xi}_0 \sin(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t)$ er $\vec{k} = -\frac{2\pi}{\lambda}\hat{v}$

På komponentform: $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$

$$k = |\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$\lambda = 2\pi/k$$

Kulebølger

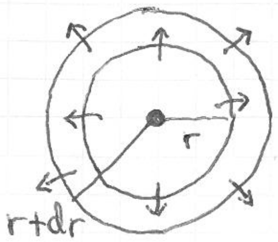
Kulesymmetrisk bølgekilde (høyttaler, evt. sola for E.M. bølger)

$\Rightarrow$ bølge med $\vec{k} = k\hat{r}$ og lik I i alle retninger, $I = I(r)$

Bølgefronter: Kuleskall med areal $A = 4\pi r^2$

Energibevarelse $\Rightarrow$ Samme energi $E(r)$ pr tidsenhet gjennom $A(r)$ som energi $E(r+dr)$ pr tidsenhet gjennom $A(r+dr)$:

$$\langle P(r_1)\rangle = \langle P(r_2)\rangle \quad \text{uavhengig av } r$$



$$\Rightarrow 4\pi r_1^2\, I(r_1) = 4\pi r_2^2\, I(r_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{I(r) \sim 1/r^2 \text{ for kulebølger}}$$

Sylinderbølger

Sylindersymmetrisk bølgekilde (f.eks. lang tynn høyttaler)

$\Rightarrow$ sylinderformede bølgefronter med omkrets $2\pi r$, lengde L, og dermed areal $A = 2\pi r \cdot L \sim r$ (r = avstand fra kilden)

$\Rightarrow$ $\boxed{I(r) \sim 1/r \text{ for sylinderbølger}}$

Plane bølger

Plan bølgekilde (f.eks. stor vibrerende plate)

$\Rightarrow$ plane bølgefronter med areal A uavhengig av avstanden fra kilden

$\Rightarrow$ $\boxed{I = \text{konstant (uavh. av } r) \text{ for plane bølger}}$

Eks: Du står 10 m fra en kuleformet lydkilde.
Hvor langt unna må du gå for å senke lydtrykksnivået med 30 dB ?

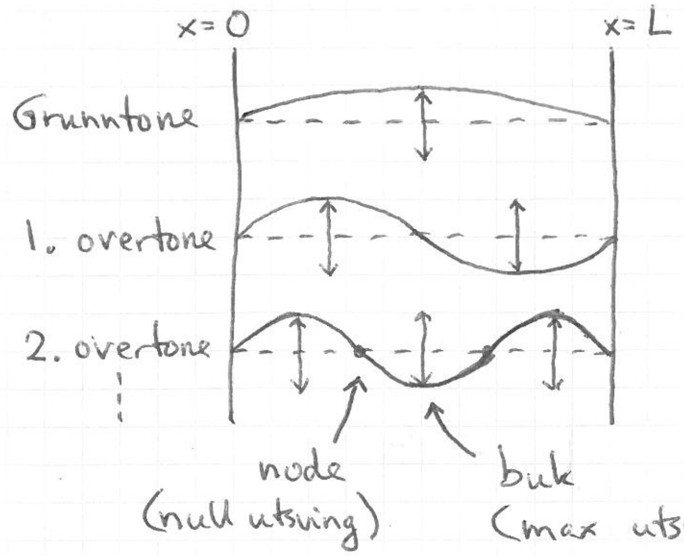
Løsn: $-30 = \beta_2 - \beta_1 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} - 10 \log \frac{I_1}{I_0}$

$= 10 \log (I_2/I_1) = 20 \log (r_1/r_2) = -20 \log (r_2/r_1)$

$\Rightarrow r_2/r_1 = 10^{1.5} \approx 32 \Rightarrow \underline{\underline{r_2 \approx 320 \text{ m}}}$

Stående bølger [YF 15.7, 15.8, 16.4 ; LL 10.3]

Ren harm. bølge på streng, lengde L, fast i begge ender, må ha $L = n \cdot \lambda/2$; $n = 1, 2, 3, \ldots$



$\lambda_1 = 2L$

$\lambda_2 = L$

$\lambda_3 = \frac{2}{3} L$

Strenge-instrumenter

Generell (harmonisk!) løsning av bølgelign.: $y(x,t) = y_1 \sin(kx - \omega t) + y_2 \sin(kx + \omega t)$

$y(0,t) = 0 \Rightarrow -y_1 \sin \omega t + y_2 \sin \omega t = 0 \Rightarrow y_2 = y_1 = y_0$

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$

$$\Rightarrow y(x,t) = y_0 \left[\sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t + \sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t \right]$$

$$= 2y_0 \sin kx \cos \omega t$$

Dvs: Harm. svingn. $(\cos \omega t)$ med stedsavh. amplitude $(2y_0 \sin kx)$

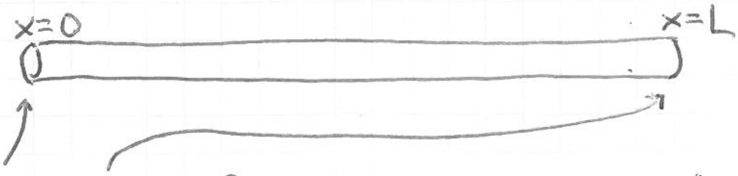
Kalles <u>stående bølge</u> ; ingen netto energitransport.

$y(L,t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$,

Som allerede fastslått. Med $v = \sqrt{S/\mu}$ blir mulige frekvenser for stående bølger (lengde L; fast i begge ender)

$$\boxed{f_n = v/\lambda_n = \sqrt{S/\mu} \cdot n/2L} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Tilsvarende får vi stående lydbølger i langt, tynt rør, lengde L, åpent (eller lukket) i begge ender:



$\boxed{\text{Blåseinstrumenter}}$

Max utsving for utsvingsbølgen $\Rightarrow \lambda_n = \dfrac{2L}{n} \Rightarrow$

(evt. null utsving hvis lukket i begge ender)

$$\boxed{f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{\sqrt{B/\rho}\cdot n}{2L}}$$

$(n=1,2,3,\ldots)$

Med "to ulike" ender:  , ...

(Streng med 1 fast og 1 fri ende; Rør med 1 åpen og 1 lukket ende)

$\lambda_1 = 4L, \quad \lambda_2 = 4L/3, \quad \lambda_3 = 4L/5, \ldots \Rightarrow \boxed{\lambda_n = \dfrac{4L}{2n-1}\ ; \ n=1,2,\ldots}$

Trykkbølgen: $\Delta p(x,t) = -B \cdot \dfrac{\partial \xi}{\partial x}$ (se s.75)

Eks: Rør, to åpne ender, $\xi(x,t) = 2\xi_0 \sin kx \cos \omega t$

$\Rightarrow \Delta p(x,t) = -2kB\xi_0 \cos kx \cos \omega t$

$\Rightarrow$ max amplitude for Δp der ξ har nullpunkt, og omvendt

---

Eks: Cellostreng, grunntone 146,8 Hz (D), lengde 700 mm, masse 4.0 g/m. Bestem S.

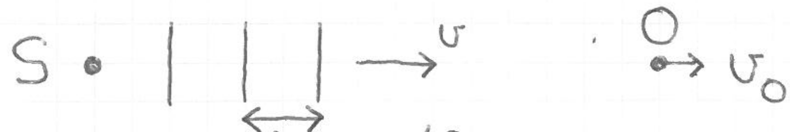
Løsn: $f_1 = v/\lambda_1 = \sqrt{S/\mu}/2L$

$$\Rightarrow S = 4 f_1^2 L^2 \mu = 4\cdot 146.8^2 \cdot 0.700^2 \cdot 4.0\cdot 10^{-3} \ \underbrace{s^{-2}\, m^2\, \frac{kg}{m}}_{=N}$$

$$\simeq \underline{\underline{169\ N}}$$

Dopplereffekten [YF 16.8 ; LL 10.8]

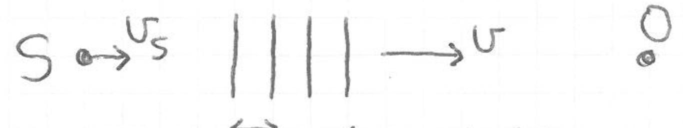
Lydkilde (S) og observatør (O) i relativ bevegelse langs forbindelseslinjen $\Rightarrow$ Observert frekvens $f_o \neq$ Utsendt frekvens f_s

① 

$\lambda = v/f_s$

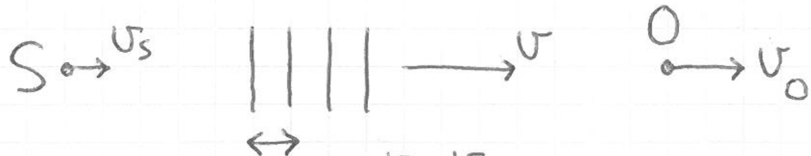
Bølgefart relativt O : $v - v_o$

$\Rightarrow f_o = \dfrac{v - v_o}{\lambda} = \dfrac{v - v_o}{v} \cdot f_s < f_s$ hvis $v_o > 0$

② 

$\lambda = (v - v_s)/f_s$

$\Rightarrow f_o = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{v}{v - v_s} \cdot f_s > f_s$ hvis $v_s > 0$

③ 

$\lambda = \dfrac{v - v_s}{f_s}$

$\Rightarrow f_o = \dfrac{v - v_o}{\lambda} = \dfrac{v - v_o}{v - v_s} \cdot f_s$

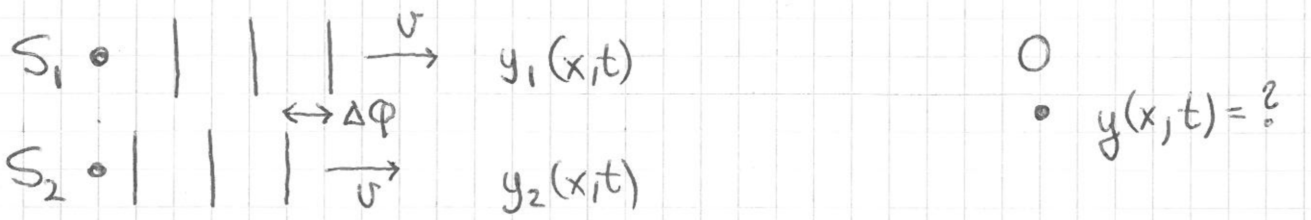
④ Hvis vind: v_m = luftas fart $\Rightarrow$ v erstattes av $v + v_m$

$$\Rightarrow \boxed{f_o = \frac{v + v_m - v_o}{v + v_m - v_s}\, f_s}$$

Interferens [YF 15.6, 16.6; LL 10.7]

= overlagring (sum!) av to eller flere bølger på samme sted til samme tid

1) Samme retning og frekvens, ulik fase



Total bølge ved O:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_0 \cos(kx-\omega t) + y_0 \cos(kx - \omega t + \Delta\varphi)$$

Bruker $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a-b}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2}$

$$\Rightarrow y(x,t) = 2y_0 \cos \frac{\Delta\varphi}{2} \cdot \cos(kx - \omega t + \Delta\varphi/2)$$

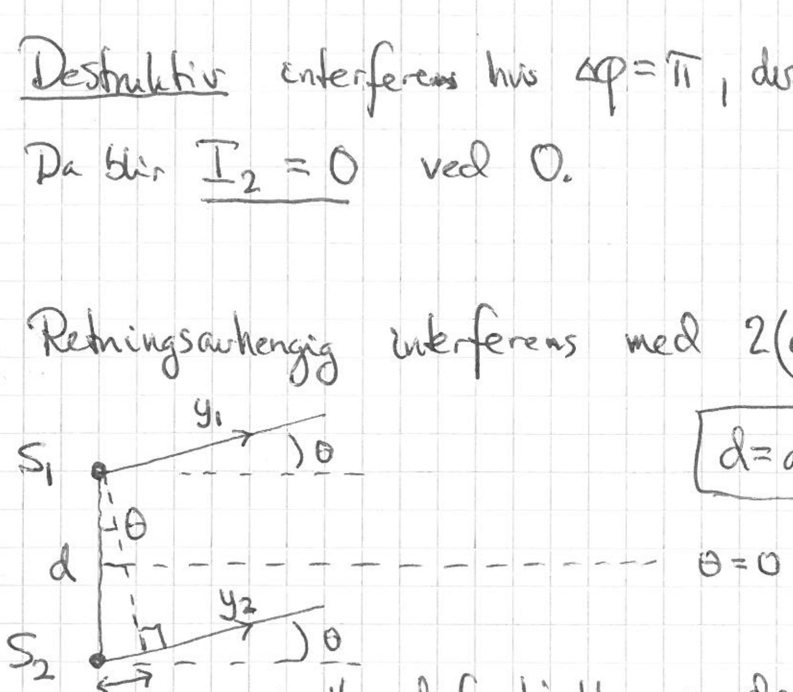
$\Rightarrow$ Konstruktiv interferens hvis $\Delta\varphi = 0$, dvs y_1 og y_2 i fase ved O.

Hvis en bølge gir $\underbrace{I_1}_{\text{intensitet}}$ ved O, vil to bølger i fase gi $I_2 = 4I_1$

Destruktiv interferens hvis $\Delta\varphi = \pi$, dvs y_1 og y_2 i motfase ved O.

Da blir $I_2 = 0$ ved O.

2) Retningsavhengig interferens med 2 (eller flere) kilder i fase



$\boxed{d = \text{avstand mellom kildene}}$

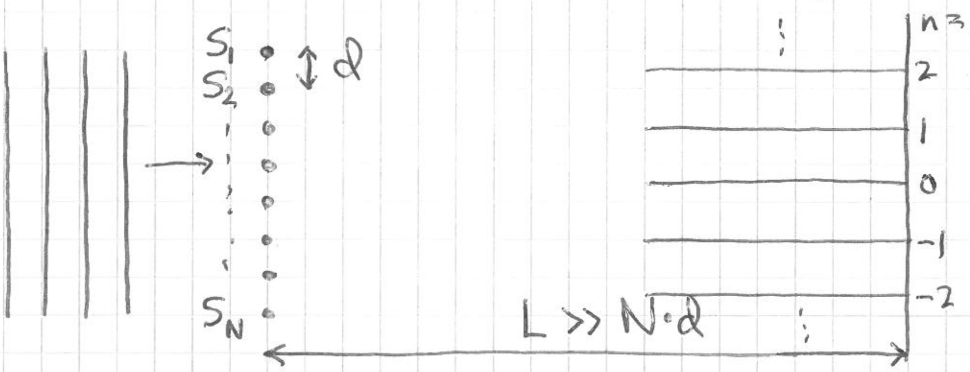
Δr = veilengdeforskjellen $= d \cdot \sin\theta$

Antar at sum av y_1 og y_2 observeres på skjerm/detektor i avstand $L \gg d$ fra kildene.

Konstruktiv interferens når $\Delta r = d \sin\theta = n \cdot \lambda$
Destruktiv — " — — " — $\Delta r = d \sin\theta = (n + 1/2)\lambda$

$n = 0, \pm 1, \ldots$

3) Samme som 2), men med mange bølgekilder i fase. Oppnås med diffraksjonsgitter: Mange smale spalteåpninger med avstand d i mellom. Plan bølge inn fra venstre:



Med retninger som oppfyller $\boxed{d \sin\theta = n\lambda}$ fås Konstruktiv interferens mellom alle N delbølger. Alle andre retninger gir intensitet $\approx$ null.

Demo: Laserpenner + diffraksjonsgitter.

Laserlys er E.M. bølge med skarpt definert bølgelengde λ.

Rød: 650 nm Grønn: 532 nm Blå: 405 nm

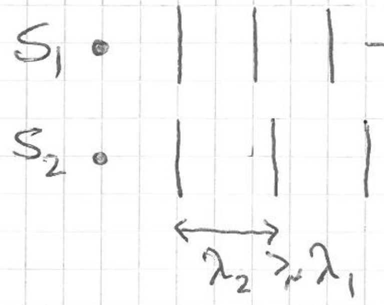
Gitter: 100, 300 og 600 spalter pr mm

$\Rightarrow d = \frac{1}{100}$ mm osv.

4) Svevning – "Interferens i tid"

[YF 16.7 ; LL 10.7]

To lydkilder med litt forskjellig frekvens:



S_1: $\longrightarrow \xi_1 = \xi_0 \cos(k_1 x - \omega_1 t)$

S_2: $\longrightarrow \xi_2 = \xi_0 \cos(k_2 x - \omega_2 t)$

$x=0$

$\xi(0,t) = ?$

(din trommehinne!)

$$\Rightarrow \xi(x,t) = 2\xi_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2} x - \frac{\Delta\omega}{2} t\right) \cdot \cos(kx - \omega t)$$

der $\Delta k = k_1 - k_2$, $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$, $k = \frac{k_1 + k_2}{2}$, $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$,

og vi antar $\Delta k \ll k$, $\Delta\omega \ll \omega$

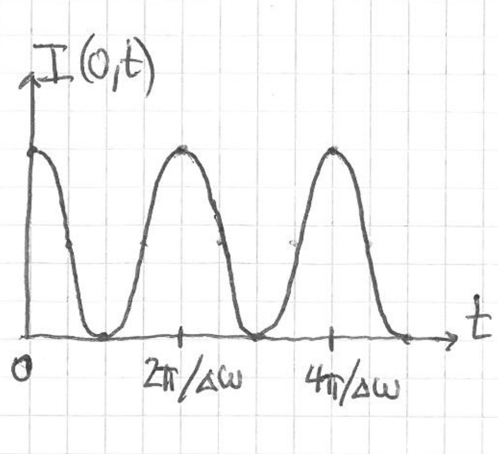
Ved $x=0$: $\xi(0,t) = 2\xi_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2} t \cdot \cos\omega t$

Intensitet ved $x=0$:

$$I(0,t) = \langle \varepsilon \rangle \cdot v = \frac{1}{2}\rho\omega^2 (2\xi_0)^2 v \cdot \cos^2\left(\frac{\Delta\omega}{2} t\right)$$

$$= \rho\omega^2 \xi_0^2 v \left\{1 + \cos(\Delta\omega \cdot t)\right\}$$

der $\langle \varepsilon \rangle$ er tidsmiddel over en periode $T = 2\pi/\omega$ av den raske svingningen (den som gir tonen)



$\Rightarrow$ Vi hører tonen $f = \frac{f_1 + f_2}{2}$, med modulert intensitet ("svevning", "beats") med svevefrekvens

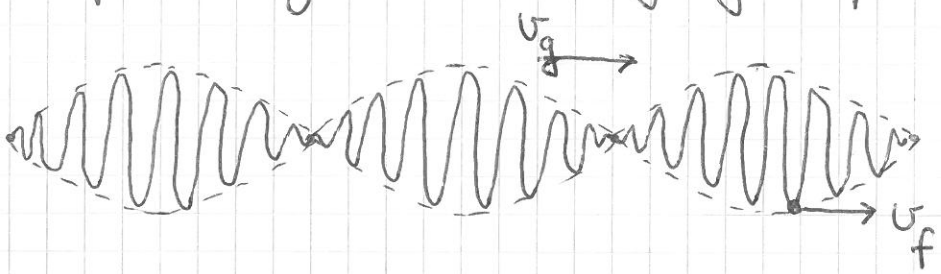
$$f_S = \frac{1}{T_S} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi} = f_1 - f_2$$

Gruppehastighet og dispersjon

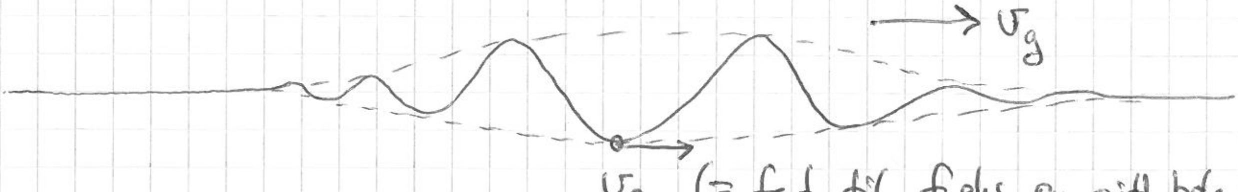
Sum av ξ_1 og ξ_2 på s. 91 utgjør bølgepakke med raskt varierende bærebølge $\cos(kx-\omega t)$ med hastighet $v = \omega/k = v_f$ = fasehastigheten, og en langsomt varierende modulasjonsbølge $\cos(\frac{1}{2}\Delta k x - \frac{1}{2}\Delta\omega t)$ med hastighet $\Delta\omega/\Delta k$. Med små $\Delta\omega$ og Δk blir dette

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \text{gruppehastigheten},$$

dvs felleshastigheten til bølgetoget/-pakken/-gruppen.



En sum av mange harmoniske delbølger med bølgelengder omkring en "typisk" bølgelengde λ kan gi totalt sett en romlig avgrenset bølgepakke:



(= fart til f.eks. en gitt bølgedal)

- Energien forplanter seg nå med fart $v_g = d\omega/dk$
- Dispersjonsrelasjonen $\omega(k)$ bestemmer v_g
- Bølger på streng og lydbølger i fluid har fasefart uavh. av k (hhv $v_f = \sqrt{S/\mu}$ og $v_f = \sqrt{B/\rho}$).

Da er $\omega = v_f k$, og $v_g = d\omega/dk = v_f$ (lineær dispersjon).

Overflatebølger på vann (Video på hjemmesida!)

To typer krefter påvirker "overflatens dynamikk":

Tyngdekraften og overflatespenningen. Dette gir (på dypt vann):

$$\omega(k) = \sqrt{g \cdot k + \gamma k^3/\rho} \; ; \quad \text{med } g = 9.81\ \mathrm{m/s^2},\ \rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$$

og $\gamma = 0.073\ \mathrm{N/m}$ (= overflatespenningen).

Tyngdebølger: $gk \gg \gamma k^3/\rho$. Kapillærbølger: $gk \ll \gamma k^3/\rho$

Like viktige når $gk = \gamma k^3/\rho \Rightarrow \lambda = 2\pi\sqrt{\gamma/\rho g} \simeq \underline{1.7\ \mathrm{cm}}$

Generelt, for tyngdebølger; D = vanndybden:

$$\omega^2(k) = gk \tanh(kD)$$

Eks: Tyngdebølger på dypt vann.

$$\omega \approx \sqrt{gk} \Rightarrow v_f = \sqrt{g/k}, \quad v_g = \frac{1}{2}\sqrt{g/k} = \frac{1}{2} v_f$$

$\Rightarrow$ Bølgetopper spaserer framover i bølgetoget!

Kapillærbølger.

$$\omega = \sqrt{\gamma k^3/\rho} \Rightarrow v_f = \sqrt{\gamma k/\rho}, \quad v_g = \frac{3}{2} v_f$$

$\Rightarrow$ Bølgetopper spaserer bakover i bølgetoget!

Tyngdebølger på grunt vann ($\tanh x \approx x$ når $|x| \ll 1$)

$$\omega^2 = gDk^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{gD} \cdot k \Rightarrow v_g = v_f = \sqrt{gD} \quad \left(\text{Jf. } \underline{\text{Tsunami}}\right)$$