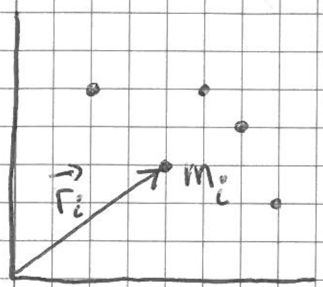
Massesenter [YF 8.5, oppg 8.115 + 116 ; LL 5.6, 5.8, 6.1]

(= tyngdepunkt hvis g = konstant i hele systemet)



Massesenter (CM) for N punktmasser $m_1, m_2 \dots m_N$ i pos. $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots \vec{r}_N$:

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

Total masse : $M = \sum_i m_i$

Kontinuerlig massefordeling : $m_i \to \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} dm$ (masseelement)

$$\Rightarrow \vec{R}_{CM} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm \quad ; \quad M = \int dm$$

integral over der vi har masse

Må typisk uttrykke dm ved koordinater :

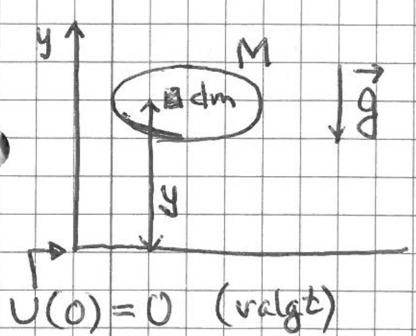
$dm = \rho\, dV$ (3D), $dm = \sigma\, dA$ (2D), $dm = \lambda\, d\ell$ (1D)

ρ, σ, λ = masse pr hhv volum-, flate-, lengdeenhet

$dV, dA, d\ell$ = hhv volum-, flate-, lengdeelement

Hvis massen er <u>uniformt fordelt</u>, er $\frac{dm}{M} = \frac{dV}{V}$ etc.

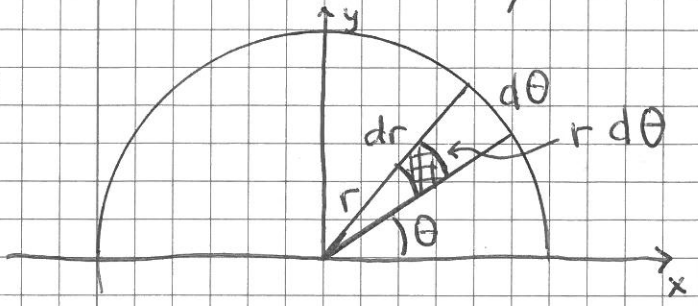
Eks: Pot. energi i tyngdefeltet (antar g = konstant)



$$U = \int dU = \int g y\, dm = g \int y\, dm = g M Y_{CM}$$

Dvs: Total U som om hele massen $M = \int dm$ er samlet i høyden $Y_{CM} = \frac{1}{M} \int y\, dm$, f.eks. i $\vec{R}_{CM}$

Eks: Halvsirkulær tynn skive, radius R



$$\frac{dm}{M} = \frac{dA}{A}$$

$$A = \pi R^2/2, \quad dA = dr \cdot r\,d\theta$$

$$y = r \sin\theta$$

$$X_{CM} = 0 \quad \text{pga symmetri} \quad \Rightarrow \quad \vec{R}_{CM} = Y_{CM}\,\hat{y}$$

$$Y_{CM} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{A}\int y\,dA$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi} r\sin\theta\; r\,d\theta\,dr$$

$$= \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R r^2\,dr \int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta = \frac{2}{\pi R^2}\cdot\frac{1}{3}R^3\cdot\underbrace{\Big|_0^{\pi}(-\cos\theta)}_{=2}$$

$$= \frac{4}{3\pi}R \approx 0.42\,R$$

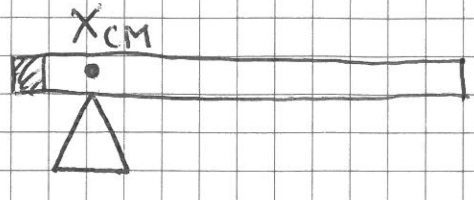
[Vis at $Y_{CM} = 2R/\pi$ for bøyle (1D)
og $Y_{CM} = 3R/8$ for halvkule (3D)]

Eks: Rør med lite lodd i enden

$m = 165\,g \qquad M = 305\,g$

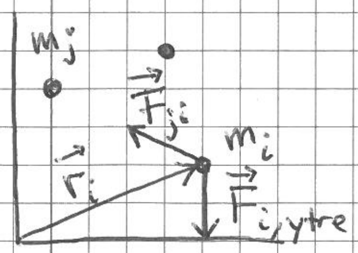
$$X_{CM} = \frac{1}{m+M}\left\{M\cdot 0 + \int_0^L x\,dm\right\} = \frac{1}{m+M}\int_0^L x\,m\,\frac{dx}{L} = \frac{m}{2(m+M)}L$$

$$= \frac{165}{940}L \approx 0.18\,L$$



Tyngdepunktbevegelsen [YF 8.5 ; LL 5.8]

Exp. (kast) viser at CM beveger seg som punktmasse i CM ! (Parabel, se s. 4)



N punktmasser, $\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$, $M = \sum_i m_i$

N2 for m_i :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{i,ytre} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{total indre kraft på } m_i}$$

total ytre kraft på m_i

Legger sammen N2 for alle $i = 1, 2, \ldots, N$:

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \underbrace{\sum_i \vec{F}_{i,ytre}}_{\text{total ytre kraft } \vec{F}_{ytre} \text{ på systemet}} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}}$$

$$= \underbrace{\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}}_{=0} + \ldots + \underbrace{\vec{F}_{N,N-1} + \vec{F}_{N-1,N}}_{=0}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) = \frac{d^2}{dt^2}\left(M\vec{R}_{CM}\right) = M\ddot{\vec{R}}_{CM}$$

Konklusjon:
$$\boxed{M\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}_{ytre}}$$

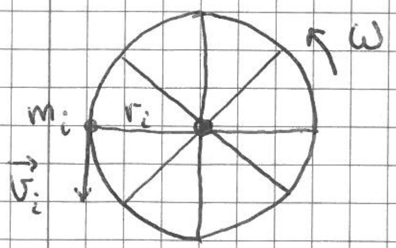
CM beveger seg som om hele M er samlet i CM og utsettes for summen av alle ytre krefter på systemet, $\vec{F}_{ytre}$

I tillegg kommer <u>rotasjon</u> om CM og <u>vibrasjon</u> om CM.

ROTASJON [YF 9,10 ; LL 6 (5)]

Innledende observasjoner:

- Ren rotasjon (hjul)



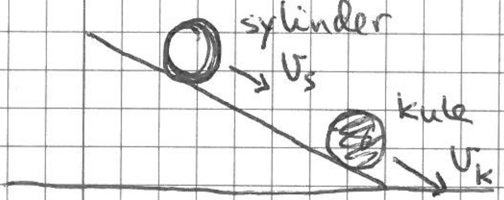
CM i ro $\Rightarrow K_{trans} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{R}}_{CM}^{\,2} = 0$

men $K_{rot} \neq 0$

Total impuls $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = 0$

men dreieimpulsen $\neq 0$

- Rulling



Hvorfor oppstår rotasjon?

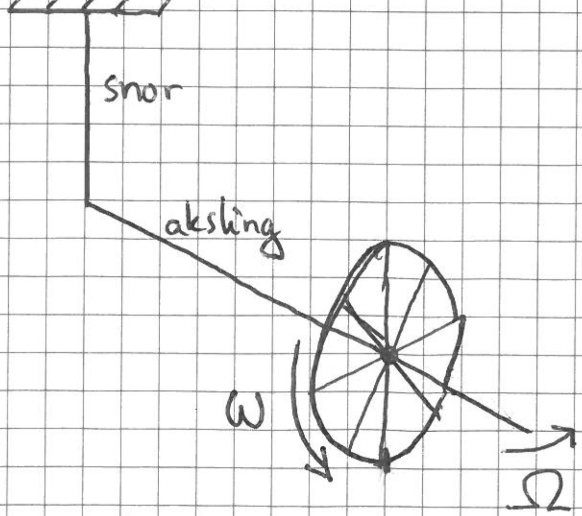
Hvor angriper kreftene?

Må ha dreiemoment!

Hvorfor blir $v_k > v_s$?

Har vi friksjon her?

- Kompleks dynamikk



Gyroskop.

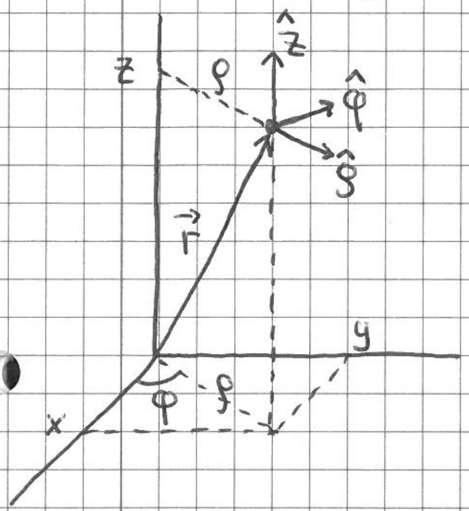
Presesjon

Sirkelbevegelse [YF 9.1-9.3 ; LL 1.8]

Generalisering av s. 5-6.

Anta rotasjon om z-aksen

$\Rightarrow$ Bruker sylinderkoord. (= polarkoord. + z)



$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = \rho\hat{\rho} + z\hat{z}$$

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$$

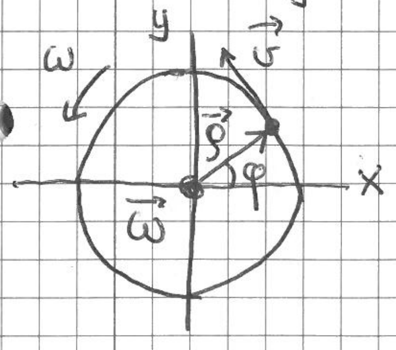
$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \tan\varphi = y/x$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\rho^2+z^2}$$

Bruker vinkelhastigheten som vektor til å "markere" rot.aksen:

$$\omega \rightarrow \vec{\omega} = \omega\hat{z} = \omega\hat{\omega}$$

Sett ned langs z-aksen:



$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \rho\frac{d\varphi}{dt}\hat{\varphi} = \rho\,\omega\,\hat{\varphi}$$

$$\vec{\omega} = \omega\hat{z}, \quad \vec{\rho} = \rho\hat{\rho}$$

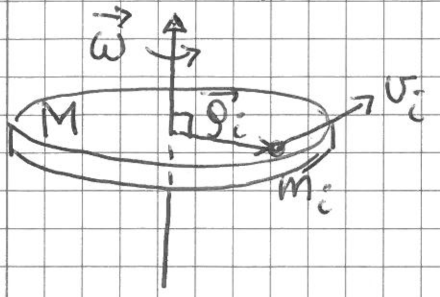
(ut av planet)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{\rho}}$$

Retning: $\hat{\varphi} = \hat{z} \times \hat{\rho}$ OK

Abs.verdi: $v = \omega\rho$ OK

Rotasjonsenergi. Treghetsmoment [YF 9.4 ; LL 6.4, 6.3] (33)



$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

$$v_i = \omega \rho_i$$

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i \rho_i^2\right)\omega^2$$

$I = \sum_i m_i \rho_i^2$ = legemets <u>treghetsmoment</u> mhp <u>valgt</u> akse (gitt)

Med kontinuerlig massefordeling:

$m_i \to \Delta m_i \xrightarrow{\Delta m_i \to 0} dm$; $\sum_i \longrightarrow \int$ over legemet

$\Rightarrow$ $\boxed{I = \int \rho^2 \, dm}$ ρ = avstand fra aksen til masseelementet dm

Dermed: $\boxed{K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2}$ Rotasjonsenergi

K for stivt legeme [YF 10.3 ; LL 6.6]

Total bevegelse = Translasjon av CM + Rotasjon om akse gjennom CM

$$\Rightarrow \boxed{K = K_{trans} + K_{rot} = \frac{1}{2} M V^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2}$$

M = legemets masse, $\vec{V} = \dot{\vec{R}}_{CM}$ = CMs hastighet

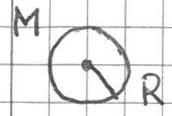
I_0 = treghetsmoment mhp rot. aksen gjennom CM

$\vec{\omega}$ = vinkelhastigheten om ——— " ———

[Se eget notat for <u>beviset</u>, som ikke er pensum]

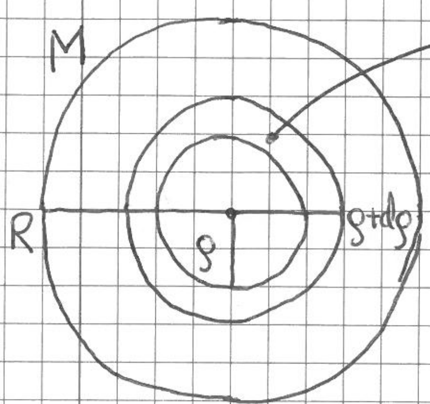
Eksempler på beregning av I [YF 9.6; LL 6.3]

Eks 1: Ring / Hul sylinder



$$I_0 = \int \rho^2 \, dm = R^2 \int dm = \underline{\underline{MR^2}}$$

Eks 2: Rund skive / Kompakt sylinder

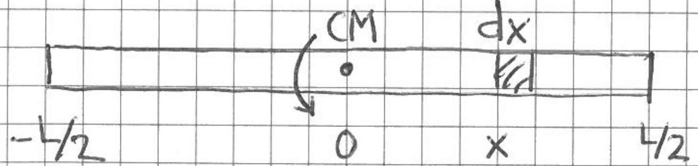


$$dI_0 = dm \cdot \rho^2 = M \frac{dA}{A} \rho^2$$

$$= M \frac{2\pi \rho \, d\rho}{\pi R^2} \rho^2 = \frac{2M}{R^2} \rho^3 \, d\rho$$

$$\Rightarrow I_0 = \int dI_0 = \frac{2M}{R^2} \underbrace{\int_0^R \rho^3 \, d\rho}_{= R^4/4} = \underline{\underline{\frac{1}{2} MR^2}}$$

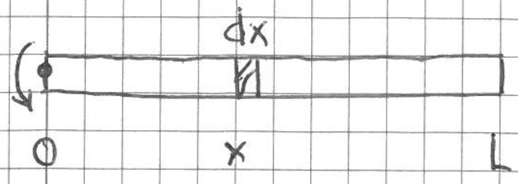
Eks 3: Tynn stang mhp CM (dvs akse $\perp$ stang, gjennom CM)



$$\rho = x, \quad dm = M \frac{dx}{L}$$

$$\Rightarrow I_0 = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 M \frac{dx}{L} = \frac{M}{L} \Big|_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{3} x^3 = \underline{\underline{\frac{1}{12} ML^2}}$$

Eks 4: Tynn stang, mhp akse gjennom stangas ende



$$I = \int_0^L x^2 M \frac{dx}{L} = \underline{\underline{\frac{1}{3} ML^2}}$$

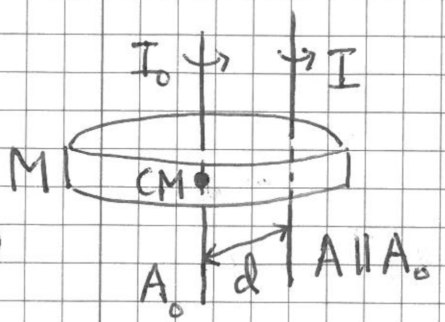
Eks 5: Kuleskall $I_0 = \frac{2}{3}MR^2$

Eks 6: Kompakt kule $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$

} mhp akse gjennom CM

Steiners sats [YF 9.5; LL 6.3]

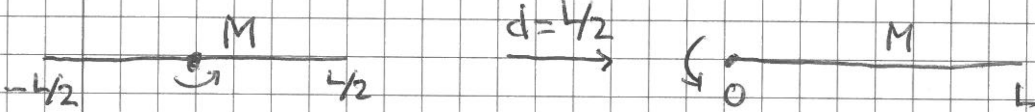
(= parallellakseteoremet)



$$\boxed{I = I_0 + Md^2}$$

(Se eget notat for bevis)

Eks 1: Tynn stang



$I_0 = \frac{1}{12}ML^2$

$I = I_0 + M(L/2)^2 = \frac{1}{3}ML^2$

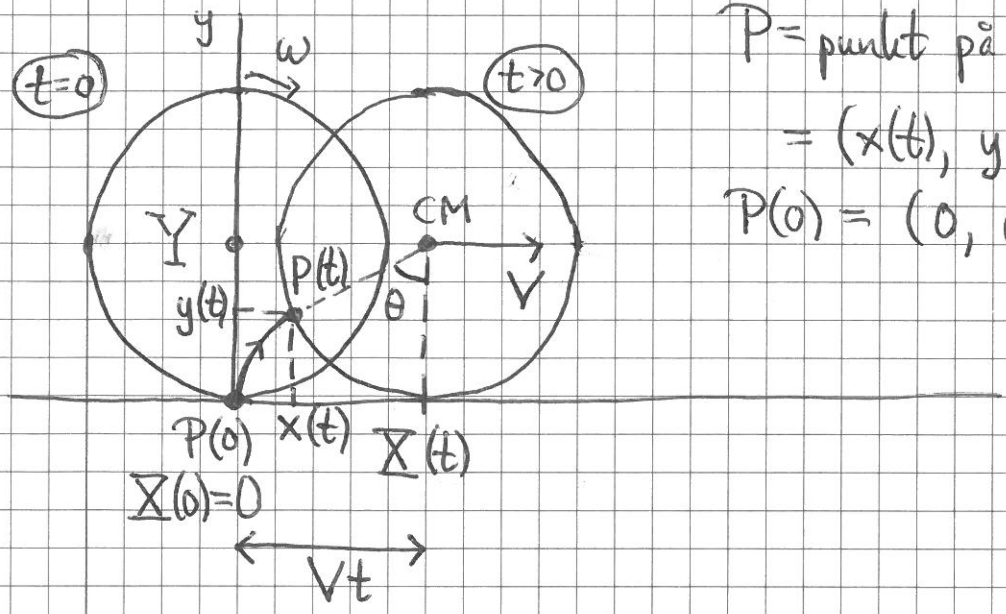
Eks 2: Kompakt kule

$I_0 = \frac{2}{5}MR^2$

$I = I_0 + MR^2 = \frac{7}{5}MR^2$

Rulling og sluring [YF 10.3 ; LL 6.7]

Ren rulling



P = punkt på periferien
$= (x(t), y(t))$
$P(0) = (0, 0)$

Fra figuren er banen til P : $x = X - R\sin\theta$, $y = R - R\cos\theta$

Pr def. er $\omega = \dot{\theta}$

Banen til CM : $X = V\cdot t = R\cdot\theta$; $Y = R$

$$\Rightarrow V = \dot{X} = R\dot{\theta} = R\omega$$

$$A = \ddot{X} = \dot{V} = R\ddot{\theta} = R\dot{\omega} = R\alpha$$

som er rullebetingelsen(e) : $\boxed{V = R\omega,\ A = R\alpha}$

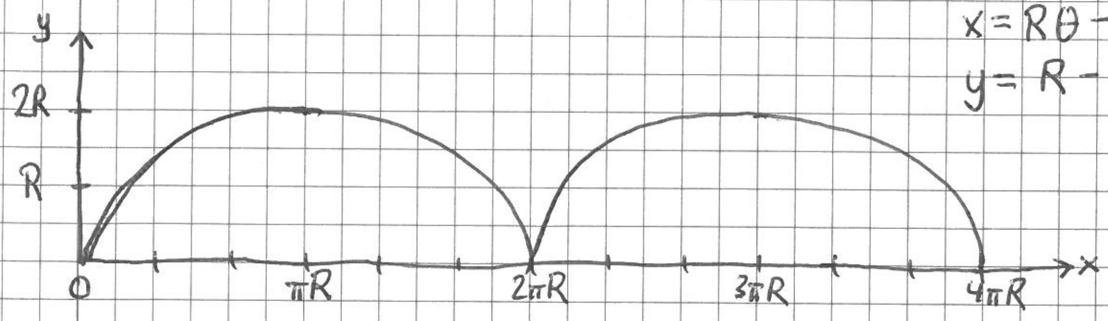
Hastigheten til P blir : $(\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y})$

$$\dot{x} = \dot{X} - R\dot{\theta}\cos\theta = V(1-\cos\theta)$$

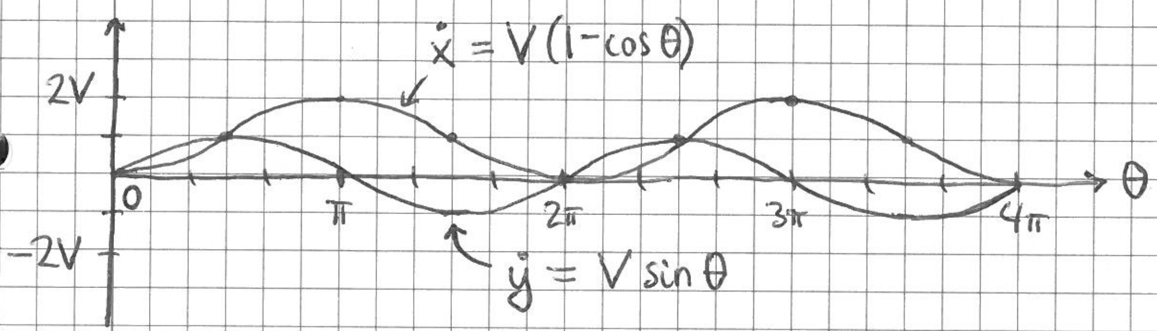
$$\dot{y} = R\dot{\theta}\sin\theta = V\sin\theta$$

Banen til P er en sykloide:

$x = R\theta - R\sin\theta$
$y = R - R\cos\theta$



Hastighetskomponentene til P: (anta V = konst.)



Vi ser at $v_P = 0$ når $\theta = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, dvs når P er i kontakt med underlaget.

$$\Rightarrow P_f = dW_f/dt = \vec{f}\cdot\vec{v} = 0$$

dvs indet effekttap pga friksjon ved ren rulling!

Selv om $\vec{f} \neq 0$! (Statisk friksjon: $f \leq \mu_s N$)

Retning på $\vec{f}$: Motsatt rettet "tenkt" relativhastighet $\vec{v}$ i kontaktpunktet, dvs den $\vec{v}$ som oppstår i det aktuelle problem når $f \to 0$.

[I virkeligheten noe tap av mekanisk energi også ved ren rulling, såkalt rullefriksjon. Denne bryr vi oss ikke om her!]